Universidad de Talca 20 de Marzo de 2008

Examen Ingreso a Doctorado

Instrucciones:

1.- Este examen consta de 3 partes: Algebra, Topología, Análisis, en cada una de estas partes hay 4 preguntas. Contestar solo 2 preguntas en cada parte.

2.- Tiempo total para el examen responder 3 horas.

Sección Topología

(1) Sea X un espacio topológico. Se dice que D es denso en X si su clausura, $\overline{D} = X$.
a) Si X es el único subconjunto denso de X, cuál es la topología sobre X?
b) Encontrar A, D y X tal que D es denso en el espacio topológico X, pero $D \cap A$ no es denso en $A \subseteq X$.

(2) Sea $\mathfrak{T}$ la topología sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cuya base está dada por las rectas del tipo $y = 2x + k$, con $k \in \mathbb{R}$. Demostrar que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{T})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_1) \times (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_2)$ para ciertas topologías $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$.

(3) El grafo de una función $f : X \to Y$ es el conjunto de puntos de la forma $\big(x, f(x)\big)$ para $x \in X$. Demostrar que si f es una función continua, entonces el grafo de f (como subespacio de $X \times Y$) es homeomorfo a X.

(4) Mostrar que no hay biyección continua de S^1 sobre un subespacio de $\mathbb{R}$.

Parte Algebra

(1) Demuestre que el grupo aditivo $\mathbb{Q}$ de los números racionales no puede estar generado por un número finito de elementos.

(2) Demuestre que el anillo $\mathbb{C}[X,Y]/(X^3 - Y^2)$ no es principal.
Indicación: Considere el homomorfismo $\mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{C}[T],\ X \mapsto T^2, Y \mapsto T^3$.

(3) Sea α una raíz del polinomio irreducible $X^3 - 3x + 4 \in \mathbb{Q}[X]$. Sea $\mathbb{Q}(\alpha)$ el cuerpo que genera esta raíz. Calcular explicitamente el inverso de $1+\alpha+\alpha^2$ en $\mathbb{Q}[\alpha]$ como $a+b\alpha+c\alpha^2$ con $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

(4) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule A^{100}.

Parte Análisis

(1) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales con $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Definamos $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} s_n = a$.

(2) Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función continua con $f(0) = 0$. Supongamos que f es diferenciable en $(0,\infty)$ con una derivada f' monótonamente creciente. Demuestre que la función $f(x)/x$, $x \in (0,\infty)$ es creciente.

(3) Sea $f : [0,\infty) \to (0,1]$ definida por $f(x) = (x+1)\exp(-x)$. Demuestre que f es biyectiva y calcule $(f^{-1})'(2/e)$ (donde f^{-1} es la función inversa).

(4) (a) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 = 4$ y $x + y + z = 1$.

(b) Calcule $\int\int_A (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, donde A es la región acotada por la curva $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Examen de admisión

Topología

(1) Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ continuas. Pruebe que el conjunto $\{x \mid f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

(2) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua. Demuestre que existe un punto x tal que $f(x) = x$.

Análisis

(1) Demuestre que la ecuación $x = \cos(x^2)$ tiene una solución en el intervál $[0, \sqrt{\pi}]$.

(2) Verifique si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ es convergente o divergente.

(3) Calcule el volumen de la región

$$\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ z \geq (x^2 + y^2)^{1/4}\}.$$

Álgebra

(1) Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Demuestre la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(i) existe un entero $N \geq 1$ tal que $A^N = 0$

(ii) para todo entero $k \geq 1$, la traza de A^k es nula

Indicación: Usar los valores propios de A

(2) Sea k un cuerpo y sean X, Y, Z, T variables. Sea $I = \langle X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3 \rangle \subset k[X, Y, Z]$ el ideal de $k[X, Y, Z]$ generado por los polinomios $X^2 - Y^3$ y $Y^2 - Z^3$. Demuestre que la aplicación $\phi : k[X, Y, Z] \to k[T]$ dada por $\phi(f(X, Y, Z)) = f(T^9, T^6, T^4)$ es un homomorphismo con núcleo $\mathrm{Ker}(\phi) = I$. ¿Es $k[X, Y, Z]/I$ isomorfo a $k[T]$?

Indicación: Todo polinomio $f \in k[X, Y, Z]$ se puede escribir de la forma

$$f = a + Xb + Yc + XYd + g$$

con $a, b, c, d \in k[Z]$ y $g \in I$.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado

Mayo 2011

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Algebra

1. Sea R un dominio de integridad que contiene un cuerpo F como subanillo. Suponga que R tiene dimensión finita como espacio vectorial sobre F. Pruebe que R es un cuerpo.

2. Sea $Z(G)$ el centro de G. Demuestre que no existe grupo G tal que $G/Z(G)$ es isomorfo al grupo cíclico de orden 3. *Indicación: demuestre todas sus afirmaciones!*

3. Encontrar todos los ideales del anillo $\mathbb{Z}[x]/(2, x^3 + 1)$.

Análisis

1. Sea f una funcion definida en $\mathbb{R}$, continua en 0 y tal que $f(x) = f(2x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es constante.

2. Sea la serie $\sum u_n$ con termino general

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+k)!}$$

donde $k \in \mathbb{N}$. Estudiar la naturaleza de la serie en termino del parametro k.

3. Sean f y g dos funciones definidas en $]0, \infty[$ por

$$f(x) = \ln(e^x - 1), \qquad g(x) = \frac{x\, e^x}{1 - e^x}$$

Demuestre que existe un unico $\alpha \in]0, \infty[$ tal que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Topología

1. Sea $I = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} | \, 0 \leq x \leq 1\}$. Considere el cuadrado ordenado I_0^2, es decir, el conjunto $I \times I$ con la topología inducida por el orden del diccionario. Determine la clausura de los siguientes conjuntos:

$$A = (1/2, 1) \times \{0\} \qquad B = (\mathbb{Q} \cap I) \times \{1/2\}.$$

2. La gráfica de una función $f : X \to Y$ es el conjunto $\big\{\big(x, f(x)\big) \,\big|\, x \in X\big\}$. Demuestre que si f es una función continua, entonces la gráfica de f, como subespacio de $X \times Y$, es homeomorfa a X.

3. Considere el conjunto X dotado de la topología Fort en p, lo que significa que un subconjunto U en X es abierto si, y sólo si, o bien $p \notin U$ o bien $X \setminus U$ es finito. Compruebe lo siguiente:

   a) X es disconexo;

   b) X es compacto.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2011

Enero 2011

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Algebra

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K. Sean A, B transformaciones lineales de V, tales que $A^2 = B^2 = 0$ y $AB + BA = I$, donde I denota la identidad de V. Sean N_A y N_B los nucleos de A y B respectivamente.

   a) Pruebe que $N_A = AN_B$, $N_B = BN_A$ y $V = N_A \oplus N_B$.

   b) Pruebe que la dimensión de V es par.

   c) Pruebe que si la dimensión de V es 2 entonces V posee una base con respecto a la cual A y B están representadas por las matrices $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ respectivamente.

2. Sea K un cuerpo y sean $K[X]$, $K[X,Y]$ los anillos de polinomios en una y dos variables respectivamente. Si I es un ideal de $K[X,Y]$ se escribe $\overline{P(X,Y)}$ por la clase de $P(X,Y) \in K[X,Y]$ en $K[X,Y]/I$ y si $Q(X,Y) \in K[X,Y]$ se escribe $(Q(X,Y))$ por el ideal de $K[X,Y]$ generado por $Q(X,Y)$.

   a) Pruebe que la aplicación $\varphi : K[X] \to K[X,Y]/(X^2 - Y)$ dada por $f(X) \mapsto \overline{f(X)}$ es un isomorfismo de anillos.

   b) Determine si los anillos $K[X,Y]/(X^2 - Y)$ y $K[X,Y]/(X^2 - Y^2)$ son isomorfos.

Análisis

1. Sea $P(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$. Demuestre que P admite al menos una raíz en $[0,1]$.

2. Se considera la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Demuestre que f no es de clase C^1.

3. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right]$$

4. Sea f una función definida en $[a, b]$ y derivable en $[a, b]$ tal que $f(a) = f(b)$ y $f'(a) = 0$. Demuestre que $\exists c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

Topología

1. Demostrar que no hay biyección continua de S^1 sobre un subespacio de $\mathbb{R}$.

2. Un espacio X se dice *regular* si para todo punto $x \in X$ y todo conjunto cerrado C que no contiene a x, existen abiertos disjuntos U y V de X tales que $C \subseteq U$ y $x \in V$. Demostrar que un espacio compacto y de Hausdorff es regular.

3. Sea $X = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Se define la relación de equivalencia sobre los puntos de X siguiente:

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \quad \text{si} \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

   Sea Y la colección de clases de equivalencia en la topología cociente. ¿A que espacio conocido es homeomorfo Y? Justifique bien su respuesta.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2012

Diciembre 2011

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Algebra

1. Sean G un grupo finito y σ un automorfismo de G.

   (a) Demuestre que si $\sigma(x) = x^{-1}$ para cada $x \in G$, entonces G es abeliano.

   (b) Demuestre que si $\sigma^2 = 1$ y $x \neq \sigma(x)$ para cada $x \in G$ con $x \neq 1$, entonces

   $$G = \{x^{-1}\sigma(x) \mid x \in G\}.$$

   (c) Suponiendo (b), demuestre que G es abeliano.

2. Sea F un cuerpo finito con q elementos. Calcule el número de matrices 2 por 2 invertibles con elementos en F, y el número de matrices 2 por 2 con elementos en F y determinante igual a 1.

3. Sea $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2)$. Demuestre que R es un dominio. Sea F el cuerpo cuociente de R. ¿Un polinomio mónico $f(t) \in R[t]$ puede tener ceros en $F \setminus R$? Justifique su respuesta.

Análisis (resolver 2 de 3)

1. Usando una seria (u otra herramienta) adecuada, calcule los tres primeros dígitos a, b, c de la presentación decimal

   $$\ln 2 = 0.abc\ldots$$

   Se requiere una justificación analítica para su respuesta. No se permite el uso de calculadora en ninguna etapa de su trabajo.

2. Las funciones $v, w : [0, 1] \to \mathbb{R}$ son de clase C^1, tienen sus derivadas estrictamente positivas en $[0, 1]$ y son tales que

   $$v(0) = w(0), \quad v(1) = w(1).$$

   Demuestre que existen puntos $x_1 \leq x_2$ en $[0, 1]$ tales que

   $$v(x_1) = w(x_2), \quad v'(x_1) = w'(x_2).$$

3. Para $x > -1$ considere la sucesión de funciones

$$x, \frac{1}{1+x}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}, \ldots, f_n(x), \frac{1}{1+f_n(x)}, \ldots$$

Investigue la convergencia de esta sucesión y caracterice los subconjuntos de $(-1, \infty)$ donde esta convergencia es uniforme.

Topología

1. Sea X el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de los segmentos de recta L_n de $(0,0)$ a $(1, 1/n)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ junto con el segmento límite L_∞ de $(0,0)$ a $(1,0)$. Se define una topología $\mathcal{T}$ sobre X en la cual O es abierto en X ssi $O \cap L_n$ es abierto en L_n para todo n (incluyendo $n = \infty$), donde cada $L_n \subset \mathbb{R}^2$ tiene la topología del subespacio. Demostrar que $\mathcal{T}$ es una topología. Demostrar que X no es compacto en la topología $\mathcal{T}$. ¿Es X compacto como subespacio de $\mathbb{R}^2$?

2. Encontrar aplicaciones cocientes de $D^2 \to S^1$, de $S^2 \to D^2$ y de $S^2 \to S^1$. *Indicación: no se necesitan aplicaciones explícitas. Basta con una buena descripción geométrica.*

3. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ la clausura del grafo de $\operatorname{sen}(1/x)$ para $x > 0$. Encontrar las componentes conexas de X. Justificar su respuesta.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen de Ingreso al Doctorado–Diciembre 2012

Tres secciones: álgebra, análisis y topología
Tiempo: 3 horas

Algebra

1. Sea A una matriz real $n \times n$. Muestre que $A^t A$ y A tienen el mismo rango (*Indicación:* considere primero la nulidad de las matrices).

2. Sea G un grupo finito, y sea N el subgrupo de G generado por el subconjunto $\{\, g^2 \mid g \in G\}$. Muestre que N es un subgrupo normal de G y que N contiene al subgrupo comutador $[G, G]$ de G.

3. Sea R un dominio principal y sean $A, B \neq 0$ ideales de R. Muestre que $AB = A \cap B$ si y solo si $A + B = R$.

4. Muestre que cada cuerpo algebraicamente cerrado tiene número infinito de elementos.

Análisis

Sea

$$f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - (2x + n)$$

donde n es un entero positivo.

1. Demuestre que la ecuacion $f_n(x) = 0$ admite una unica solucion en $[0, 1[$ que se denota por x_n.

2. Mostrar que $f_n(x) > f_{n+1}(x)$, y que $f_{n+1}(x_n) < 0$ y deducir que la sucesion x_n es creciente y convergente.

3. Calcular $f_n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ y deducir el valor $\lim_{n\to\infty} x_n$

Topología

1. Probar que toda aplicación continua $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es constante.

2. *a*) Probar que todo espacio conexo por arcos es conexo.
   b) Dar un ejemplo de un espacio conexo que no es conexo por arcos.

3. Probar que el cociente $S^1 \times [0, 1] \sim$ es homeomorfo a S^2, donde

$$((x, y), t) \sim ((x', y'), t'), \text{ si, y solo si, } t = t' = 1, \text{ o } t = t' = 0.$$

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2014

18 de Noviembre de 2013

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Álgebra

1. Sea A una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ y sean $v_1, v_2 \ldots, v_k$ vectores propios de A a valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Suponiendo que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, muestre que los v_i son linealmente independientes.

2. Sea R un anillo y sea Σ el conjunto de ideales de R cuyos elementos son divisores de cero de R. Muestre que Σ tiene elementos maximales y que todo elemento maximal es un ideal primo.

Análisis

1. Muestre que la función $f(x) := e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ es una función decreciente en $[0, \infty)$ y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Suponga que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Muestre que z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero sí y sólo si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

3. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to]0, \infty[$ una funcion medible tal que $\int_\Omega f(x)\, dx < \infty$ y sea

$$f_n = \int_\Omega n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) dx,$$

donde $\alpha > 1$.

   a) Mostrar que para todo $x > 0$, $(1 + x^\alpha) \leq (1 + x)^\alpha$ y que la funcion $\ln(1 + x^\alpha)/x$ es acotada en $]0, \infty[$.

   b) Usando el teorema de Lebesgue, demostrar que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$

Topología

(a) Sea $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||(x_1, \ldots, x_{n+1})|| = 1\}$ y sea $E(S^n) := \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$ el ecuador de S^n.

   i. Probar que el cociente de S^n por $E(S^n)$es homeomorfo al producto wedge de dos copias de S^n.

   ii. Sea $H(S^n) := \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$. Demostrar que el cociente de $H(S^n)$ por su borde $\partial(H(S^n))$ es homeomorfo a S^n.

(b) Sea $\mathbb{R}_l$ el conjunto de números reales con la topología cuya base de abiertos es:

$$\mathcal{B} := \{[a, b) \mid a < b\}.$$

Considere la recta $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l \mid x = -y\}$ en $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$, con la topología inducida por la topología producto. Probar que L es unión de dos cerrados disjuntos.

(c) Sea $p : E \longrightarrow B$ un cubrimiento, con B conexo. Probar que si $|p^{-1}(b_o)| = k$ para algún $b_o \in B$, entonces $|p^{-1}(b)| = k$ para todo $b \in B$.

(d) Probar que:

   i. El espacio R_l del ejercicio 2) no es metrizable.

   ii. Probar que el conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$ con la topología inducida por la topología dada por el orden lexicográfico de $\mathbb{R}^2$ es metrizable, y por lo tanto normal. Qué sucede si consideramos $[0, 1] \times [0, 1]$ con la topología dada por el orden lexicográfico?

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2015

19 de Noviembre de 2014

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Álgebra

1. Sean A, B matrices cuadradas con entradas de $\mathbb{C}$. Suponiendo que $AB = BA$, muestre que A y B tienen un vector propio en comun.

2. Sea R un anillo comutativo unital y sea Σ el conjunto de ideales de R cuyos elementos son divisores de cero de R. Muestre que Σ tiene elementos maximales y que todo elemento maximal es un ideal primo.

3. Sea G el grupo generado por $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ sujetos a las relaciones

$$\begin{array}{rll} \sigma_i^2 & = 1 & \text{para todo } i \\ \sigma_i\sigma_j & = \sigma_j\sigma_i & \text{si } |i-j| > 1 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{si } |i-j| = 1. \end{array}$$

   Demuestre que G es isomorfo al grupo simétrico S_n.

4. Dos matrices A, B cuadradas se dicen similares si existe una matriz P invertible tal que $A = PBP^{-1}$. Sea A una matriz cuadrada con entradas de $\mathbb{C}$. Muestre que A y su traspuesta A^t son similares.

Análisis

1. Muestre que la función $f(x) := e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ es una función decreciente en $[0, \infty)$ y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Suponga que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Muestre que z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero sí y sólo si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

3. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to]0, \infty[$ una función medible tal que $\int_\Omega f(x)\, dx < \infty$ y sea

$$f_n = \int_\Omega n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) dx,$$

   donde $\alpha > 1$.

   a) Mostrar que para todo $x > 0$, $(1 + x^\alpha) \leq (1 + x)^\alpha$ y que la funcion $\ln(1 + x^\alpha)/x$ es acotada en $]0, \infty[$.

   b) Usando el teorema de Lebesgue, demostrar que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$

Topología

1. Sean Y e Z dos espacios topológicos disjuntos (es decir $Y \cap Z = \emptyset$) y sea $X = Y \cup Z$ la unión de Y y Z. Sea $\mathcal{T}$ la familia de subconjuntos de X dada por $U \in \mathcal{T}$ si y sólo si $U = U_Y \cup U_Z$ donde $U_Y \subset Y$ y $U_Z \subset Z$ son abiertos.

   (a) Demuestre que $\mathcal{T}$ es una topología en X llamada la topología de la unión disjunta.

   (b) Si Y y Z son Hausdorff, ¿es $X = Y \cup Z$ Hausdorff con la topología de la unión disjunta?

   (c) Si Y y Z son conexos, ¿es $X = Y \cup Z$ conexo con la topología de la unión disjunta?

   (d) Si Y y Z son compactos, ¿es $X = Y \cup Z$ compacto con la topología de la unión disjunta?

2. Sea $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R}$ y sea $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (A \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$. Demuestre que X es arco conexo pero no localmente arco conexo (recuerdese que un espacio X es localmente arco conexo si, para todo $x \in X$, cada entorno de $x \in X$ contiene un entorno de x arco conexo).

3. Sea X un espacio Hausdorff y sea K_i, $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, una familia de subespacios compactos. Demuestre que si U es un abierto que contiene a $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ entonces existe un conjunto finito de compactos $\{K_1, K_2 \dots, K_\ell\}$ tal que U contiene a $\bigcap_{i=1}^{\ell} K_i$.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2016

19 de Noviembre de 2015

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

Álgebra

1. Sean A, B matrices cuadradas con entradas de $\mathbb{C}$. Suponiendo que A es invertible, demuestre que $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} B$, donde para cada matriz C se denote el rango de C por $\operatorname{rang} C$.

2. Demuestre que todos los subgrupos de un grupo cíclico son cíclicos. Encuentre todos los subgrupos de $\mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$.

3. Encuentre el polinomio minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

4. Determine si el anillo $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(Z^2 - XY)$ es un dominio de factorización única.

Análisis

1. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

2. Identificar la superficie cuádrica en $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1 = 0$ y hallar sus proyecciones ortogonales en los tres planos coordenados OXY, OXZ, OYZ.

3. Encuentre todos los números complejos z con $|z| = 1$ tal que

$$\left| \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} \right| = 1.$$

Topología

1. Dar una condición necesaria y suficiente para que un espacio topológico X tenga un subconjunto denso de cardinalidad 1 (con un solo punto). Dar un ejemplo de un espacio que verifique esa condición.

2. Dados dos espacios topológicos X e Y,

   (a) probar que la proyección $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ es continua y abierta, donde $X \times Y$ tiene la topología producto,

   (b) probar que si Y es compacto, la proyección p_X es cerrada,

   (c) probar que $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde p_1 es la proyección en la primera componente, no es cerrada.

3. Probar que el espacio proyectivo real es la compactificación de Alexandroff (compactificación por un punto) de la banda de Moebius. *La banda de Moebius es el espacio cociente obtenido de* $(0,1) \times [0,1]$ *identificando los puntos* $(x,0)$ *e* $(1-x,1)$*, para* $x \in (0,1)$*. El espacio proyectivo real es el disco unitario* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$ *con los puntos* (x,y)*,* $(-x,-y)$ *de la frontera identificados.*

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen Ingreso Doctorado 2017

16 de Noviembre de 2016

Tres secciones: álgebra, análisis, topología

Tiempo: $4\frac{1}{2}$ horas

Álgebra

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea T una transformación lineal de V. Muestre que $T^N = 0$ para un entero $N > 0$ si y sólo si existe base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ sea triangular superior con ceros en la diagonal.

2. Sea G un subgrupo del grupo símetrico S_n y suponga que G contiene una transposición. Muestre que existe subgrupo $N \leq G$ tal que $|G : N| = 2$.

3. Sea $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Muestre que $3 \in R$ es un elemento irreducible de R pero que no es primo. ¿Es R de factorización única?

4. Sea $f(x) = x^3 + 9x + 6$ y sea $R = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$. Muestre que $\overline{x+1}$ es una unidad en R y encuentre $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tal que la inversa de $\overline{x+1}$ tenga forma $\overline{ax^2 + bx + c}$.

Análisis

1. Sea Ω un conjunto abierto conexo no vacio y f una función holomorfa $f \in H(\Omega)$. Sea P la parte real de f y Q la parte imaginaria. Se supone que existen tres reales (no nulos) a, b y c tales que
$$aP(z) + bQ(z) + c = 0, \qquad \forall z \in \Omega.$$
   (a) Mostrar que P y Q satisfacen
$$\begin{cases} a\frac{\partial P}{\partial x} - b\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ b\frac{\partial P}{\partial x} + a\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b\frac{\partial Q}{\partial x} + a\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ -a\frac{\partial Q}{\partial x} + b\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
   (b) Deducir que f es constante.

2. Considere la succesión de funciones
$$f_n(x) = 3^n \left[x^{3^n} - x^{3^{n+1}} \right], \qquad n \geq 1, x \geq 0$$
   Determinar el dominio D donde hay convergencia puntual y determinar si hay o no convergencia uniforme en D.

3. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Mostrar que f es convexa si y sólo si para todo $[a, b] \subset I$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, la función definida en $[a, b]$ por $g(x) = f(x) + \alpha x$ es acotada en $[a, b]$ y que $\mathrm{Max}_{x\in[a,b]} g(x) = \mathrm{Max}\,(g(a), g(b))$.
   (*Por definición, se dice que una función f es convexa en un intervalo I si para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$, $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$*).

Topología

1. Demuestre que los siguientes conjuntos son bases de una topología en $\mathbb{R}$. Determine además si los espacios topológicos correspondientes son Hausdorff o conexos o compactos.

   (a) $\mathcal{B}_1$ la colección de intervalos $]a, b[$ con $a < b$.

   (b) $\mathcal{B}_2$ la colección de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ cuyo complemento es finito.

   (c) $\mathcal{B}_3$ la colección de intervalos $]-\infty, b[$ con $b \in \mathbb{R}$.

2. Demuestre que un espacio topológico X es Hausdorff si y solo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$ con la topología producto.

3. Un espacio es llamado totalmente disconexo si todas sus componentes conexas son conjuntos de un elemento. Demuestre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es totalmente disconexo.