Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2012

Diciembre 2011

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Algebra

1. Sean G un grupo finito y σ un automorfismo de G.

   (a) Demuestre que si $\sigma(x) = x^{-1}$ para cada $x \in G$, entonces G es abeliano.

   (b) Demuestre que si $\sigma^2 = 1$ y $x \neq \sigma(x)$ para cada $x \in G$ con $x \neq 1$, entonces
   $$G = \{x^{-1}\sigma(x) \mid x \in G\}.$$

   (c) Suponiendo (b), demuestre que G es abeliano.

2. Sea F un cuerpo finito con q elementos. Calcule el número de matrices 2 por 2 invertibles con elementos en F, y el número de matrices 2 por 2 con elementos en F y determinante igual a 1.

3. Sea $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2)$. Demuestre que R es un dominio. Sea F el cuerpo cuociente de R. ¿Un polinomio mónico $f(t) \in R[t]$ puede tener ceros en $F \setminus R$? Justifique su respuesta.

Análisis (resolver 2 de 3)

1. Usando una seria (u otra herramienta) adecuada, calcule los tres primeros dígitos a, b, c de la presentación decimal
   $$\ln 2 = 0.abc\ldots$$
   Se requiere una justificación analítica para su respuesta. No se permite el uso de calculadora en ninguna etapa de su trabajo.

2. Las funciones $v, w : [0, 1] \to \mathbb{R}$ son de clase C^1, tienen sus derivadas estrictamente positivas en $[0, 1]$ y son tales que
   $$v(0) = w(0), \quad v(1) = w(1).$$
   Demuestre que existen puntos $x_1 \leq x_2$ en $[0, 1]$ tales que
   $$v(x_1) = w(x_2), \quad v'(x_1) = w'(x_2).$$

3. Para $x > -1$ considere la sucesión de funciones

$$x, \frac{1}{1+x}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}, \ldots, f_n(x), \frac{1}{1+f_n(x)}, \ldots$$

Investigue la convergencia de esta sucesión y caracterice los subconjuntos de $(-1, \infty)$ donde esta convergencia es uniforme.

Topología

1. Sea X el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de los segmentos de recta L_n de $(0,0)$ a $(1, 1/n)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ junto con el segmento límite L_∞ de $(0,0)$ a $(1,0)$. Se define una topología $\mathcal{T}$ sobre X en la cual O es abierto en X ssi $O \cap L_n$ es abierto en L_n para todo n (incluyendo $n = \infty$), donde cada $L_n \subset \mathbb{R}^2$ tiene la topología del subespacio. Demostrar que $\mathcal{T}$ es una topología. Demostrar que X no es compacto en la topología $\mathcal{T}$. ¿Es X compacto como subespacio de $\mathbb{R}^2$?

2. Encontrar aplicaciones cocientes de $D^2 \to S^1$, de $S^2 \to D^2$ y de $S^2 \to S^1$. *Indicación: no se necesitan aplicaciones explícitas. Basta con una buena descripción geométrica.*

3. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ la clausura del grafo de $\operatorname{sen}(1/x)$ para $x > 0$. Encontrar las componentes conexas de X. Justificar su respuesta.