Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado

Mayo 2011

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Algebra

1. Sea R un dominio de integridad que contiene un cuerpo F como subanillo. Suponga que R tiene dimensión finita como espacio vectorial sobre F. Pruebe que R es un cuerpo.

2. Sea $Z(G)$ el centro de G. Demuestre que no existe grupo G tal que $G/Z(G)$ es isomorfo al grupo cíclico de orden 3. *Indicación: demuestre todas sus afirmaciones!*

3. Encontrar todos los ideales del anillo $\mathbb{Z}[x]/(2, x^3+1)$.

Análisis

1. Sea f una funcion definida en $\mathbb{R}$, continua en 0 y tal que $f(x) = f(2x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es constante.

2. Sea la serie $\sum u_n$ con termino general
$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+k)!}$$
donde $k \in \mathbb{N}$. Estudiar la naturaleza de la serie en termino del parametro k.

3. Sean f y g dos funciones definidas en $]0, \infty[$ por
$$f(x) = \ln(e^x - 1), \qquad g(x) = \frac{x\,e^x}{1 - e^x}$$
Demuestre que existe un unico $\alpha \in]0, \infty[$ tal que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Topología

1. Sea $I = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} | \, 0 \leq x \leq 1\}$. Considere el cuadrado ordenado I_0^2, es decir, el conjunto $I \times I$ con la topología inducida por el orden del diccionario. Determine la clausura de los siguientes conjuntos:

$$A = (1/2, 1) \times \{0\} \qquad B = (\mathbb{Q} \cap I) \times \{1/2\}.$$

2. La gráfica de una función $f : X \to Y$ es el conjunto $\big\{\big(x, f(x)\big) \,\big|\, x \in X\big\}$. Demuestre que si f es una función continua, entonces la gráfica de f, como subespacio de $X \times Y$, es homeomorfa a X.

3. Considere el conjunto X dotado de la topología Fort en p, lo que significa que un subconjunto U en X es abierto si, y sólo si, o bien $p \notin U$ o bien $X \setminus U$ es finito. Compruebe lo siguiente:

   a) X es disconexo;

   b) X es compacto.