
Álgebra

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.

Tiempo: 3 horas

- Sea G un grupo y H un subgrupo de G de índice finito. Demuestre que G posee un subgrupo **normal** de índice finito que está contenido en H .
 - Sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G de índice finito. Demuestre que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G de índice finito.
- Sea p un entero primo, G un grupo finito y H un subgrupo **normal** de orden p .
 - Demuestre que H está contenido en todo p -subgrupo de Sylow de G .
 - Suponga que P es un p -subgrupo de G que contiene a H . Demuestre que H está contenido en el centro del grupo P .
- Se considera el anillo $R = \mathbb{Z}[x]/(2, x^3 + 1)$. Encuentre dos cuerpos K_1 y K_2 tales que R sea isomorfo a $K_1 \times K_2$.
- Considere el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Verifique que $1 + \sqrt{-5}$ es elemento irreducible que no es primo. Concluya que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no es un dominio de factorización única.
- Sea $p(x) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado $n > 2$, K el cuerpo de descomposición de $p(x)$ sobre \mathbb{Q} y suponga que $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \mathcal{S}_n$. Demuestre que $|\text{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})| = 1$, donde α es una raíz de $p(x)$.

Álgebra

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.

Tiempo: 4 horas

1. Sea G un grupo de orden $|G| = 3 \times 5^2 \times 7$ y sea $H \leq G$ un subgrupo de orden $|H| = 5^2 \times 7$. Sea $\varphi : G \rightarrow \text{Sym}(G/H)$ el homomorfismo asociado a la acción de G en G/H por multiplicación por la izquierda. Muestre que $H = \text{Ker } \varphi$.
2. (a) Sean k, m y p tres enteros estrictamente positivos, tal que p es un primo que no divide a m , y sea G un grupo simple de orden mp^k . Pruebe que p^k divide a $(m-1)!$.
(b) Sea G un grupo de orden $2^k 5$. Pruebe que para todo $k \geq 1$ el grupo G no es simple.
3. (a) Considere el anillo $\mathbb{Z}[i]$ y el ideal I generado por 6 y $9 - 3i$.
 - i. Explique, sin realizar cálculos, por qué existe $a \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $I = (a)$.
 - ii. Encuentre explícitamente $a \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $I = (a)$.(b) Sea R un dominio de factorización única y sea K su cuerpo de fracciones. Considere un polinomio mónico $f(x) \in R[x]$ y suponga que $\alpha \in K$ es una raíz de f . Pruebe que α pertenece a R .
4. Sea $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Encuentre todos los polinomios $f(x), g(x) \in R[x]$ tal que $x = f(x)g(x)$ en $R[x]$.
5. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y L una extensión finita de K . Pruebe que si $[L : K]$ es relativo con p , entonces $L|K$ es una extensión separable.
6. Sean p, q dos primos distintos, $n > 0$ un entero positivo y K/F una extensión de Galois tal que

$$|\text{Gal}(K/F)| = pq^n$$

- (a) Suponga que $p < q$. Demuestre que existe una extensión de Galois de F de grado p contenida en K .
- (b) Suponga que $p > q$. De un contraejemplo a la parte (a).

Álgebra

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.

Tiempo: 4 horas

1. Sea G un grupo finito y sea $H \leq G$ subgrupo tal que $|G| \nmid |G : H|!$. Muestre que H tiene un subgrupo $1 \neq N \leq H$ tal que $N \trianglelefteq G$.
2. Sean G_1 y G_2 grupos finitos y sea $p \geq 2$ un primo. Sean $n_p(G_1)$, $n_p(G_2)$ y $n_p(G_1 \times G_2)$ los números de grupos Sylow- p de G_1 , G_2 y $G_1 \times G_2$ respectivamente. Muestre que $n_p(G_1 \times G_2) = n_p(G_1)n_p(G_2)$.
3. Sea S_3 el grupo simétrico sobre $\{1, 2, 3\}$ y sea $\varphi : S_3 \rightarrow \text{Aut}(S_3)$ el homomorfismo dado por conjugación. Muestre que φ es un isomorfismo.
4. Sean los anillos R y S dados por $R = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ y $S = \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. Encuentre todos los homomorfismos de anillo $\varphi : R \rightarrow S$.
5. Expresé $14 + 6i$ como producto de primos de $\mathbb{Z}[i]$. (*Indicación: use la norma de $\mathbb{Z}[i]$*).
6. Demuestre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ y encuentre el polinomio minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sobre \mathbb{Q} y su cuerpo de descomposición.
7. Sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{n}}) \subseteq \mathbb{R}$.
 - (a) Muestre que E es un cuerpo.
 - (b) Muestre que $[E : \mathbb{Q}] = \infty$.
 - (c) Muestre que la identidad es el único \mathbb{Q} -automorfismo $\sigma : E \rightarrow E$.

Algebra

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.

Tiempo: 3 horas

1. Sea S_n el grupo simétrico de grado n y H un subgrupo normal de S_n que contiene una transposición. Pruebe que $H = S_n$.

2. Sea P un p -subgrupo de Sylow de H y H un subgrupo de G .

(a) Si $P \triangleleft H$ y $H \triangleleft G$. Demuestre que $P \triangleleft G$.

(b) Además suponga que $H = N_G(P) := \{g \in G \mid gPg^{-1} = P\}$, es decir H es el normalizador de P en G . Pruebe que $N_G(H) = H$.

3. (a) Encuentre dos polinomios $q(x), r(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tales que:

$$x^2q(x) = 1 \pmod{3x^3 + 1} \text{ y } (3x^3 + 1)r(x) = 1 \pmod{x^2}$$

(b) Encuentre todos los polinomios $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tales que:

$$p(x) = x^2 \pmod{3x^3 + 1}, \quad p(x) = 2x + 1 \pmod{x^2}$$

4. Sea $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $p(0)$ y $p(1)$ son enteros impares. Pruebe que $p(x)$ no tiene raíces en \mathbb{Z} .

5. Sea $f(x) = x^4 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$ y G el grupo de Galois del polinomio f .

(a) Calcule el orden de G .

(b) Determine un sistema de generadores de G y muestre de forma explícita la acción de G sobre las raíces de f .

(c) Determine G como grupo abstracto.

Álgebra

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.

Tiempo: 4 horas

- Sea G un grupo finito que actúa transitivamente sobre un conjunto X . Diremos que $Y \subset X$ es un **bloque** si para cada $g \in G$ se satisface una de las siguientes propiedades: $g(Y) = Y$ o $g(Y) \cap Y = \emptyset$. El grupo G es llamado **primitivo** si el único bloque en X es el trivial (es decir $Y = X$).
 - Sea $x \in X$ y Y un bloque que contiene a x . Pruebe que $G_Y := \{g \in G \mid g(Y) = Y\}$ es un subgrupo de G que contiene al estabilizador G_x .
 - Pruebe que el grupo transitivo G es primitivo si y sólo si para cada $x \in X$ el grupo G_x es un subgrupo maximal de G .
- Sea $D_{2n} := \{r, s \mid r^n = s^2 = (rs)^2 = 1\}$ la presentación usual del grupo Diedral de orden $2n$.
 - Sea m un entero positivo que divide a n . Pruebe que el grupo $\langle r^m \rangle$ es un subgrupo normal de D_{2n} y que $D_{2n}/\langle r^m \rangle \cong D_{2m}$.
 - Sea $n = 2^l k$, donde k es impar y l es un entero positivo. Pruebe que el número de 2-subgrupos de Sylow de D_{2n} es k .
- Determine todos los ideales del anillo $\mathbb{Z}[x]/(2, x^3 + 1)$.
- Sea K un cuerpo y $f(x) := x^7 + y^7 + z^7$ un polinomio en $K[x, y, z]$. Pruebe que f es irreducible si y sólo si la característica de K es diferente a 7.
- Sea B un anillo conmutativo y A un subanillo con unidad. Un elemento $b \in B$ es llamado **entero** sobre A si existe un polinomio **mónico** $p(x) \in A[x]$ tal que $p(b) = 0$. Diremos que el anillo B es entero sobre A , si todo elemento de B es entero sobre A .

Suponga que B es entero sobre A y que B es un dominio de integridad. Demuestre que A es un cuerpo si y sólo si B lo es.
- Sea $f(x) = x^5 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y G el grupo de Galois del polinomio f .
 - Calcule el orden de G .
 - Pruebe que G tiene un subgrupo normal de orden 5.
 - Pruebe que G no es abeliano.
 - Pruebe que G es isomorfo a un subgrupo del grupo simétrico S_5 que no contiene transposiciones.

Álgebra

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.

Tiempo: 4 horas

1. Sea G un grupo finito que actúa transitivamente sobre un conjunto X . Considere el siguiente conjunto $Y := \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 \neq x_2\}$.
 - (a) Pruebe que la aplicación $G \times Y \rightarrow Y : (g, (x_1, x_2)) \mapsto (g(x_1), g(x_2))$ es una acción bien definida del grupo G sobre el conjunto Y .
 - (b) Diremos que el grupo G es doblemente transitivo sobre X si G es transitivo sobre Y . Pruebe que G es doblemente transitivo sobre X si y sólo si para todo $x \in X$ el estabilizador $G_x := \{g \in G \mid g(x) = x\}$ actúa transitivamente sobre el conjunto $X - \{x\}$.
 - (c) Sea D_8 el grupo diedral de 8 elementos equipado con su acción natural sobre los vértices de un cuadrado. Muestre que D_8 no es doblemente transitivo.
2. Sea G un grupo de orden 105. Pruebe que si un 3-subgrupo de Sylow de G es normal, entonces G es abeliano.
3. Determine todos los ideales del anillo $\mathbb{Z}[x]/(2, x^3 + 1)$.
4. Pruebe que el siguiente polinomio es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$:

$$f(x) := 2x^7 + 4x^6 + 12x^4 + 6x + 3$$

5. Sea B un anillo conmutativo y A un subanillo con unidad. Un elemento $b \in B$ es llamado **entero** sobre A si existe un polinomio **mónico** $p(x) \in A[x]$ tal que $p(b) = 0$. Diremos que el anillo B es entero sobre A , si todo elemento de B es entero sobre A .

Suponga que B es entero sobre A y que B es un dominio de integridad. Demuestre que A es un cuerpo si y sólo si B lo es.
6. Sea $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y G el grupo de Galois del polinomio f .
 - (a) Calcule el orden de G .
 - (b) Muestre de forma explícita la acción de G sobre las raíces de f , determine un sistema de generadores de G y pruebe que G es isomorfo a D_8 .
 - (c) Calcule los subgrupos de G de orden 4 y sus cuerpos fijos.

1. Sea G un grupo finito que actúa transitivamente sobre un conjunto X con $\#(X) \geq 2$. Pruebe que existe un elemento g en el grupo G tal que $g(x) \neq x$ para todo x perteneciente a X .
2. Sea G un grupo finito, P un p -subgrupo de Sylow de G y H un subgrupo normal de G
 - a) Pruebe que $P \cap H$ es un p -subgrupo de Sylow de H .
 - b) Pruebe que PH/H es un p -subgrupo de Sylow de G/H .
 - c) Suponga que $H < G$ **no** es un subgrupo normal de G . Construya un contraejemplo de a).
3. Sea A un dominio de integridad. Pruebe que A es un dominio de factorización única si y sólo si todo elemento irreducible es un elemento primo y toda familia no vacía de ideales principales (ordenada por contención) satisface la *condición de la cadena ascendente*.
Observación: La *condición de la cadena ascendente* establece, en este caso, que ninguna cadena ascendente de ideales principales puede prolongarse indefinidamente.
4. Pruebe que el polinomio $x^8 + yx^2 - x^2 + y^2 - 1$ es irreducible en el anillo de polinomios $\mathbb{Q}[x, y]$.
5. Sea K/\mathbb{Q} una extensión finita de cuerpos. Pruebe que a lo más hay un número finito de raíces de la unidad en K .
6. Sea F/\mathbb{Q} una extensión de cuerpos de grado 4 que **no** es una extensión de Galois y K la clausura de Galois de F sobre \mathbb{Q} .
 - a) Pruebe que el grupo de Galois $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ es isomorfo a uno de los siguientes grupos:
 - 1) el grupo Simétrico S_4
 - 2) el grupo Alternante A_4
 - 3) el grupo Diédrico de 8 elementos D_8 .
 - b) Demuestre que $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ es isomorfo a D_8 si y sólo si la extensión F/\mathbb{Q} contiene una extensión cuadrática de \mathbb{Q} .

Responder dos problemas de cada sección.

Sección I

1. Muestre que si $f(x)$ es un polinomio irreducible sobre un cuerpo k , entonces todas sus raíces tienen la misma multiplicidad.
2. Sea a un elemento del cuerpo k y $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Supongamos que el polinomio $f(x) = x^p - a$ es reducible sobre k . Pruebe que $f(x)$ tiene una raíz en k .
3. Sea K el cuerpo de descomposición de $x^4 - 2x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Determine el grupo de Galois de K/\mathbb{Q} y describa su acción sobre las raíces.

Sección II

1. Sea $(g, a) \mapsto ga$ una acción del grupo finito G en el conjunto finito A de orden $n > 1$. Sea G_a el estabilizador de $a \in A$ en G y sea $D := \{(a, b) \mid a \neq b\} \subset A \times A$.
 - a) Muestre que $(g, a) \mapsto ga$ define una acción de G_a en $A \setminus \{a\}$ y que $(g, (a, a_1)) \mapsto (ga, ga_1)$ define acciones de G en $A \times A$ y en D .
 - b) Supongamos que el orden de A es al menos 3. Muestre que la acción de G en D es transitiva si y solo si la acción de G_a en $A \setminus \{a\}$ es transitiva para todo $a \in A$. Muestre que en este caso $n(n-1)$ divide $|G|$.
2. Sea G subgrupo del grupo simétrico S_n . Suponga que existe $g \in G$ tal que $\text{sign}(g) = -1$. Muestre que $G \cap A_n$ tiene índice dos en G donde A_n es el grupo alternante.
3. Demuestre que todo grupo G de orden 325 es abeliano.

Sección III

1. Encuentre todos los anillos R conmutativos con 1 que tienen un solo ideal maximal y cuyo grupo de unidades: R^\times es trivial.
2. Sea k un cuerpo y sea R el subconjunto de $k[x]$ que consiste de los polinomios en el que el coeficiente de x es 0. Pruebe que R es un subanillo de $k[x]$. Pruebe que R no es un dominio de factorización única.
3. Sea k un cuerpo x una indeterminada, f, g, h polinomios cuadráticos en $k[x]$. Supongamos que f tiene dos raíces distintas en k , g tiene exactamente una raíz en k y finalmente supongamos que h es irreducible en k . Pruebe que:
 - a) Los anillos $k[x]/(f)$ y $k \oplus k$ son isomorfos.
 - b) Los anillos $k[x]/(g)$ y $k[x]/(x^2)$ son isomorfos.
 - c) los anillos $k[x]/(f)$, $k[x]/(g)$ y $k[x]/(h)$ son todos no isomorfos.

Examen de calificación: álgebra

Enero 2011

6 ejercicios

Tiempo: 3 horas

1.
 - a) Sea $G := S_5$ el grupo simétrico sobre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea H un subgrupo de G de Sylow-2. Demuestre que H es isomorfo a D_8 , el grupo dihedral de 8 elementos.
 - b) Encuentre todos los grupos (modulo isomorfismo) de orden $2p$, donde $p \geq 2$ es un número primo.

2. Sea A un anillo unital conmutativo y sea \mathfrak{P} un ideal primo de A . Sea $\mathfrak{P}A[X]$ el ideal en $A[X]$ generado por \mathfrak{P} . Demuestre que
 - a) $\mathfrak{P}A[X] = \{\sum_i^n a_i X^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathfrak{P}\}$
 - b) $\mathfrak{P}A[X]$ es un ideal primo de $A[X]$.
 - c) Muestre que $\mathfrak{P}A[X]$ no es un ideal maximal de $A[X]$.

3. Sea A un anillo unital conmutativo y sean $\mathfrak{P}_i, i = 1, \dots, k$ ideales primos de A tal que también $\mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_k$ sea ideal primo de A . Demuestre que existe j tal que $\mathfrak{P}_j \subset \mathfrak{P}_i$ para todo i .

4. Sea \mathfrak{P} un ideal primo no cero del anillo de los enteros de Gauss $\mathbb{Z}[i]$. Muestre que el anillo cociente $\mathbb{Z}[i]/\mathfrak{P}$ es un cuerpo finito. Mas aún muestre que los únicos cuerpos que se pueden obtener tienen p ó p^2 elementos, donde $p \in \mathbb{Z}$ es un primo.

5. Encuentre todos los grupos abelianos de orden 8 (modulo isomorfismo). Para cada uno de los siguientes identifique el grupo correspondiente.

- a) $(\mathbb{Z}_{15})^\times$,
- b) $(\mathbb{Z}_{17})^\times / \{\pm 1\}$,
- c) Las raices de $x^8 - 1$ en \mathbb{C} ,
- d) \mathbb{F}_8^+ ,
- e) $(\mathbb{Z}_{16})^\times$.

Aquí \mathbb{F}_8 denota el cuerpo con 8 elementos y \mathbb{F}_8^+ su grupo aditivo subyacente; \mathbb{Z}_n denota el anillo cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y R^\times el grupo de elementos invertibles del anillo R .

6. Sea $D \in \mathbb{Z}$, $D \neq 1$, un entero libre de cuadrados (i.e. no hay $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq \pm 1$ tal que $m^2 | D$) y $a \in \mathbb{Q}$ un racional distinto de 0. Suponga que $\mathbb{Q}(\sqrt{a\sqrt{D}})/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois. Pruebe que $D = -1$ y que $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{a\sqrt{D}})/\mathbb{Q}) \cong K_4$ o C_2 (el grupo Klein 4 o el grupo cíclico con 2 elementos respectivamente.) ¿Para que valores de a el grupo de Galois es K_4 y para cuales C_2 ?

Responder dos problemas de cada sección.

Sección I

1. Sea K una extensión cuadrática de \mathbb{Q} , es decir $[K : \mathbb{Q}] = 2$. Supongamos que $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ es un polinomio irreducible. Pruebe que solo una de las siguientes posibilidades sucede:
 - a) $f(x)$ es irreducible sobre $K[x]$
 - b) $f(x)$ es un producto de dos factores irreducibles en $K[x]$ del mismo grado.
2. Consideremos $\zeta_5 = e^{2\pi i/5} \in \mathbb{C}$.
 - a) Describa el grupo de Galois, $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q})$ y su acción en $\mathbb{Q}(\zeta_5)$.
 - b) Determinando el polinomio minimal de $\cos(2\pi/5)$ encuentre una expresión algebraica para $\cos(2\pi/5)$.
3. Sea $\alpha = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$. Muestre que $\mathbb{Q}(\alpha)$ es una extensión de Galois de grado 4 sobre \mathbb{Q} con grupo de Galois cíclico.

Sección II

1. Sea p un número primo y G un grupo no abeliano de orden p^3
 - a) Pruebe que el centro de G , $Z(G)$ y el conmutador de G coinciden y son de orden p
 - b) Pruebe que $G/Z(G) \cong C_p \times C_p$ donde C_p denota el grupo cíclico con p elementos.
2. Sea G un grupo finito y H un subgrupo normal. Muestre que si P es un p -subgrupo de Sylow de H entonces $G = HN_G(P)$
3. Sea G un grupo finito, $H \trianglelefteq G$ y $N \trianglelefteq H$.
 - a) De un contraejemplo para mostrar que no necesariamente se tiene $N \trianglelefteq G$.
 - b) Supongamos que $|N|$ (el orden de N) y el índice de N en H son relativamente primos. Pruebe que N es el único subgrupo de H de orden $|N|$. Concluya que $N \trianglelefteq G$.

Sección III

1. Sea R un anillo conmutativo unital, $P \subset R$ un ideal primo y suponga que R/P es finito. demuestre que P es un ideal maximal.
2. Considere el ideal principal I generado por el polinomio $x^3 + x + 1$ en el anillo $\mathbb{Z}[x]$. Muestre que I **no** es un ideal maximal. Encuentre un ideal maximal $J \subset \mathbb{Z}[x]$ que contenga I .
3. Sea $I \subset R$ un ideal en un anillo unital y $\pi : R \rightarrow R/I$ el homomorfismo canónico. Suponga que para todo $x \in I$ hay un entero positivo n (que depende de x) tal que $x^n = 0$. Demuestre que $r \in R$ es invertible si y solo si $\pi(r) \in R/I$ es invertible.