Universidad de Talca 20 de Marzo de 2008

Examen Ingreso a Doctorado

Instrucciones:

1.- Este examen consta de 3 partes: Algebra, Topología, Análisis, en cada una de estas partes hay 4 preguntas. Contestar solo 2 preguntas en cada parte.

2.- Tiempo total para el examen responder 3 horas.

Sección Topología

(1) Sea X un espacio topológico. Se dice que D es denso en X si su clausura, $\overline{D} = X$.
a) Si X es el único subconjunto denso de X, cuál es la topología sobre X?
b) Encontrar A, D y X tal que D es denso en el espacio topológico X, pero $D \cap A$ no es denso en $A \subseteq X$.

(2) Sea $\mathfrak{T}$ la topología sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cuya base está dada por las rectas del tipo $y = 2x+k$, con $k \in \mathbb{R}$. Demostrar que $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathfrak{T})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_1) \times (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_2)$ para ciertas topologías $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$.

(3) El grafo de una función $f : X \to Y$ es el conjunto de puntos de la forma $\big(x, f(x)\big)$ para $x \in X$. Demostrar que si f es una función continua, entonces el grafo de f (como subespacio de $X \times Y$) es homeomorfo a X.

(4) Mostrar que no hay biyección continua de S^1 sobre un subespacio de $\mathbb{R}$.

Parte Algebra

(1) Demuestre que el grupo aditivo $\mathbb{Q}$ de los números racionales no puede estar generado por un número finito de elementos.

(2) Demuestre que el anillo $\mathbb{C}[X,Y]/(X^3 - Y^2)$ no es principal.
Indicación: Considere el homomorfismo $\mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{C}[T],\ X \mapsto T^2, Y \mapsto T^3$.

(3) Sea α una raíz del polinomio irreducible $X^3 - 3x + 4 \in \mathbb{Q}[X]$. Sea $\mathbb{Q}(\alpha)$ el cuerpo que genera esta raíz. Calcular explicitamente el inverso de $1+\alpha+\alpha^2$ en $\mathbb{Q}[\alpha]$ como $a+b\alpha+c\alpha^2$ con $a,b,c \in \mathbb{Q}$.

(4) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule A^{100}.

Parte Análisis

(1) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales con $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Definamos $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} s_n = a$.

(2) Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función continua con $f(0) = 0$. Supongamos que f es diferenciable en $(0,\infty)$ con una derivada f' monótonamente creciente. Demuestre que la función $f(x)/x$, $x \in (0,\infty)$ es creciente.

(3) Sea $f : [0,\infty) \to (0,1]$ definida por $f(x) = (x+1)\exp(-x)$. Demuestre que f es biyectiva y calcule $(f^{-1})'(2/e)$ (donde f^{-1} es la función inversa).

(4) **(a)** Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 = 4$ y $x + y + z = 1$.

(b) Calcule $\int\int_A (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, donde A es la región acotada por la curva $x^2 + y^2 - 2y = 0$.