Análisis

1. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu(X) = 1$. Sea f una función medible en X tal que

$$\mu\left(f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{(k+1)}{2^n}\right]\right)\right) = \frac{1}{2^n}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $k = 0, ..., 2^n - 1$. Muestre que

$$\int_X f^2 d\mu = \frac{1}{3}.$$

2. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ considere $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty[$ definida por $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Describir todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que convierten el par $(\mathbb{R}, d)$

   a) en un espacio métrico,

   b) en un espacio métrico completo.

3. Sea $f \in L^2(]0, 1[)$ con valor medio nulo, i. e. $\int_0^1 f dx = 0$ y sea $H = H^1(]0, 1[)$. Para $u, v \in H$ se define

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v'\, dx + \left(\int_0^1 u dx\right)\left(\int_0^1 v dx\right)$$

   a) Demuestre que existe un unico $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \int_0^1 f v dx, \qquad \forall v \in H.$$

   Hint: Se podria usar la desigualdad de Poincaré-Wirtinger: asumiendo que $1 \leq p \leq \infty$ y que Ω es a subconjunto abierto acotado y conexo del espacio euclídeo $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$ con un dominio de Lipschitz. Entonces existe una constante C, dependiente sólo de Ω y p, tal que para una función u en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se tiene

$$||u - u_\Omega||_{L^p(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \qquad u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u.$$

   b) Demuestre que u satisface

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \text{for} \quad x \in H \\ u'(0) = u'(1) = 0 \\ \int_0^1 u(x)dx = 0. \end{cases}.$$

Hint: Se podria usar la formula de integracion por partes. Sean $u, v \in H^1(I)$ donde I es un intervalo

$$\int_a^b u'\, v\, dx = -\int_a^b u\, v'\, dx + (uv)(b) - (uv)(a), \qquad \forall [a,b] \subset \bar{I}.$$

4. *a*) Sea $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, $z = (x,y)$. Muestre que

$$|f(0)| \leq \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \left(\int_{D(0,R)} |f(x,y)|^2 \, dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hint: Justifique que $f^2 : D(0,R) \to \mathbb{C}$ es holomorfa y luego use la fórmula integral de Cauchy para obtener que

$$f(0)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(se^{i\theta}) d\theta, \tag{$\star$}$$

para cualquier $0 < s < R$. Multiplique ($\star$) por s e integre para $s \in (0,R)$.

b) Use lo anterior para demostrar el siguiente
Teorema. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $K \subseteq \Omega$ un compacto. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Muestre que existe una constante $C > 0$ (que depende de Ω y K, pero no de f) tal que*

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C \left(\int_{\Omega} |f(x,y)|^2 \, dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Analysis

1. Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue medible. Para cada conjunto Boreliano B, definimos
$$\mu(B) = \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}).$$
Muestre que μ es una medida y que se cumple
$$\int_{\mathbb{R}} g(y) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} g \circ f(x) d\lambda(x)$$

2. Use el teorema de los residuos para calcular la integral
$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1 - x^2} dx.$$
Ayuda: Use un camino que consiste de una semi-circunferencia centrada en 0 *y una parte del eje real obviando las singularidades de la función en* $0, \pm 1$ *con semi circunferencias.*

3. Se considera la sucesion de funciones f_n definida por
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \cos^n(x) \sin(x)$$
Mostar que f_n converge uniformemente hacia la funcion nula en $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}$ un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert H. Muestre que $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge en H sí y sólo sí la serie $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2$ es convergente. Concluya que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ es convergente.
   b) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ es débilmente convergente.
   c) $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2$ converge.

Análisis

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. (1.5 puntos) Muestre que si X es un espacio de Banach infinito dimensional, entonces X tiene dimensión (en el sentido de base de Hamel) no numerable. Ayuda: Puede usar el Teorema de Baire.

2. (1.5 puntos) Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in L^1(\mu)$.

   a) Sea $A_n := \{x \in X : \frac{1}{n} < |f(x)| \leq n\}$. Muestre que
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f| d\mu = \int_X |f| d\mu.$$

   b) Deduzca que para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$ tal que $\sup_{x \in A} |f(x)| < \infty$ (μ-ctp) y
   $$\int_{X \setminus A} |f| < \varepsilon.$$

3. (1.5 puntos) Sea $p(z)$ un polinomio de grado n y sea $R > 0$ suficientemente grande de modo que p nunca se anula en $\{z : |z| \geq R\}$. Sea $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Determine el valor de la integral
   $$\int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)} dz.$$

4. (1.5 puntos) Considere el espacio $c_0 := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ con la norma $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Defina el funcional lineal $x' : c_0 \to \mathbb{R}$ por
   $$x'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}},$$
   para cada $x = (x_n)_n \in c_0$.

   a) Pruebe que x' es un funcional continuo y que $\|x'\| = 2$.

   b) Pruebe que $x' \in c_0'$ no alcanza su norma en la bola unitaria cerrada, esto es, no existe $x \in c_0$ con $\|x\|_\infty \leq 1$ tal que $x'(x) = \|x'\| = 2$.

Análisis

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. (1.5 puntos) Muestre que la sucesión $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f_n(t) = \frac{t^2}{t^2 + (nt - 1)^2},$$
converge puntualmente, pero no uniformemente en $[0, 1]$.

2. (1.5 puntos) Encuentre
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

3. (1.5 puntos) Sea f una función entera y suponga que existe una constante M, un $R > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo $|z| > R$. Muestre que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

4. (1.5 puntos) Sea $f(t) = 1 - t^2$, si $|t| < 1$ y 0 en otro caso. Encuentre $\hat{f}$ y use este resultado para hallar el valor de
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t - t\cos t}{t^3} dt.$$
Recuerde que la Transformada de Fourier de f se define por $\hat{f}(s) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ist}dt$, $s \in \mathbb{R}$.

Análsis

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(1) = 0$. Muestre que la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n g(x)$ converge uniformemente a la función nula.

2. Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x)(1 - n|x|)dx = f(0).$$

3. Use el teorema de los residuos para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5-1} dx = \frac{4\pi}{5} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

4. Sean $f \in L^1([-\pi,\pi])$ y a_n, b_n sus coeficientes de Fourier.

   a) Muestre que para todo $t \in [0, 2\pi]$,

   $$\int_0^t \left(f(s) - \frac{1}{2}a_0\right) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nt + b_n(1-\cos nt)}{n}.$$

   b) Sea $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Muestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ es convergente.

   c) Concluya que no existe $f \in L^1([-\pi,\pi])$ que tenga por serie de Fourier a

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nt}{\ln n}.$$

Análsis

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Sea $I = [0, 1]$ y sea $g : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Defina la funciones $f_n : I \to \mathbb{R}$ como
$$\begin{aligned} f_0(x) &= g(x), \\ f_n(x) &= \int_0^x f_{n-1}(x)dx, \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \ldots. \end{aligned}$$
Demuestre que la secuencia $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0.
2. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Muestre que
$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x + h) - f(x)|dx = 0.$$
3. Use el teorema de los residuos para mostrar que
$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3}, \quad a > 0.$$
4. Para $t \in (0, 2\pi)$ defina la función f por $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$.
   a) Muestre que
   $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} \quad \text{para} \quad 0 < t < 2\pi.$$
   b) Determine el valor de las sumas
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^3}.$$

Análsis

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Sea $f_n : A \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones tal que $\sup_{x\in A}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)\right) < \infty$. Muestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ converge uniformemente en A.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible y
$$A_n := \{x \in \Omega : n - 1 \leq |f(x)| < n\}, n = 1, 2, ...$$
Muestre que $\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty$ para $1 \leq p < \infty$ sí y sólo sí $\sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(A_n) < \infty$.

3. Se considera una función f analítica en $\mathbb{C}$ y tal que su restricción sobre el semieje real positivo es acotada: $|f(x)| \leq C$ para todos $x \geq 0$. Además, existe el limite
$$\lim_{t\to+\infty} f(e^{t(1+i)}) = 0.$$
Encuentre todas $f(z)$ con estas propiedades.

4. En $\mathbb{R}$ defina $f(t) = 1$ si $|t| < 1$ y 0 en otro caso. Muestre que
$$\sqrt{2\pi}(f * f)(t) = \begin{cases} t + 2, & \text{si } -2 < t < 0, \\ 2 - t, & \text{si } 0 < t < 2, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$
Concluya que
$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 t}{t^3} dt = \frac{3\pi}{8}.$$

Análsis

Instrucciones: Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
Tiempo: 3 horas

1. Muestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ converge uniformemente en el conjunto $\{x : 1/2 \leq |x| \leq 2\}$.

2. Sea $\{f_n\} \subset (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ una sucesión de funciones medibles tales que $f_n \to f$ m-c.t.p. Muestre que
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \sin(f_n(x))dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \sin(f(x))dx.$$

3. Suponga que $f \not\equiv 0$ es analítica en $\mathbb{C}$ y satisface la desigualdad $|f(z)| \leq |p_m(z)|,\ z \in \mathbb{C}$, donde $p_m(z)$ es un polinomio (con coeficientes complejos) de grado $m \geq 1$. Investigue cuantas raices complejas (contando su multiplicidad) tiene la ecuación $f(z) = 1$. *Hint: Considere* $\phi(z) = f(z)/p_m(z)$ *y analice sus propiedades de analiticidad.*

4. Sean $a, b > 0$. Utilice el teorema de inversión de la transformada de Fourier para mostrar que
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a + b)}.$$

Analisis

Ejercicio 1 |

Para $x \in [0,1]$, se define

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(x+1)}$$

1. Demuestre que $\sum_n f_n(x)$ converge simplemente.
2. Demuestre que $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente.
3. Demuestre que $\sum_n f_n(x)$ no converge normalmente.

Ejercicio 2 |

Determinar el siguiente limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{1+\cos(x)^{2n}} e^{-|x|}\, dx$$

Ejercicio 3 |

Sean α, β and γ tres reales tales que $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$. Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha + \beta\sin(\theta) + \gamma\cos(\theta)}$$

Ejercicio 4 |

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Defina la transformada Coseno de f por

$$\mathcal{C}(f)(s) := \int_0^\infty f(t)\cos(st)dm(t), \quad s \in \mathbb{R}.$$

a) Encuentre la transformada coseno de $f_\alpha(t) := e^{-\alpha|t|}$, donde $\alpha > 0$.

b) Concluya que si $\beta > 0$, entonces

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\beta t)}{t^2+\alpha^2} dt = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}.$$

Analisis

Ejercicio 1 |

Se considera la siguiente serie de funciones

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$$

Estudiar la convergencia uniforme en $[a, \infty[$ con $a > 0$.

Ejercicio 2 |

Determinar el siguiente limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)}\, dx$$

Ejercicio 3 |

Sean α, β and γ tres reales tales que $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$. Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha + \beta\sin(\theta) + \gamma\cos(\theta)}$$

Ejercicio 4 |

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Muestre que los coeficientes de Fourier de f pueden escribirse como

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(t - \frac{\pi}{k})] \cos ktdt,$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(t - \frac{\pi}{k})] \sin ktdt.$$

Deduzca que si f satisface la condición de tipo Hölder de orden α, es decir $|f(t) - f(s)| \leq L|t-s|^\alpha$, entonces

$$|a_k| \leq L\frac{\pi^\alpha}{k^\alpha}, \quad |b_k| \leq L\frac{\pi^\alpha}{k^\alpha}.$$

Universidad de Talca 12 de Agosto de 2011

Examen de calificación: Analisis

Nombre:____

1	2	3	4a	4b	5	Σ

Ejercicio 1 (10 puntos) Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y sea

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^x + \ln n}.$$

Demuestre que la serie $\sum u_n(x)$ es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2 (10 puntos)

(1) Demuestre que para todo $x \in [1, \infty[$ se tiene

$$\ln(1+x) \leq x$$

(2) Determinar si existe el siguiente limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x^3} dx$$

Ejercicio 3 (10 puntos) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funcion de clase C^1 tal que $f(0) = 0$ y tal que $0 \leq f'(t) \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$. Demuestre que

$$\int_0^1 f(x)^3\, dx \leq \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2$$

Hint: Se podria considerar las funciones $\varphi(x) = \int_0^x f(t)^3\, dt$ y $\psi(x) = \left(\int_0^x f(t)\, dt\right)^2$ y mostrar que $\varphi(1) \leq \psi(1)$

Ejercicio 4a (10 puntos) Suponga que c es un parametro positivo. Hallar usando el teorema de los residuos la transformada de Fourier de

$$f_c(t) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 4b (10 puntos) Para c_1, c_2 positivos y f_c definida en el Ejercicio 5a, calcule la convolución $f_{c_1} * f_{c_2}$.

Ejercicio 5 (10 puntos) Represente la función $f(x) = x,\ x \in [0, \pi]$, por su serie de Fourier en $\{\sin kx\}$ (o sea, encuentre $f(x) \sim \sum b_k \sin kx$) y por su serie de Fourier en $\{\cos kx\}$ (o sea, encuentre $f(x) \sim \sum a_k \cos kx$). Luego halle las sumas de ambas series para todo $x \in \mathbb{R}$ y grafique las funciones periodicas correspondientes.

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Examen de calificación: análisis

Enero 2011

6 ejercicios

Tiempo: 3 horas

Ejercicio 1

Sean u_n y v_n dos sucesiones reales tales que $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty}(e^{u_n} + e^{v_n}) = 2$. Demuestre que las sucesiones u_n y v_n convergen y precisar sus limites respectivas.

Ejercicio 2

Estudiar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ de la siguiente sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$$

Ejercicio 3

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva en $[0,1]$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 (f(t))^n \, dt \right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[0,1]} f(t).$$

Ejercicio 4

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Calcular el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (f(t))^n \, dt$$

Ejercicio 5

Determinar los valores de las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Ayuda: Se podría considerar una función continua $2\pi-$*periódica e igual a* t^2 *en* $]-\pi,\pi[$.

Ejercicio 6

Usando el teorema de los residuos, calcular

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin(t)}, \qquad a > 1$$