Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen de Ingreso al Doctorado–Diciembre 2012

Tres secciones: álgebra, análisis y topología
Tiempo: 3 horas

Algebra

1. Sea A una matriz real $n \times n$. Muestre que $A^t A$ y A tienen el mismo rango (*Indicación:* considere primero la nulidad de las matrices).

2. Sea G un grupo finito, y sea N el subgrupo de G generado por el subconjunto $\{\, g^2 \mid g \in G\}$. Muestre que N es un subgrupo normal de G y que N contiene al subgrupo comutador $[G, G]$ de G.

3. Sea R un dominio principal y sean $A, B \neq 0$ ideales de R. Muestre que $AB = A \cap B$ si y solo si $A + B = R$.

4. Muestre que cada cuerpo algebraicamente cerrado tiene número infinito de elementos.

Análisis

Sea

$$f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - (2x + n)$$

donde n es un entero positivo.

1. Demuestre que la ecuacion $f_n(x) = 0$ admite una unica solucion en $[0, 1[$ que se denota por x_n.

2. Mostrar que $f_n(x) > f_{n+1}(x)$, y que $f_{n+1}(x_n) < 0$ y deducir que la sucesion x_n es creciente y convergente.

3. Calcular $f_n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ y deducir el valor $\lim_{n\to\infty} x_n$

Topología

1. Probar que toda aplicación continua $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es constante.

2. *a)* Probar que todo espacio conexo por arcos es conexo.

   b) Dar un ejemplo de un espacio conexo que no es conexo por arcos.

3. Probar que el cociente $S^1 \times [0, 1] \sim$ es homeomorfo a S^2, donde

$$((x, y), t) \sim ((x', y'), t'), \text{ si, y solo si, } t = t' = 1, \text{ o } t = t' = 0.$$