


Contributions to the traveling waves theory for asymmetric monostable equations¹

Carlos Gómez.

Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca

2013

¹Thesis supported by CONICYT “Becas de Doctorado en Chile” 

Un ejemplo: Un modelo asimétrico monostable.

Se denota por $u(t, a, x)$ la densidad de población en la locación x , en tiempo ($t \geq 0$) y de edad a ($0 \leq a < \infty$). El número total de individuos adultos (a) y juveniles (j) es:

$$u_a(t, x) = \int_h^{+\infty} u(t, a, x) da, \quad u_j(t, x) = \int_0^h u(t, a, x) da,$$

donde h denota la edad de maduración.

Un ejemplo: Un modelo asimétrico monostable.

La población juvenil, sujeta a movimiento por advección, satisface

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = d_j \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v_j \frac{\partial u}{\partial x} - \mu_j u, \quad a < h,$$

donde d_j y μ_j son tasa de difusión y muerte resp. y v_j es velocidad de advección. Y la población adulta satisface

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = d_a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu_a u, \quad a > h.$$

Y de la definición de $u_a(t, x)$ obtenemos

$$\frac{\partial u_a(t, x)}{\partial t} = u(t, h, x) + d_a \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - \mu_a u_a(t, x). \quad (1)$$

Un ejemplo: Un modelo asimétrico monostable.

Es lógico suponer que $u(t, 0, x) = g(u_a(t, x))$, donde $g(u)$ es la función de nacimiento de la especie. Entonces la ecuación (1) queda

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = d_a \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} - \mu_a u_a + \frac{e^{-\mu_j h}}{2\sqrt{\pi d_j h}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u_a(t-h, y)) e^{-(x-y+v_j h)^2/(4d_j h)} dy,$$

la cual, para un núcleo asimétrico K , tiene la forma:

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) - f(u(t, x)) + \int_{\mathbb{R}} K(x-y) g(u(t-h, y)) dy, u \geq 0, \quad (2)$$

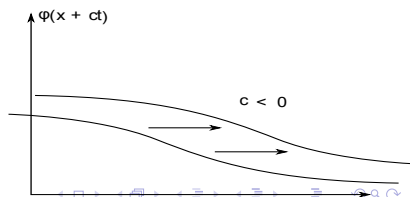
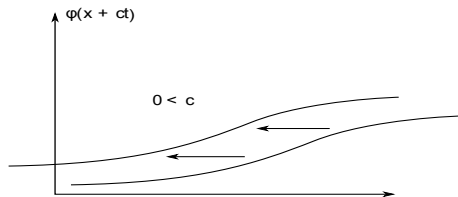
Ondas viajeras

Definición

Las soluciones clásicas positivas de la ecuación (2) de la forma

$$u(t, x) = \phi(x + ct),$$

donde el perfil ϕ es una función acotada tal que $\phi(-\infty) = 0$ o bien $\phi(+\infty) = 0$, son dichas semi-wavefronts. El número c es dicho velocidad de propagación de la onda.



Ecuaciones diferenciales para perfiles de ondas

Consideremos la ecuación integro-diferencial, asociada a la ecuación (2),

$$y''(t) - cy'(t) - f(y(t)) + \int_{\mathbb{R}} K(s)g(y(t-s-ch))ds = 0, \quad (3)$$

con solución $\phi(t)$. Entonces el perfil ϕ satisface

$$\phi(t) = \frac{1}{\sigma(c)} \left(\int_{-\infty}^t e^{\nu(t-s)} (\mathcal{G}\phi)(s) ds + \int_t^{+\infty} e^{\mu(t-s)} (\mathcal{G}\phi)(s) ds \right),$$

donde $\sigma(c)$ es una constante y

$$(\mathcal{G}\phi)(s) := \int_{\mathbb{R}} k_h(s)g(\phi(t-s))ds + f_\beta(\phi(t)),$$

Ecuaciones diferenciales para perfiles de ondas

Mediante la elección de un núcleo adecuado $K(s, \tau)$ y la función no lineal $g(s, \tau)$, el perfil $\phi(t)$ satisface la siguiente ecuación de convolución no lineal

$$\phi(t) = \int_X d\mu(\tau) \int_{\mathbb{R}} K(s, \tau) g(\phi(t-s), \tau) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Condiciones

- (X, μ) denotará un espacio medible con medida finita μ .
- El núcleo $K : \mathbb{R} \times X \rightarrow [0, +\infty)$ será integrable en $\mathbb{R} \times X$ con $\int_{\mathbb{R}} K(s, \tau) ds > 0$, $\tau \in X$, pero puede ser asimétrico con respecto a la primera variable.
- La función de nacimiento $g : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(0, \tau) \equiv 0$, es medible y continua en φ para cada $\tau \in X$ fijo.

Generalización de la teoría de Diekmann y Kaper

- *On a nonlinear integral equation arising in mathematical epidemiology* O. Diekmann (*Differential Equations and Applications*, 1977),
- *On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation* O. Diekmann y H. Kaper (*Nonlinear Analysis, TMA*, 1978),
- *Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection* O. Diekmann (*Journal of Mathematical Biology*, 1978),

Condición de Mollison

Supongamos que $g(v, \tau) \geq p(\tau)v$ para $p(\tau) \geq 0$ medible y $v \in (0, \delta)$, $\delta > 0$.

Teorema (Necesidad de la condición de Mollison)

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ continua y que satisface (4). Suponga que $\varphi(-\infty) = 0$ y $\varphi(t) \not\equiv 0$, $t \leq t'$ para cada t' fijo. Si se cumple que

$$\int_X \int_{\mathbb{R}} K(s, \tau) p(\tau) ds d\mu(\tau) \in (1, \infty), \quad (5)$$

entonces $\int_{-\infty}^0 \varphi(s) e^{-s\bar{x}} ds$ y $\int_{\mathbb{R}} \int_X K(s, \tau) p(\tau) d\mu(\tau) e^{-s\bar{x}} ds$ son convergentes para un apropiado $\bar{x} > 0$.

Abscisas de convergencia

Suponga que $\sup_{s \in \mathbb{R}} \varphi(s) < \infty$. Considere

$$\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zs} \varphi(s) ds, \quad \mathcal{K}(z) = \int_{\mathbb{R}} \int_X K(s, \tau) p(\tau) d\mu(\tau) e^{-sz} ds,$$

y denote la banda abierta maximal de convergencia para esas dos integrales por $\sigma_\phi < \Re z < \gamma_\phi$ y $\sigma_K < \Re z < \gamma_K$, respectivamente.

Teorema

Suponga que φ, g, K son como en el Teorema anterior.

Entonces, $\sigma_K \leq \sigma_\phi < \gamma_\phi \leq \gamma_K$. Más aún, $\mathcal{K}(\gamma_\phi)$ es siempre un número finito.

Abscisas de convergencia

Corolario

Suponga que

$$\lim_{z \rightarrow \gamma_K^-} \int_{\mathbb{R}} \int_X K(s, \tau) p(\tau) d\mu(\tau) e^{-sz} ds = +\infty.$$

Entonces, γ_ϕ es un número finito y $\gamma_\phi < \gamma_K$.

Ecuación característica

Asociamos con la linealización en torno al 0 de la ecuación de convolución (4), la siguiente ecuación característica

$$\chi(z) = 1 - \int_X d\mu(\tau) \int_{\mathbb{R}} K(s, \tau) g'(0, \tau) e^{-zs} ds. \quad (6)$$

Abscisas de convergencia

Teorema (Existencia de raíces de $\chi(z) = 0$)

Suponga que $\chi(0) < 0$. Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ una semionda para la ecuación (4). Si $\varphi(-\infty) = 0$ y $\varphi(t) \not\equiv 0$, $t \leq t'$ para cada t' fijo, entonces $\chi(z)$ tiene un cero en $(0, \gamma_\phi] \subset (0, \gamma_K] \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Observación

Si $\varphi(+\infty) = 0$ entonces un resultado similar puede ser probado. A saber, en esas condiciones $\chi(z)$ tiene un cero en $[\sigma_K, 0)$.

Fórmulas asintóticas (A Bootstrap Argument)

(J. Mallet-Paret, J. Dyn. Diff. Eq., 1999). Suponga que la función φ es acotada, no negativa y $\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi(t) \neq 0$, $t \leq t'$, para cada t' . La función continua $g(\cdot, \tau) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ es diferenciable en 0 con $g'(0+, \tau) > 0$ para cada τ fijo y $\chi(0) < 0$.

(SB) $\gamma_\phi < \gamma_K$ y, para alguna función medible $C(\tau) > 0$ y $\alpha, \sigma \in (0, 1]$,

$$\left| g'(0, \tau) - \frac{g(u, \tau)}{u} \right| \leq C(\tau)u^\alpha, \quad u \in (0, \sigma),$$

$$\zeta(x) := \int_{X \times \mathbb{R}} C(\tau)K(s, \tau)e^{-sx} ds d\mu < +\infty, \quad x \in (0, \gamma_K).$$

(EC $_\rho$) Para cada $x \in (0, \rho)$, $\rho \leq \gamma_\phi$, existe un C_x positivo tal que

$$0 \leq \varphi(t) \leq C_x e^{xt}, \quad t \leq 0.$$

Teorema: Fórmulas asintóticas 1

Sea $\psi(t) := \int_{-\infty}^t \varphi(s) ds$. Suponga que existe una función medible $d_2 \in L^1(X)$, tal que

$$g(u, \tau) \leq d_2(\tau)u, \quad u \geq 0, \quad (7)$$

y se satisfacen **(SB)**, **(EC $_{2\epsilon}$)** para un pequeño

$2\epsilon \in (0, \gamma_K - \gamma_\phi)$. Suponga además que

$\int_{\mathbb{R} \times X} K(s, \tau) d_2(\tau) e^{-sx} d\mu ds$ converge para todo $x \in (0, \gamma_K)$.

Entonces $\chi(\gamma_\phi) = 0$ y, para un apropiado $\epsilon_1 > 0$, $a, m \in \mathbb{R}$, $k \in \{0, 1\}$, y continuo $r \in L^2(\mathbb{R})$, se cumple que

$$\psi(t+m) = (a-t)^k e^{\gamma_\phi t} + e^{(\gamma_\phi + \epsilon_1)t} r(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observación

Se puede demostrar que la propiedad $\varphi(-\infty) = 0$, para φ acotada, implica la convergencia exponencial $\psi(t) = O(e^{zt})$ en $-\infty$ para cada $z \in (0, \gamma_\phi)$. Además, $\psi(t) = O(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Así, para cada $z \in (0, \gamma_\phi)$ fijo, integrando la ecuación (4) dos veces, encontramos que $\Psi(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{-zv} \psi(v) dv$ satisface

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \int_X d\mu(\tau) \int_{\mathbb{R}} K(s, \tau) e^{-zs} \int_{\mathbb{R}} e^{-z(v-s)} \int_{-\infty}^{v-s} g(\varphi(u), \tau) du dv ds \\ &= \int_X d\mu(\tau) \int_{\mathbb{R}} K(s, \tau) e^{-zs} \int_{\mathbb{R}} e^{-zv} \int_{-\infty}^v g(\varphi(u), \tau) du dv ds\end{aligned}$$

Fórmulas asintóticas

Es decir,

$$\Psi(z) = \left(\int_X d\mu(\tau) \int_{\mathbb{R}} K(s, \tau) g'(0, \tau) e^{-zs} ds \right) \int_{\mathbb{R}} e^{-zv} \psi(v) dv + \mathcal{R}(z),$$

donde

$$\mathcal{R}(z) := \int_X d\mu(\tau) \int_{\mathbb{R}} K(s, \tau) e^{-zs} ds \int_{\mathbb{R}} e^{-zv} \int_{-\infty}^v (g(\varphi(u), \tau) - g'(0, \tau)\varphi(u)) du dv$$

Por lo tanto,

$$\chi(z)\Psi(z) = \mathcal{R}(z).$$

Teorema

Si se cumple la desigualdad (7), **(SB)** (excepto $\gamma_\phi < \gamma_K$) y **(EC $_{2\epsilon}$)** y si

$$\int_{\mathbb{R}} \int_X K(s, \tau) d_2(\tau) d\mu(\tau) e^{-sx_0} ds \leq 1,$$

para algún $x_0 \in (0, \gamma_K)$, entonces γ_ϕ coincide con el cero minimal positivo λ_l of $\chi(z)$.

Teorema: Fórmulas asintóticas 2

Asuma **(SB)** y **(EC $_{\gamma_\phi}$)** excepto $\gamma_\phi < \gamma_K$ y suponga que $\chi(0) < 0$, $\chi(\gamma_K^-) \neq 0$, $g(u, \tau) \leq g'(0, \tau)u$, $u \geq 0$. Entonces γ_ϕ coincide con el cero minimal positivo λ_l de $\chi(z)$ y tal solución (si existe) tiene la siguiente representación:

$$\varphi(t+m) = (a-t)^k e^{\lambda_l t} + e^{(\lambda_l + \delta)t} r(t),$$

con $r \in L^2(\mathbb{R})$ continua, para apropiados $a, m \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

Segundo capítulo: Existencia de soluciones tipo onda

(C): Para cada $\delta > 0$ existe una función medible $C_\delta(\tau) \geq 0$ tal que

$$g(u, \tau) \leq C_\delta(\tau)u, \quad u \in [0, \delta],$$

$$\int_X C_\delta(\tau) d\mu(\tau) \int_{\mathbb{R}} K(s, \tau) ds < +\infty;$$

(P): Soluciones acotadas $\phi(t) \geq 0$ de (4) son cero en algún punto sólo si $\phi(t) \equiv 0$.

Teorema (Dicotomía)

Asuma (C) y (P) con $\chi(0) < 0$. Entonces, la siguiente dicotomía se cumple para cada solución acotada $\phi(t) \geq 0$ de (4): $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) > 0$ o bien $\phi(+\infty) = 0$. Un resultado similar es válido para $-\infty$.

Dicotomía / Persistencia puntual

A partir de los Teoremas de Dicotomía y de existencia de ceros para $\chi(z)$ obtenemos el siguiente

Corolario

Si $\chi(z)$ no tiene ceros positivos [negativos] y ϕ es una solución acotada y positiva de (4), entonces $\liminf_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) > 0$ [respectivamente, $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) > 0$].

Dicotomía / Persistencia puntual

A partir de los Teoremas de Dicotomía y de existencia de ceros para $\chi(z)$ obtenemos el siguiente

Corolario

Si $\chi(z)$ no tiene ceros positivos [negativos] y ϕ es una solución acotada y positiva de (4), entonces $\liminf_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) > 0$ [respectivamente, $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) > 0$].

Observación

Si w denota $+\infty$ o $-\infty$, tenemos la siguiente propiedad de persistencia puntual: para cada solución positiva y acotada $\phi(t)$ de la ecuación (4) que satisface $\phi(-w) = 0$ existe algún $\delta(\phi) > 0$ tal que $\liminf_{t \rightarrow w} \phi(t) \geq \delta(\phi)$.

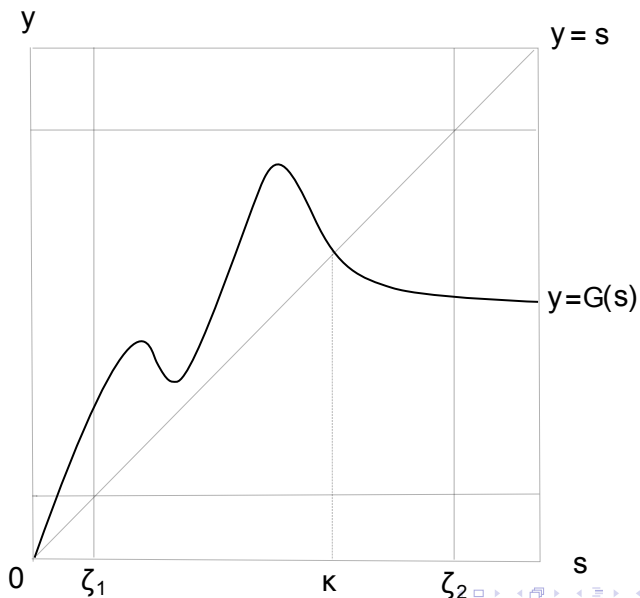
Persistencia uniforme

(N): N_1 . Existe $\tau_0 \in X$, $\mu(\tau_0) = 1$ tal que $g(v, \tau)$ es creciente en v para cada $\tau \neq \tau_0$ y $g(v, \tau_0) > 0$, $v > 0$. Considere la función monótona

$$\tilde{g}(v) = \int_{X \setminus \{\tau_0\}} g(v, \tau) d\mu(\tau) \int_{\mathbb{R}} K(s, \tau) ds.$$

N_2 . Existe $\zeta_2 > 0$ tal que $\Theta(v) := v - \tilde{g}(v)$ es estrictamente creciente en $[0, \zeta_2]$, y $\Theta(\zeta_2) > C \max_{v \geq 0} g(v, \tau_0)$ donde $C := \int_{\mathbb{R}} K(s, \tau_0)$.

Definimos $G(v) = \Theta^{-1}(Cg(v, \tau_0))$. Es claro que $G(0) = 0$, $0 < G(v) < \zeta_2$, $v > 0$, y que los gráficos de $G(v)$ y $g(v, \tau_0)$ tienen formas geométricas similares.



Persistencia uniforme

Lema

Si $\chi(0) < 0$ y **(C)**, **(N)** se cumplen, entonces, para algún $\zeta_1 \in (0, \zeta_2)$,

- 1 $G \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ es positiva para $s > 0$ y existe $G'(0+) > 1$;
- 2 $G([\zeta_1, \zeta_2]) \subseteq [\zeta_1, \zeta_2]$ y $G(\mathbb{R}_+) \subseteq [G(0), \zeta_2]$;
- 3 $\min_{s \in [\zeta_1, \zeta_2]} G(s) = G(\zeta_1)$ mientras que $G(s) > s$ for $s \in (0, \zeta_1)$.

Persistencia uniforme

Lema

Si $\chi(0) < 0$ y **(C)**, **(N)** se cumplen, entonces, para algún $\zeta_1 \in (0, \zeta_2)$,

- 1 $G \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ es positiva para $s > 0$ y existe $G'(0+) > 1$;
- 2 $G([\zeta_1, \zeta_2]) \subseteq [\zeta_1, \zeta_2]$ y $G(\mathbb{R}_+) \subseteq [G(0), \zeta_2]$;
- 3 $\min_{s \in [\zeta_1, \zeta_2]} G(s) = G(\zeta_1)$ mientras que $G(s) > s$ for $s \in (0, \zeta_1]$.

Teorema (Persistencia uniforme)

Asuma **(N)** junto con las condiciones del Teorema de Dicotomía y tome ζ_1 como en el Lema 1. Sea ϕ una solución positiva acotada de la ecuación (4). Si $m = \inf_{s \in \mathbb{R}} \phi(s) < \zeta_1$ entonces, $\lim_{t \rightarrow w} \phi(t) = 0$ y $\liminf_{t \rightarrow -w} \phi(t) > \zeta_1$ para algún $w \in \{-\infty, +\infty\}$.

Teorema: Existencia de semifrentes

Teorema

Asuma **(N)** que $G'(0)$ es finito y que $g(s, \tau) \leq g'(0, \tau)s$ para todo $s \geq 0$. Si $\chi(z)$, $\chi(0) < 0$, está definida y cambia su signo en un intervalo $(0, \bar{w})$, entonces la ecuación (4) tiene al menos una solución semi-wavefront, con $\phi(-\infty) = 0$, $\sup_{s \in \mathbb{R}} \phi(s) \leq \zeta_2$ y $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) > \zeta_1$. Además, si la ecuación $G(s) = s$ tiene exactamente dos soluciones 0 y κ en \mathbb{R}_+ , y κ es atractor global con respecto a la aplicación $G : (0, \zeta_2] \rightarrow (0, \zeta_2]$, entonces $\phi(+\infty) = \kappa$.

Velocidades críticas

Considere

$$\psi(z, c) = z^2 - cz - q + p \exp(-zcr) \int_{\mathbb{R}} K(s) \exp(-zs) ds, \quad (8)$$

donde $p > q$ y K satisface las condiciones de núcleo. Además, (8) es muy similar a la ecuación característica de la linealización en torno al 0 de la ecuación (2).

Teorema

Asuma que $p > q > 0$ y que $\psi(z, c)$ está definida para todo z en un intervalo maximal $(a, b) \ni 0$. Entonces, existen números reales $c_^- < c_*^+$ tal que para cada $c \in (-\infty, c_*^-] \cup [c_*^+, +\infty)$ la ecuación $\psi(\lambda, c) = 0$ tiene exactamente dos raíces reales o bien tiene exactamente una raíz real $\lambda_1(c)$. Más aún, cada $\lambda_j(c) \in (a, b)$ es positiva si $c > c_*^+$ y es negativa si $c < c_*^-$. Si $c \in (c_*^-, c_*^+)$, entonces $\psi(z, c) > 0$ para todo $z \in (a, b)$.*

Un ejemplo (continuación)

Considere $\phi(x + ct)$ una solución tipo onda para la ecuación de reacción-difusión (2).

Observación

En nuestro trabajo obtenemos dos velocidades críticas $c_^- < c_*^+$ (ver teorema anterior) en similitud con el trabajo (E. Trofimchuk, P. Alvarado, S. Trofimchuk, *Journal of Differential Equations*, 2009), en el cual la velocidad mínima $c_{\#} = \max\{0, c_*^-\}$. Más aún, cada posición de c_*^- , c_*^+ y 0 en la recta es posible.*

Un ejemplo (continuación)

En efecto, si tomamos

$$K(x) = \frac{e^{-(x+\beta)^2}}{\sqrt{4\pi}}, \quad h = 2, \quad g'(0) = 2,$$

en la ecuación (2) entonces,

- Para $\beta = 0$, obtenemos $c_*^+ = -c_*^- = 0.79$ (caso simétrico),
- para $\beta = 5$, obtenemos $c_*^+ = 2.7$, $c_*^- = 0.7 \dots$,
- para $\beta = -5$, obtenemos $c_*^+ = -0.7$, $c_*^- = -2.7 \dots$ (caso asimétrico).

Observación. Si $\beta = \pm 5$, entonces la ecuación (4) tiene al menos una onda *estacionaria* (es decir, propagándose a velocidad $c = 0$).

Tercer capítulo, descripción geométrica de frentes

Ecuación de tipo Mackey-Glass

$$u_t(t, x) = \Delta u(t, x) - \delta u(t, x) + g(u(t - h, x)) \quad u(t, x) \geq 0, \quad (9)$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$.

Nicholson con difusión:

$$u_t(t, x) = \Delta u(t, x) - \delta u(t, x) + pu(t - h, x)e^{u(t-h,x)}$$

S. A. Gourley, *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 124, No. 4, 2004

Ecuación con retardo

Si $\phi(x + ct) = u(t, x)$ es una wavefront de la ecuación (9), entonces la función ϕ es una solución heteroclina de la ecuación diferencial con retardo:

$$x''(t) - cx'(t) - x(t) + g(x(t - ch)) = 0 \quad (10)$$

Caso sin retardo

Caso $h = 0$. Ecuación de tipo monoestable de reacción-difusión

$$u_t(t, x) = \Delta u(t, x) - \delta u(t, x) + g(u(t, x)) \quad u(t, x) \geq 0, \quad (11)$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$.

B. Gilding and R. Kersner, 2004, Birkhauser.

Caso monótono

- X. Liang and X. Q. Zhao, *Spreading speeds and traveling waves for abstract monostable evolution systems*, Journal of Functional Analysis., 2010,
- E. Trofimchuk, M. Pinto, S. Trofimchuk, *Pushed traveling fronts in monostable equations with monotone delayed reaction*, DCDS-A, 2013

Proposición

Suponga que $g : [0, \kappa] \rightarrow \mathbb{R}_+$ es monótona. Entonces existe $c_ > 0$ (llamada velocidad mínima de propagación) tal que la ecuación (9) tiene un único frente de onda (salvo traslación) $u(t, x) = \phi(ct + \nu \cdot x)$ para cada $c \geq c_*$ y cada $h \geq 0$. En adición, el perfil ϕ es una función estrictamente creciente. Finalmente, si $c < c_*$ entonces la ecuación (9) no tiene frentes viajeros.*

Condiciones mínimas en la función g

[TTT]: E. Trofimchuk, V. Tkachenko, S. Trofimchuk, Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction-diffusion equation with delay. *Journal of Differential Equations*, 2008.

(UM) $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ es continua y tiene un único extremo local positivo $x = \theta$ (punto de máximo global). Además, $g(0) = 0$, $g(\kappa) = \kappa$ y existe $g'(0) > 1$, $g'(\kappa)$.

(FC) La restricción $g : [g(\max g), \max g] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tiene feedback positivo con respecto al equilibrio κ , es decir,

$$(g(x) - \kappa)(x - \kappa) < 0, \quad x \neq \kappa.$$

Teorema 1 en [TTT]

Proposición

Asuma **(UM)** y $g'(\kappa) < 0$. Sea $u(x, t) = \phi(\nu \cdot x + ct)$ un frente de onda para la ecuación (9). Entonces existe $\tau_1 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que

$$\phi'(s) > 0 \text{ en } (-\infty, \tau_1).$$

Además, τ_1 es finito si y sólo si $\phi(\tau_1) > \kappa$. Si, En adición, la función de nacimiento g satisface **(FC)**, entonces ϕ es eventualmente monótona o lentamente oscilante alrededor de κ . Finalmente, si τ_0 es el punto más a la izquierda donde $\phi(\tau_0) = \theta$ entonces $\tau_1 - \tau_0 \geq ch$.

Función de nacimiento lineal por partes g

$$g(x) := \begin{cases} k_1x, & 0 \leq x \leq \theta, \\ k_2x + q_2, & \theta \leq x \leq \theta_1, \\ k_3x + q_3, & \theta_1 < x \leq g(\theta). \end{cases} \quad (12)$$

Aquí los números reales q_j son elegidos para asegurar la continuidad de g .

Función de nacimiento g lineal por partes.

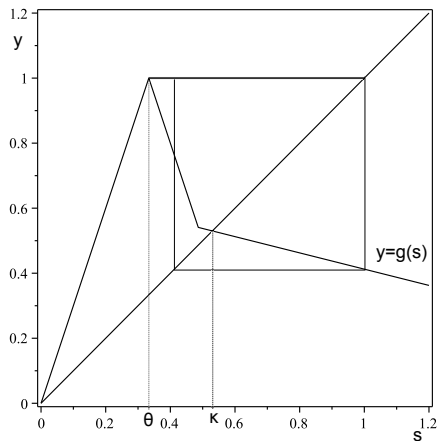


Figure : Nonlinearity g under hypotheses from Theorem (10).

Conjunto $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$

[GT]: A. Gómez, S. Trofimchuk, Global continuation of monotone wavefronts *Journal of the London Mathematical Society* (2013)

Definición

El par $(h, c) \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ si y sólo si cada una de las ecuaciones $\chi_0 := z^2 - cz - 1 + g'(0)e^{-zch} = 0$, $\chi_{\kappa} := z^2 - cz - 1 + g'(\kappa)e^{-zch} = 0$ tienen exactamente dos raíces reales (contando multiplicidad) del mismo signo: raíces positivas $0 < \mu_2 \leq \mu_1$ para la ecuación χ_0 y negativas $\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0$ para la χ_{κ} .

Condición de convergencia

Proposición

Asuma **(UM)** y la siguiente condición de estabilidad global

(GA) κ es el atractor global para al menos una de las siguientes dos aplicaciones

$$g, \sigma : [g^2(\theta), g(\theta)] \rightarrow [g^2(\theta), g(\theta)].$$

Entonces cada solución semi-wavefront de (10) converge a κ en infinito: $\phi(+\infty) = \kappa$.

Condición de convergencia

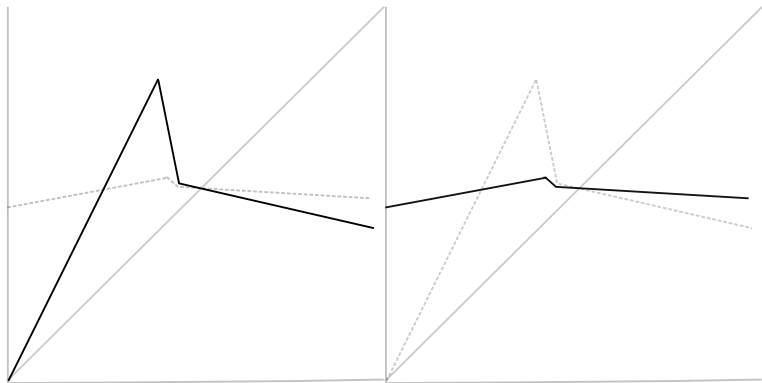


Figure : Funciones lineales por partes g y σ

Existencia de frentes eventualmente monótonos

Proposición

Asuma **(UM)**, **(FC)** y **(GA)** y que $(h, c) \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$. Entonces existe al menos un frente viajero $u(t, x) = \phi(x \cdot \nu + ct)$, $|\nu| = 1$, para la ecuación

$$u_t(t, x) = \Delta u(t, x) - \delta u(t, x) + g(u(t - h, x)) \quad u(t, x) \geq 0,$$

y su perfil ϕ debe ser eventualmente monótono.

Teorema

Sea g la función unimodal definida por (12), donde $k_2 < k_3 < 0 < k_1$. Además, asuma que las hipótesis **(UM)**, **(FC)** y **(GA)**. Si $(h, c) \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ y

$$\gamma(c) := \frac{g(\theta)}{1 + \mu_1(c)\mu_2(c)} > \kappa. \quad (13)$$

Entonces la ecuación (11) posee frentes viajeros propagándose con velocidad c (la cual puede ser la mínima). Luego, cada una de estas ondas viajeras es eventualmente monótona y no monótona. Además, si $\max\{|k_2|, |k_3|\} \leq k_1$ o bien la ecuación característica $z^2 - cz - 1 + |k_2|e^{-zch} = 0$ tiene dos raíces reales positivas (contando multiplicidades), entonces existe un único frente viajero (salvo translación) propagándose con velocidad c .

Parámetros

Considere $k_1 = -k_2 = 3$, $k_3 = -0.25$, $\theta = 1/3$, $h = 2$, $\kappa = 0.53$. Entonces la velocidad minimal $c_* = 0.71\dots$ y la velocidad crítica $c^* = 0.751\dots$ pueden ser determinadas de la ecuaciones características

$z^2 - cz - 1 + 3e^{-2cz} = 0$, $z^2 - cz - 1 - 0.25e^{-2cz} = 0$. Por definición, $\{2\} \times [c_*, c^*] = \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \cap (\{2\} \times \mathbb{R}_+)$. Además $\mu_1(c_*) = \mu_2(c_*) = 0.92\dots$ son raíces múltiples de $z^2 - cz - 1 - 0.25e^{-2cz} = 0$.

Teorema de existencia

Teorema

Existe una función unimodal lineal por partes g que satisface (UM), (FC) y números reales positivos $h, c_ < c^*$ tal que la ecuación (9)*

- (i) *tiene un único frente $u(t, x) = \phi(x \cdot \nu + ct)$, $|\nu| = 1$, para cada $c \geq c_*$ y no tiene frentes viajeros propagándose con velocidad $c < c_*$;*
- (ii) *para cada $c \in [c_*, c^*]$, el perfil ϕ no es monótono pero si eventualmente monótono;*
- (iii) *para cada $c > c^*$, el perfil de onda ϕ oscila lentamente alrededor de κ .*

Conclusión de la conjetura

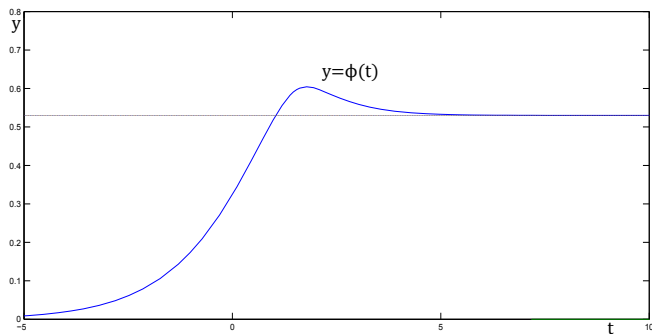





Figure : Perfil de un frente de onda, ni monótono ni oscilatorio, para la ecuación (9).

References

-  M. Aguerrea, C. Gomez, S. Trofimchuk, On uniqueness of semi-wavefronts, Diekmann-Kaper theory of a nonlinear convolution equation re-visited, *Mathematische Annalen*, Online13(2011) .
-  C. Gómez and H. Prado and S. Trofimchuk, Separation dichotomy and wavefronts for a nonlinear convolution equation, *arXiv:1204.5760v1*(2013).
-  A. Ivanov and C. Gómez and S. Trofimchuk, A note on the existence of non-monotone non-oscillating wavefronts, *arXiv:1310.5995 4* (2013).

Teorema 5b, pp 58 “The Laplace Transform”, David Vernon Widder.

Teorema

Si $\alpha(t)$ es monótona, entonces el punto real del eje de la convergencia de

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t)$$

es una singularidad de $f(s)$.

Teorema de Ikehara

Teorema 17, pp 233 “The Laplace Transform”, David Vernon Widder. Suponga que $\varphi(t)$ es una función no negativa y no decreciente en $[0, \infty)$ tal que la integral

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(t) dt, \quad s = \sigma + i\tau \text{ converge para } \sigma > 1.$$

Teorema

Si para alguna constante A y alguna función $g(\tau)$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} f(s) - \frac{A}{s-1} = g(\tau) \quad (14)$$

uniformemente en cada intervalo finito $-a \leq \tau \leq a$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) e^{-t} = A.$$

Caracterización de \mathcal{D}_g .

Proposición ([GT], Lema 1.1)

Suponga que $g'(\kappa) < 0$. Entonces existe $c^ = c^*(h) \in (0, +\infty]$ tal que la función característica $\chi_\kappa(z)$ tiene tres ceros reales $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ si y sólo si $c \leq c^*$. Si c^* es finito y $c = c^*$, entonces χ_κ tiene un cero doble $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, mientras para $c > c^*$ no existen ceros negativos de χ_κ . Además, si $\lambda_j \in \mathbb{C}$ es un cero complejo de χ_κ para $c \in (0, c^*]$ entonces $\Re \lambda_j < \lambda_2$ y $|\Im \lambda_j| > 2\pi/(ch)$.*

Formas de los perfiles

Si suponemos que $\phi(0) = \theta$ y que $\mu_2 \leq \mu_1$ son las raíces de positivas de

$$z^2 - cz - 1 + g'(0)e^{-zch} = 0.$$

Y la función g unimodal esta definida como antes (lineal por partes). Entonces para todo $t \leq ch$ se cumple que

$$\phi(t) = pe^{\mu_2 t} + (\theta - p)e^{\mu_1 t} \text{ si } \mu_2 < \mu_1,$$

o bien,

$$\phi(t) = -qte^{\mu_1 t} + \theta e^{\mu_1 t} \text{ si } \mu_2 = \mu_1,$$

para p y q que satisfacen

$$\theta < p < \frac{\mu_1 \theta}{\mu_1 - \mu_2 e^{-ch(\mu_1 - \mu_2)}}, \quad 0 < q \leq \frac{\mu_1 \theta}{1 + \mu_1 ch}.$$