Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2011

Enero 2011

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Algebra

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K. Sean A, B transformaciones lineales de V, tales que $A^2 = B^2 = 0$ y $AB + BA = I$, donde I denota la identidad de V. Sean N_A y N_B los nucleos de A y B respectivamente.

   a) Pruebe que $N_A = AN_B$, $N_B = BN_A$ y $V = N_A \oplus N_B$.

   b) Pruebe que la dimensión de V es par.

   c) Pruebe que si la dimensión de V es 2 entonces V posee una base con respecto a la cual A y B están representadas por las matrices $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ respectivamente.

2. Sea K un cuerpo y sean $K[X]$, $K[X, Y]$ los anillos de polinomios en una y dos variables respectivamente. Si I es un ideal de $K[X, Y]$ se escribe $\overline{P(X, Y)}$ por la clase de $P(X, Y) \in K[X, Y]$ en $K[X, Y]/I$ y si $Q(X, Y) \in K[X, Y]$ se escribe $(Q(X, Y))$ por el ideal de $K[X, Y]$ generado por $Q(X, Y)$.

   a) Pruebe que la aplicación $\varphi : K[X] \to K[X, Y]/(X^2 - Y)$ dada por $f(X) \mapsto \overline{f(X)}$ es un isomorfismo de anillos.

   b) Determine si los anillos $K[X, Y]/(X^2 - Y)$ y $K[X, Y]/(X^2 - Y^2)$ son isomorfos.

Análisis

1. Sea $P(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$. Demuestre que P admite al menos una raíz en $[0, 1]$.

2. Se considera la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Demuestre que f no es de clase C^1.

3. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right]$$

4. Sea f una función definida en $[a,b]$ y derivable en $[a,b]$ tal que $f(a)=f(b)$ y $f'(a)=0$. Demuestre que $\exists c \in]a,b[$ tal que
$$f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

Topología

1. Demostrar que no hay biyección continua de S^1 sobre un subespacio de $\mathbb{R}$.
2. Un espacio X se dice *regular* si para todo punto $x \in X$ y todo conjunto cerrado C que no contiene a x, existen abiertos disjuntos U y V de X tales que $C \subseteq U$ y $x \in V$. Demostrar que un espacio compacto y de Hausdorff es regular.
3. Sea $X = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. Se define la relación de equivalencia sobre los puntos de X siguiente:
$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \quad \text{si} \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$
Sea Y la colección de clases de equivalencia en la topología cociente. ¿A que espacio conocido es homeomorfo Y? Justifique bien su respuesta.