Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

# Examen Ingreso Doctorado 2018

15 de Noviembre de 2017

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

---

## Álgebra

1. Sean $A$ y $B$ matrices sobre $\mathbb{C}$ de tamaño $n \times n$ y suponga que $A$ tiene $n$ valores propios distintos. Demuestre que $AB = BA$ si y sólo si existe una matriz invertible $C$ sobre $\mathbb{C}$ tal que $C^{-1}AC$ y $C^{-1}BC$ son matrices diagonales.

2. Sea $G$ un grupo tal que su grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(G)$ es un grupo cíclico. Pruebe que $G$ es un grupo abeliano.

   **Indicación:** Considere el homomorfismo canónico $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$.

3. Sea $\mathbb{Z}[x]$ el anillo de polinomios sobre los enteros $\mathbb{Z}$. Sea $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ un automorfismo de anillo que fija puntualmente los elementos de $\mathbb{Z}$. Demuestre que $\varphi$ tiene la forma $\varphi(x) = ax + b$, donde $a = \pm 1$ y $b \in \mathbb{Z}$.

## Análisis

1. Para $I = [0,1]$, considere una función continua $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Defina la sucesión de funciones $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} f_0(x) &= g(x), \\ f_n(x) &= \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt, \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \ldots. \end{aligned}$$

   Demuestre que la secuencia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0.

2. Sea $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Muestre que para $z, w \in D(0,1)$ se tiene que

$$\left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| < 1.$$

3. Para $n \geq 1$, se define

$$P_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1.$$

   Muestre que $P_n$ tiene una unica raiz real $u_n$, demuestre que la sucesión $u_n$ converge y encontrar su limite.

## Topología

1. Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $F \subseteq X$ un subconjunto finito. Muestre que $F$ es cerrado.

2. Demuestre que el intervalo $[0, 1]$, el círculo $S^1$ y la esfera $S^2$ son espacios homeomorficamente distintos.

3. Sea $X$ un espacio compacto y sea $\sim$ una relacion de equivalencia en $X$. Muestre que el espacio cociente $X/\sim$ es compacto. (*No se requiere que un espacio compacto sea de Hausdorff*).

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

# Examen Ingreso Doctorado 2017

16 de Noviembre de 2016

Tres secciones: álgebra, análisis, topología

Tiempo: $4\frac{1}{2}$ horas

---

## Álgebra

1. Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T$ una transformación lineal de $V$. Muestre que $T^N = 0$ para un entero $N > 0$ si y sólo si existe base $\mathcal{B}$ de $V$ tal que la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ sea triangular superior con ceros en la diagonal.

2. Sea $G$ un subgrupo del grupo símetrico $S_n$ y suponga que $G$ contiene una transposición. Muestre que existe subgrupo $N \leq G$ tal que $|G : N| = 2$.

3. Sea $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Muestre que $3 \in R$ es un elemento irreducible de $R$ pero que no es primo. ¿Es $R$ de factorización única?

4. Sea $f(x) = x^3 + 9x + 6$ y sea $R = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$. Muestre que $\overline{x+1}$ es una unidad en $R$ y encuentre $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tal que la inversa de $\overline{x+1}$ tenga forma $\overline{ax^2 + bx + c}$.

## Análisis

1. Sea $\Omega$ un conjunto abierto conexo no vacio y $f$ una función holomorfa $f \in H(\Omega)$. Sea $P$ la parte real de $f$ y $Q$ la parte imaginaria. Se supone que existen tres reales (no nulos) $a, b$ y $c$ tales que
$$aP(z) + bQ(z) + c = 0, \qquad \forall z \in \Omega.$$
   (a) Mostrar que $P$ y $Q$ satisfacen
$$\begin{cases} a\frac{\partial P}{\partial x} - b\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \\ b\frac{\partial P}{\partial x} + a\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} b\frac{\partial Q}{\partial x} + a\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \\ -a\frac{\partial Q}{\partial x} + b\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
   (b) Deducir que $f$ es constante.

2. Considere la succesión de funciones
$$f_n(x) = 3^n \left[ x^{3^n} - x^{3^{n+1}} \right], \qquad n \geq 1, x \geq 0$$
   Determinar el dominio $D$ donde hay convergencia puntual y determinar si hay o no convergencia uniforme en $D$.

3. Sea $I$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Mostrar que $f$ es convexa si y sólo si para todo $[a, b] \subset I$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, la función definida en $[a, b]$ por $g(x) = f(x) + \alpha x$ es acotada en $[a, b]$ y que $\mathrm{Max}_{x\in[a,b]} g(x) = \mathrm{Max}\,(g(a), g(b))$.
   (*Por definición, se dice que una función $f$ es convexa en un intervalo $I$ si para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$*).

## Topología

1. Demuestre que los siguientes conjuntos son bases de una topología en $\mathbb{R}$. Determine además si los espacios topológicos correspondientes son Hausdorff o conexos o compactos.

   (a) $\mathcal{B}_1$ la colección de intervalos $]a, b[$ con $a < b$.

   (b) $\mathcal{B}_2$ la colección de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ cuyo complemento es finito.

   (c) $\mathcal{B}_3$ la colección de intervalos $]-\infty, b[$ con $b \in \mathbb{R}$.

2. Demuestre que un espacio topológico $X$ es Hausdorff si y solo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$ con la topología producto.

3. Un espacio es llamado totalmente disconexo si todas sus componentes conexas son conjuntos de un elemento. Demuestre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es totalmente disconexo.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

# Examen Ingreso Doctorado 2016

19 de Noviembre de 2015

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

---

## Álgebra

1. Sean $A, B$ matrices cuadradas con entradas de $\mathbb{C}$. Suponiendo que $A$ es invertible, demuestre que $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} B$, donde para cada matriz $C$ se denote el rango de $C$ por $\operatorname{rang} C$.

2. Demuestre que todos los subgrupos de un grupo cíclico son cíclicos. Encuentre todos los subgrupos de $\mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$.

3. Encuentre el polinomio minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

4. Determine si el anillo $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(Z^2 - XY)$ es un dominio de factorización única.

## Análisis

1. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que
$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

2. Identificar la superficie cuádrica en $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1 = 0$ y hallar sus proyecciones ortogonales en los tres planos coordenados OXY, OXZ, OYZ.

3. Encuentre todos los números complejos $z$ con $|z| = 1$ tal que
$$\left| \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} \right| = 1.$$

## Topología

1. Dar una condición necesaria y suficiente para que un espacio topológico $X$ tenga un subconjunto denso de cardinalidad 1 (con un solo punto). Dar un ejemplo de un espacio que verifique esa condición.

2. Dados dos espacios topológicos $X$ e $Y$,

   (a) probar que la proyección $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ es continua y abierta, donde $X \times Y$ tiene la topología producto,

   (b) probar que si $Y$ es compacto, la proyección $p_X$ es cerrada,

   (c) probar que $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $p_1$ es la proyección en la primera componente, no es cerrada.

3. Probar que el espacio proyectivo real es la compactificación de Alexandroff (compactificación por un punto) de la banda de Moebius. *La banda de Moebius es el espacio cociente obtenido de* $(0,1) \times [0,1]$ *identificando los puntos* $(x,0)$ *e* $(1-x,1)$*, para* $x \in (0,1)$*. El espacio proyectivo real es el disco unitario* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ *con los puntos* $(x,y)$*,* $(-x,-y)$ *de la frontera identificados.*

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

# Examen Ingreso Doctorado 2015

19 de Noviembre de 2014

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

---

## Álgebra

1. Sean $A, B$ matrices cuadradas con entradas de $\mathbb{C}$. Suponiendo que $AB = BA$, muestre que $A$ y $B$ tienen un vector propio en comun.

2. Sea $R$ un anillo comutativo unital y sea $\Sigma$ el conjunto de ideales de $R$ cuyos elementos son divisores de cero de $R$. Muestre que $\Sigma$ tiene elementos maximales y que todo elemento maximal es un ideal primo.

3. Sea $G$ el grupo generado por $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= 1 && \text{para todo } i \\ \sigma_i\sigma_j &= \sigma_j\sigma_i && \text{si } |i-j| > 1 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i &= \sigma_j\sigma_i\sigma_j && \text{si } |i-j| = 1. \end{aligned}$$

   Demuestre que $G$ es isomorfo al grupo simétrico $S_n$.

4. Dos matrices $A, B$ cuadradas se dicen similares si existe una matriz $P$ invertible tal que $A = PBP^{-1}$. Sea $A$ una matriz cuadrada con entradas de $\mathbb{C}$. Muestre que $A$ y su traspuesta $A^t$ son similares.

## Análisis

1. Muestre que la función $f(x) := e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ es una función decreciente en $[0, \infty)$ y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Suponga que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Muestre que $z_1, z_2, z_3$ son los vértices de un triángulo equilátero sí y sólo si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

3. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to ]0, \infty[$ una función medible tal que $\int_\Omega f(x)\, dx < \infty$ y sea

$$f_n = \int_\Omega n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) dx,$$

   donde $\alpha > 1$.

   a) Mostrar que para todo $x > 0$, $(1 + x^\alpha) \leq (1 + x)^\alpha$ y que la funcion $\ln(1 + x^\alpha)/x$ es acotada en $]0, \infty[$.

   b) Usando el teorema de Lebesgue, demostrar que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$

## Topología

1. Sean $Y$ e $Z$ dos espacios topológicos disjuntos (es decir $Y \cap Z = \emptyset$) y sea $X = Y \cup Z$ la unión de $Y$ y $Z$. Sea $\mathcal{T}$ la familia de subconjuntos de $X$ dada por $U \in \mathcal{T}$ si y sólo si $U = U_Y \cup U_Z$ donde $U_Y \subset Y$ y $U_Z \subset Z$ son abiertos.

   (a) Demuestre que $\mathcal{T}$ es una topología en $X$ llamada la topología de la unión disjunta.

   (b) Si $Y$ y $Z$ son Hausdorff, ¿es $X = Y \cup Z$ Hausdorff con la topología de la unión disjunta?

   (c) Si $Y$ y $Z$ son conexos, ¿es $X = Y \cup Z$ conexo con la topología de la unión disjunta?

   (d) Si $Y$ y $Z$ son compactos, ¿es $X = Y \cup Z$ compacto con la topología de la unión disjunta?

2. Sea $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R}$ y sea $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (A \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$. Demuestre que $X$ es arco conexo pero no localmente arco conexo (recuerdese que un espacio $X$ es localmente arco conexo si, para todo $x \in X$, cada entorno de $x \in X$ contiene un entorno de $x$ arco conexo).

3. Sea $X$ un espacio Hausdorff y sea $K_i$, $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, una familia de subespacios compactos. Demuestre que si $U$ es un abierto que contiene a $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ entonces existe un conjunto finito de compactos $\{K_1, K_2 \dots, K_\ell\}$ tal que $U$ contiene a $\bigcap_{i=1}^{\ell} K_i$.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

# Examen Ingreso Doctorado 2014

18 de Noviembre de 2013

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

---

## Álgebra

1. Sea $A$ una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ y sean $v_1, v_2 \ldots, v_k$ vectores propios de $A$ a valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Suponiendo que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, muestre que los $v_i$ son linealmente independientes.

2. Sea $R$ un anillo y sea $\Sigma$ el conjunto de ideales de $R$ cuyos elementos son divisores de cero de $R$. Muestre que $\Sigma$ tiene elementos maximales y que todo elemento maximal es un ideal primo.

## Análisis

1. Muestre que la función $f(x) := e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ es una función decreciente en $[0, \infty)$ y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Suponga que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Muestre que $z_1, z_2, z_3$ son los vértices de un triángulo equilátero sí y sólo si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

3. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to ]0, \infty[$ una funcion medible tal que $\int_\Omega f(x)\, dx < \infty$ y sea

$$f_n = \int_\Omega n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) dx,$$

donde $\alpha > 1$.

a) Mostrar que para todo $x > 0$, $(1 + x^\alpha) \leq (1 + x)^\alpha$ y que la funcion $\ln(1 + x^\alpha)/x$ es acotada en $]0, \infty[$.

b) Usando el teorema de Lebesgue, demostrar que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$

## Topología

(a) Sea $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||(x_1, \ldots, x_{n+1})|| = 1\}$ y sea $E(S^n) := \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$ el ecuador de $S^n$.

  i. Probar que el cociente de $S^n$ por $E(S^n)$es homeomorfo al producto wedge de dos copias de $S^n$.

  ii. Sea $H(S^n) := \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$. Demostrar que el cociente de $H(S^n)$ por su borde $\partial(H(S^n))$ es homeomorfo a $S^n$.

(b) Sea $\mathbb{R}_l$ el conjunto de números reales con la topología cuya base de abiertos es:

$$\mathcal{B} := \{[a, b) \mid a < b\}.$$

Considere la recta $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l \mid x = -y\}$ en $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$, con la topología inducida por la topología producto. Probar que $L$ es unión de dos cerrados disjuntos.

(c) Sea $p : E \longrightarrow B$ un cubrimiento, con $B$ conexo. Probar que si $|p^{-1}(b_o)| = k$ para algún $b_o \in B$, entonces $|p^{-1}(b)| = k$ para todo $b \in B$.

(d) Probar que:

  i. El espacio $R_l$ del ejercicio 2) no es metrizable.

  ii. Probar que el conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$ con la topología inducida por la topología dada por el orden lexicográfico de $\mathbb{R}^2$ es metrizable, y por lo tanto normal. Qué sucede si consideramos $[0, 1] \times [0, 1]$ con la topología dada por el orden lexicográfico?

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

# Examen de Ingreso al Doctorado–Diciembre 2012

Tres secciones: álgebra, análisis y topología
Tiempo: 3 horas

---

**Algebra**

1. Sea $A$ una matriz real $n \times n$. Muestre que $A^t A$ y $A$ tienen el mismo rango (*Indicación:* considere primero la nulidad de las matrices).

2. Sea $G$ un grupo finito, y sea $N$ el subgrupo de $G$ generado por el subconjunto $\{ g^2 \mid g \in G\}$. Muestre que $N$ es un subgrupo normal de $G$ y que $N$ contiene al subgrupo comutador $[G, G]$ de $G$.

3. Sea $R$ un dominio principal y sean $A, B \neq 0$ ideales de $R$. Muestre que $AB = A \cap B$ si y solo si $A + B = R$.

4. Muestre que cada cuerpo algebraicamente cerrado tiene número infinito de elementos.

**Análisis**

Sea

$$f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - (2x + n)$$

donde $n$ es un entero positivo.

1. Demuestre que la ecuacion $f_n(x) = 0$ admite una unica solucion en $[0, 1[$ que se denota por $x_n$.

2. Mostrar que $f_n(x) > f_{n+1}(x)$, y que $f_{n+1}(x_n) < 0$ y deducir que la sucesion $x_n$ es creciente y convergente.

3. Calcular $f_n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ y deducir el valor $\lim_{n\to\infty} x_n$

**Topología**

1. Probar que toda aplicación continua $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es constante.

2. 
   *a*) Probar que todo espacio conexo por arcos es conexo.
   *b*) Dar un ejemplo de un espacio conexo que no es conexo por arcos.

3. Probar que el cociente $S^1 \times [0, 1] \sim$ es homeomorfo a $S^2$, donde

$$((x, y), t) \sim ((x', y'), t'), \text{ si, y solo si, } t = t' = 1, \text{ o } t = t' = 0.$$

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

# Examen Ingreso Doctorado 2012

Diciembre 2011

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

---

## Algebra

1. Sean $G$ un grupo finito y $\sigma$ un automorfismo de $G$.
   (a) Demuestre que si $\sigma(x) = x^{-1}$ para cada $x \in G$, entonces $G$ es abeliano.
   (b) Demuestre que si $\sigma^2 = 1$ y $x \neq \sigma(x)$ para cada $x \in G$ con $x \neq 1$, entonces
   $$G = \{x^{-1}\sigma(x) \mid x \in G\}.$$
   (c) Suponiendo (b), demuestre que $G$ es abeliano.
2. Sea $F$ un cuerpo finito con $q$ elementos. Calcule el número de matrices 2 por 2 invertibles con elementos en $F$, y el número de matrices 2 por 2 con elementos en $F$ y determinante igual a 1.
3. Sea $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2)$. Demuestre que $R$ es un dominio. Sea $F$ el cuerpo cuociente de $R$. ¿Un polinomio mónico $f(t) \in R[t]$ puede tener ceros en $F \setminus R$? Justifique su respuesta.

## Análisis (resolver 2 de 3)

1. Usando una seria (u otra herramienta) adecuada, calcule los tres primeros dígitos $a, b, c$ de la presentación decimal
   $$\ln 2 = 0.abc\ldots$$
   Se requiere una justificación analítica para su respuesta. No se permite el uso de calculadora en ninguna etapa de su trabajo.
2. Las funciones $v, w : [0, 1] \to \mathbb{R}$ son de clase $C^1$, tienen sus derivadas estrictamente positivas en $[0, 1]$ y son tales que
   $$v(0) = w(0), \quad v(1) = w(1).$$
   Demuestre que existen puntos $x_1 \leq x_2$ en $[0, 1]$ tales que
   $$v(x_1) = w(x_2), \quad v'(x_1) = w'(x_2).$$

3. Para $x > -1$ considere la sucesión de funciones

$$x, \frac{1}{1+x}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}, \ldots, f_n(x), \frac{1}{1+f_n(x)}, \ldots$$

Investigue la convergencia de esta sucesión y caracterice los subconjuntos de $(-1, \infty)$ donde esta convergencia es uniforme.

## Topología

1. Sea $X$ el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de los segmentos de recta $L_n$ de $(0,0)$ a $(1, 1/n)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ junto con el segmento límite $L_\infty$ de $(0,0)$ a $(1,0)$. Se define una topología $\mathcal{T}$ sobre $X$ en la cual $O$ es abierto en $X$ ssi $O \cap L_n$ es abierto en $L_n$ para todo $n$ (incluyendo $n = \infty$), donde cada $L_n \subset \mathbb{R}^2$ tiene la topología del subespacio. Demostrar que $\mathcal{T}$ es una topología. Demostrar que $X$ no es compacto en la topología $\mathcal{T}$. ¿Es X compacto como subespacio de $\mathbb{R}^2$?

2. Encontrar aplicaciones cocientes de $D^2 \to S^1$, de $S^2 \to D^2$ y de $S^2 \to S^1$. *Indicación: no se necesitan aplicaciones explícitas. Basta con una buena descripción geométrica.*

3. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ la clausura del grafo de $\mathrm{sen}(1/x)$ para $x > 0$. Encontrar las componentes conexas de $X$. Justificar su respuesta.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

# Examen Ingreso Doctorado

Mayo 2011

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

---

## Algebra

1. Sea $R$ un dominio de integridad que contiene un cuerpo $F$ como subanillo. Suponga que $R$ tiene dimensión finita como espacio vectorial sobre $F$. Pruebe que $R$ es un cuerpo.
2. Sea $Z(G)$ el centro de $G$. Demuestre que no existe grupo $G$ tal que $G/Z(G)$ es isomorfo al grupo cíclico de orden 3. *Indicación: demuestre todas sus afirmaciones!*
3. Encontrar todos los ideales del anillo $\mathbb{Z}[x]/(2, x^3+1)$.

## Análisis

1. Sea $f$ una funcion definida en $\mathbb{R}$, continua en 0 y tal que $f(x) = f(2x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $f$ es constante.
2. Sea la serie $\sum u_n$ con termino general
$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+k)!}$$
donde $k \in \mathbb{N}$. Estudiar la naturaleza de la serie en termino del parametro $k$.
3. Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas en $]0, \infty[$ por
$$f(x) = \ln(e^x - 1), \qquad g(x) = \frac{x\, e^x}{1 - e^x}$$
Demuestre que existe un unico $\alpha \in ]0, \infty[$ tal que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

## Topología

1. Sea $I = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} | \, 0 \leq x \leq 1\}$. Considere el cuadrado ordenado $I_0^2$, es decir, el conjunto $I \times I$ con la topología inducida por el orden del diccionario. Determine la clausura de los siguientes conjuntos:

$$A = (1/2, 1) \times \{0\} \qquad B = (\mathbb{Q} \cap I) \times \{1/2\}.$$

2. La gráfica de una función $f : X \to Y$ es el conjunto $\big\{\big(x, f(x)\big) \,\big|\, x \in X\big\}$. Demuestre que si $f$ es una función continua, entonces la gráfica de $f$, como subespacio de $X \times Y$, es homeomorfa a $X$.

3. Considere el conjunto $X$ dotado de la topología Fort en $p$, lo que significa que un subconjunto $U$ en $X$ es abierto si, y sólo si, o bien $p \notin U$ o bien $X \setminus U$ es finito. Compruebe lo siguiente:

    a) $X$ es disconexo;

    b) $X$ es compacto.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

# Examen Ingreso Doctorado 2011

Enero 2011

Tres secciones: álgebra, análisis y topología

Tiempo: 3 horas

---

## Algebra

1. Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $K$. Sean $A, B$ transformaciones lineales de $V$, tales que $A^2 = B^2 = 0$ y $AB + BA = I$, donde $I$ denota la identidad de $V$. Sean $N_A$ y $N_B$ los nucleos de $A$ y $B$ respectivamente.

   a) Pruebe que $N_A = AN_B$, $N_B = BN_A$ y $V = N_A \oplus N_B$.

   b) Pruebe que la dimensión de $V$ es par.

   c) Pruebe que si la dimensión de $V$ es 2 entonces $V$ posee una base con respecto a la cual $A$ y $B$ están representadas por las matrices $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ respectivamente.

2. Sea $K$ un cuerpo y sean $K[X]$, $K[X, Y]$ los anillos de polinomios en una y dos variables respectivamente. Si $I$ es un ideal de $K[X, Y]$ se escribe $\overline{P(X, Y)}$ por la clase de $P(X, Y) \in K[X, Y]$ en $K[X, Y]/I$ y si $Q(X, Y) \in K[X, Y]$ se escribe $(Q(X, Y))$ por el ideal de $K[X, Y]$ generado por $Q(X, Y)$.

   a) Pruebe que la aplicación $\varphi : K[X] \to K[X, Y]/(X^2 - Y)$ dada por $f(X) \mapsto \overline{f(X)}$ es un isomorfismo de anillos.

   b) Determine si los anillos $K[X, Y]/(X^2 - Y)$ y $K[X, Y]/(X^2 - Y^2)$ son isomorfos.

## Análisis

1. Sea $P(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$. Demuestre que $P$ admite al menos una raíz en $[0, 1]$.

2. Se considera la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Demuestre que $f$ no es de clase $C^1$.

3. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right]$$

4. Sea $f$ una función definida en $[a, b]$ y derivable en $[a, b]$ tal que $f(a) = f(b)$ y $f'(a) = 0$. Demuestre que $\exists c \in ]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

## Topología

1. Demostrar que no hay biyección continua de $S^1$ sobre un subespacio de $\mathbb{R}$.

2. Un espacio $X$ se dice *regular* si para todo punto $x \in X$ y todo conjunto cerrado $C$ que no contiene a $x$, existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ de $X$ tales que $C \subseteq U$ y $x \in V$. Demostrar que un espacio compacto y de Hausdorff es regular.

3. Sea $X = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Se define la relación de equivalencia sobre los puntos de $X$ siguiente:

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \quad \text{si} \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

   Sea $Y$ la colección de clases de equivalencia en la topología cociente. ¿A que espacio conocido es homeomorfo Y? Justifique bien su respuesta.

# Examen de admisión

## Topología

**(1)** Sea $Y$ un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ continuas. Pruebe que el conjunto $\{x \mid f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en $X$.

**(2)** Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua. Demuestre que existe un punto $x$ tal que $f(x) = x$.

## Análisis

**(1)** Demuestre que la ecuación $x = \cos(x^2)$ tiene una solución en el intervalo $[0, \sqrt{\pi}]$.

**(2)** Verifique si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ es convergente o divergente.

**(3)** Calcule el volumen de la región

$$\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ z \geq (x^2 + y^2)^{1/4}\}.$$

## Álgebra

**(1)** Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Demuestre la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(i) existe un entero $N \geq 1$ tal que $A^N = 0$

(ii) para todo entero $k \geq 1$, la traza de $A^k$ es nula

*Indicación: Usar los valores propios de $A$*

**(2)** Sea $k$ un cuerpo y sean $X$, $Y$, $Z$, $T$ variables. Sea $I = \langle X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3 \rangle \subset k[X, Y, Z]$ el ideal de $k[X, Y, Z]$ generado por los polinomios $X^2 - Y^3$ y $Y^2 - Z^3$. Demuestre que la aplicación $\phi : k[X, Y, Z] \to k[T]$ dada por $\phi(f(X, Y, Z)) = f(T^9, T^6, T^4)$ es un homomorphismo con núcleo $\mathrm{Ker}(\phi) = I$. ¿Es $k[X, Y, Z]/I$ isomorfo a $k[T]$?

*Indicación: Todo polinomio $f \in k[X, Y, Z]$ se puede escribir de la forma*

$$f = a + Xb + Yc + XYd + g$$

*con $a, b, c, d \in k[Z]$ y $g \in I$.*

Universidad de Talca 20 de Marzo de 2008

# Examen Ingreso a Doctorado

**Instrucciones:**

1.- Este examen consta de 3 partes: Algebra, Topología, Análisis, en cada una de estas partes hay 4 preguntas. Contestar solo 2 preguntas en cada parte.

2.- Tiempo total para el examen responder 3 horas.

## Sección Topología

**(1)** Sea $X$ un espacio topológico. Se dice que $D$ es denso en $X$ si su clausura, $\overline{D} = X$.
a) Si $X$ es el único subconjunto denso de $X$, cuál es la topología sobre X?
b) Encontrar $A, D$ y $X$ tal que $D$ es denso en el espacio topológico $X$, pero $D \cap A$ no es denso en $A \subseteq X$.

**(2)** Sea $\mathfrak{T}$ la topología sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cuya base está dada por las rectas del tipo $y = 2x+k$, con $k \in \mathbb{R}$. Demostrar que $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathfrak{T})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_1) \times (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_2)$ para ciertas topologías $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$.

**(3)** El grafo de una función $f : X \to Y$ es el conjunto de puntos de la forma $\big(x, f(x)\big)$ para $x \in X$. Demostrar que si $f$ es una función continua, entonces el grafo de $f$ (como subespacio de $X \times Y$) es homeomorfo a $X$.

**(4)** Mostrar que no hay biyección continua de $S^1$ sobre un subespacio de $\mathbb{R}$.

# Parte Algebra

**(1)** Demuestre que el grupo aditivo $\mathbb{Q}$ de los números racionales no puede estar generado por un número finito de elementos.

**(2)** Demuestre que el anillo $\mathbb{C}[X,Y]/(X^3 - Y^2)$ no es principal.
Indicación: Considere el homomorfismo $\mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{C}[T],\ X \mapsto T^2, Y \mapsto T^3$.

**(3)** Sea $\alpha$ una raíz del polinomio irreducible $X^3 - 3x + 4 \in \mathbb{Q}[X]$. Sea $\mathbb{Q}(\alpha)$ el cuerpo que genera esta raíz. Calcular explicitamente el inverso de $1+\alpha+\alpha^2$ en $\mathbb{Q}[\alpha]$ como $a+b\alpha+c\alpha^2$ con $a,b,c \in \mathbb{Q}$.

**(4)** Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule $A^{100}$.

# Parte Análisis

**(1)** Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales con $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Definamos $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} s_n = a$.

**(2)** Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función continua con $f(0) = 0$. Supongamos que $f$ es diferenciable en $(0,\infty)$ con una derivada $f'$ monótonamente creciente. Demuestre que la función $f(x)/x$, $x \in (0,\infty)$ es creciente.

**(3)** Sea $f : [0,\infty) \to (0,1]$ definida por $f(x) = (x+1)\exp(-x)$. Demuestre que $f$ es biyectiva y calcule $(f^{-1})'(2/e)$ (donde $f^{-1}$ es la función inversa).

**(4)** **(a)** Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 = 4$ y $x + y + z = 1$.

**(b)**Calcule $\int\int_A (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, donde $A$ es la región acotada por la curva $x^2 + y^2 - 2y = 0$.