Examen de admisión

Topología

(1) Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ continuas. Pruebe que el conjunto $\{x \mid f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

(2) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua. Demuestre que existe un punto x tal que $f(x) = x$.

Análisis

(1) Demuestre que la ecuación $x = \cos(x^2)$ tiene una solución en el interválo $[0, \sqrt{\pi}]$.

(2) Verifique si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ es convergente o divergente.

(3) Calcule el volumen de la región

$$\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ z \geq (x^2 + y^2)^{1/4}\}.$$

Álgebra

(1) Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Demuestre la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(i) existe un entero $N \geq 1$ tal que $A^N = 0$

(ii) para todo entero $k \geq 1$, la traza de A^k es nula

Indicación: Usar los valores propios de A

(2) Sea k un cuerpo y sean X, Y, Z, T variables. Sea $I = \langle X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3 \rangle \subset k[X, Y, Z]$ el ideal de $k[X, Y, Z]$ generado por los polinomios $X^2 - Y^3$ y $Y^2 - Z^3$. Demuestre que la aplicación $\phi : k[X, Y, Z] \to k[T]$ dada por $\phi(f(X, Y, Z)) = f(T^9, T^6, T^4)$ es un homomorphismo con núcleo $\mathrm{Ker}(\phi) = I$. ¿Es $k[X, Y, Z]/I$ isomorfo a $k[T]$?

Indicación: Todo polinomio $f \in k[X, Y, Z]$ se puede escribir de la forma

$$f = a + Xb + Yc + XYd + g$$

con $a, b, c, d \in k[Z]$ y $g \in I$.