



# Bases de Schur para funciones *m*-simétricas

Presentación de proyecto de tesis doctoral

Luis Agustín Cárdenas Pena  
Con la supervisión de Luc Lapointe

Universidad de Talca

22 de junio de 2023

# Plan de la charla

1. Fundamentos combinatoriales y definición de funciones de Schur.
2. Conjetura de Macdonald.

# Plan de la charla

1. Fundamentos combinatoriales y definición de funciones de Schur.
2. Conjetura de Macdonald.
3. Funciones  $m$ -simétricas y conjetura de Macdonald  $m$ -simétrica.

# Plan de la charla

1. Fundamentos combinatoriales y definición de funciones de Schur.
2. Conjetura de Macdonald.
3. Funciones  $m$ -simétricas y conjetura de Macdonald  $m$ -simétrica.
4. Estudio de bases de funciones  $m$ -Schur.
5. Plan de trabajo itemizado.

# Funciones simétricas

Dado  $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  diremos que  $f$  es simétrico si  $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$  para todo  $\sigma \in S_n$ .

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$p_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$e_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$$

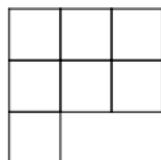
# Diagramas de Young

## Definición

Llamaremos partición a una  $k$  – *upla* de enteros no negativos  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ .

Dada una partición, esta puede representarse por un diagrama de Young.

Si  $\lambda = (3, 3, 1)$ , su diagrama de Young es



# SemiStandard Young Tableaux

Diremos que  $T$  es un SSYT en si  $T$  es un relleno de un diagrama de Young que es creciente en las filas y estrictamente creciente en las columnas.

1	1	2
2	3	4
4		



2	2	2
2	3	4
4		



# Invariantes de SSYT

Nos interesan dos invariantes de los SSYT. Uno es la forma, que es sencillamente la partición cuyo diagrama de Young rellena.

# Invariantes de SSYT

Nos interesan dos invariantes de los SSYT. Uno es la forma, que es sencillamente la partición cuyo diagrama de Young rellena. El otro es su contenido.

$$\text{cont} \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \right) = (2, 2, 1, 2, 0, 0, \dots)$$

$$\text{cont} \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \right) = (3, 3, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

Las funciones de Schur forman una base del espacio vectorial de las funciones simétricas. Estas se indexan con las particiones y se pueden definir combinatorialmente empleando los SSYT.

# Funciones de Schur

Empleando los Tableaux se puede definir una función de Schur.

$$s_\lambda = \sum_T x^{\text{cont}(T)}$$

donde  $T$  recorre todos los SSYT de forma  $\lambda$ .

# Funciones de Schur

Empleando los Tableaux se puede definir una función de Schur.

$$s_\lambda = \sum_T x^{\text{cont}(T)}$$

donde  $T$  recorre todos los SSYT de forma  $\lambda$ . Sea  $\lambda = (2, 1)$

1	1	1	1	2	2	1	2	1	3
2		3		2		3		3	

# Funciones de Schur

Empleando los Tableaux se puede definir una función de Schur.

$$s_{\lambda} = \sum_T x^{\text{cont}(T)}$$

donde  $T$  recorre todos los SSYT de forma  $\lambda$ . Sea  $\lambda = (2, 1)$

<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr></table>	1	1	2		<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>	1	1	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr></table>	1	2	2		<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>	1	3	3		<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>	2	2	3		<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>	2	3	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>	1	2	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr></table>	1	3	2	
1	1																																						
2																																							
1	1																																						
3																																							
1	2																																						
2																																							
1	3																																						
3																																							
2	2																																						
3																																							
2	3																																						
3																																							
1	2																																						
3																																							
1	3																																						
2																																							

$$s_{2,1}(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3$$

# Conjetura de positividad de Macdonald

Los polinomios de Macdonald son una familia de funciones simétricas que dependen de dos parámetros  $q, t$ . Debidamente transformados cumplen

$$\tilde{J}_\lambda(x; q, t) = \sum_{\mu} K_{\mu\lambda}(q, t) s_{\mu}(x) \quad \text{con } K_{\mu\lambda}(q, t) \in \mathbb{N}[q, t]$$

# Conjetura de positividad de Macdonald

En 1988 Macdonald conjeturo que los coeficientes de Kostka-Macdonald  $K_{\mu\lambda}(q, t)$  eran no negativos. En el año 2001 M. Haiman probó que la conjetura era cierta, usando herramientas de la geometría algebraica.

# Conjetura de positividad de Macdonald

En 1988 Macdonald conjeturo que los coeficientes de Kostka-Macdonald  $K_{\mu\lambda}(q, t)$  eran no negativos. En el año 2001 M. Haiman probó que la conjetura era cierta, usando herramientas de la geometría algebraica.

La meta de mi tutor es demostrar esta conjetura empleando métodos combinatoriales, de forma tal que se entiendan mejor los coeficientes  $K_{\mu\lambda}(q, t)$ .

# Conjetura de positividad de Macdonald generalizada

Definiendo

$$J_{\Lambda}(x; q, t) \propto S_{m+1, \dots, N}^t E_{\eta}(x; q, t),$$

donde  $E_{\eta}(x; q, t)$  es un polinomio de Macdonald no simétrico, existe una base natural de funciones de Schur  $m$ -simétricas  $s_{\Omega}(x; t)$  para las cuales tenemos la siguiente conjetura

$$\tilde{J}_{\Lambda}(x; q, t) = \sum_{\Omega} K_{\Omega\Lambda}(q, t) s_{\Omega}(x; t) \quad K_{\Omega\Lambda}(q, t) \in \mathbb{N}[q, t] \quad (1)$$

donde  $\tilde{J}_{\Lambda}(x; q, t)$  es una transformación de  $J_{\Lambda}(x; q, t)$ .

# Conjetura de positividad de Macdonald generalizada

Definiendo

$$J_{\Lambda}(x; q, t) \propto S_{m+1, \dots, N}^t E_{\eta}(x; q, t),$$

donde  $E_{\eta}(x; q, t)$  es un polinomio de Macdonald no simétrico, existe una base natural de funciones de Schur  $m$ -simétricas  $s_{\Omega}(x; t)$  para las cuales tenemos la siguiente conjetura

$$\tilde{J}_{\Lambda}(x; q, t) = \sum_{\Omega} K_{\Omega\Lambda}(q, t) s_{\Omega}(x; t) \quad K_{\Omega\Lambda}(q, t) \in \mathbb{N}[q, t] \quad (1)$$

donde  $\tilde{J}_{\Lambda}(x; q, t)$  es una transformación de  $J_{\Lambda}(x; q, t)$ .  
Probé que  $K_{\Omega\Lambda}(1, 1)$  es igual al cardinal de cierta familia de tableaux estándar.

Con los coeficientes de Kostka clásicos se da la siguiente dualidad

$$K_{\mu\lambda}(q, t) = K_{\lambda'\mu'}(t, q)$$

Por ende el caso  $t = 1$  se puede estudiar estudiando  $q = 1$ , puesto que.

$$K_{\mu\lambda}(q, 1) \longleftrightarrow K_{\mu\lambda}(1, t)$$

Con los coeficientes de Kostka clásicos se da la siguiente dualidad

$$K_{\mu\lambda}(q, t) = K_{\lambda'\mu'}(t, q)$$

Por ende el caso  $t = 1$  se puede estudiar estudiando  $q = 1$ , puesto que.

$$K_{\mu\lambda}(q, 1) \longleftrightarrow K_{\mu\lambda}(1, t)$$

No hay tal dualidad en el caso  $m$ -simétrico.

$$K_{\Omega\Lambda}(q, 0) \not\leftrightarrow K_{\Omega\Lambda}(0, t)$$

$q = 0$  corresponde a los polinomios de Hall-Littlewood en el caso clásico, en el mundo  $m$ -simétrico corresponde con  $t = 0$ .

Nos interesa estudiar la base de Schur  $s_\lambda(x; t)$ .

Nos interesa estudiar la base de Schur  $s_\lambda(x; t)$ .

Dadas  $\Lambda = (\alpha, \lambda)$  con  $\alpha$  de largo  $m$ , llamo  $k_\Lambda(x_1, \dots, x_m; t) = H_\alpha(\mathbf{x}; t)s_\lambda(x)$  donde  $H_\alpha$  es el polinomio no simétrico de Hall-Littlewood.

Cuando  $t = 1$  se tiene que  $H_\alpha(x_1, \dots, x_m) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ .

Nos interesa estudiar la base de Schur  $s_\lambda(x; t)$ .

Dadas  $\Lambda = (\alpha, \lambda)$  con  $\alpha$  de largo  $m$ , llamo  $k_\Lambda(x_1, \dots, x_m; t) = H_\alpha(\mathbf{x}; t)s_\lambda(x)$  donde  $H_\alpha$  es el polinomio no simétrico de Hall-Littlewood.

Cuando  $t = 1$  se tiene que  $H_\alpha(x_1, \dots, x_m) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ .

$$\langle k_\Lambda, k_\Omega \rangle = \delta_{\Lambda\Omega}$$

Usamos este producto interno para definir la base  $s_\Lambda^*(x; t)$ , la base dual de las  $s_\lambda(x; t)$  que queremos caracterizar.

# Notación pletística

Dados  $X$  e  $Y$  dos conjuntos de variables, definimos:

$$h_n[X + Y] = \sum_{k=0}^n h_{n-k}[X]h_k[Y]$$

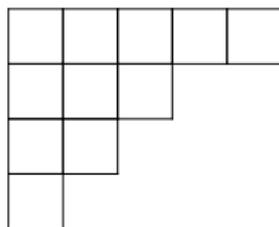
Por ejemplo si  $X = x_1, \dots, x_n$ , y  $Y = \{y_1, y_2\}$

$$\begin{aligned}h_2[X + Y] &= h_2[X] + h_1[X]h_1[Y] + h_2[Y] = \\ &= h_2[X] + h_1[X](y_1 + y_2) + (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\end{aligned}$$

Si  $Y = \{y_1, y_2\}$ , notaremos  $h_2[X + y_1 + y_2] := h_2[X + Y]$

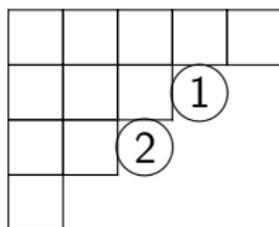
# Diagramas

Sea  $\Lambda = (\alpha, \lambda)$  con  $\alpha = (3, 2)$  y  $\lambda = (5, 1)$ , llamamos  $m$ -partición a  $\Lambda$ . Le asociamos un diagrama de Young de  $\alpha \cup \lambda$ , ordenado de menor a mayor.



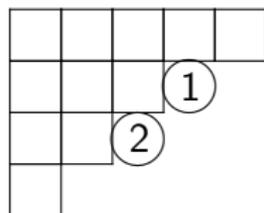
# Diagramas

Sea  $\Lambda = (\alpha, \lambda)$  con  $\alpha = (3, 2)$  y  $\lambda = (5, 1)$ , llamamos  $m$ -partición a  $\Lambda$ . Le asociamos un diagrama de Young de  $\alpha \cup \lambda$ , ordenado de menor a mayor.

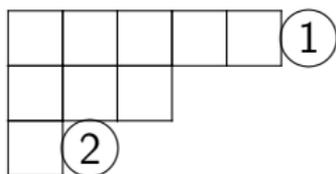


Luego ponemos un círculo con 1 en la fila  $\alpha_1$  y uno con 2 en la fila  $\alpha_2$ .

En lugar de notar  $\Lambda = (\alpha, \lambda)$  con  $\lambda = (5, 1)$ ,  $\alpha = (3, 2)$ , notaremos  $\Lambda = (\mu, \beta)$  con  $\mu = (5, 3, 2, 1)$  y  $\beta = (2, 3)$ , por conveniencia para presentar enunciados. Invertimos el orden de partición-composición para ayudar a distinguir la notación.



Sea  $\Lambda = (\lambda, \alpha)$  con  $\lambda = (5, 3, 1)$  y  $\alpha = (1, 3)$ .



$$s_{\Lambda}^*(x; 1) = \det \begin{pmatrix} h_5(X + x_1) & h_6(X + x_1) & h_7(X + x_1) \\ h_2(X + x_1) & h_3(X + x_1) & h_4(X + x_1) \\ 0 & 1 & h_1(X + x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

Desarrollando

$$s_{\lambda}^*(x; 1) = s_{\lambda, \alpha}^*(x; 1) = \sum_{\mu, \beta} c_{\lambda, \mu}^{\alpha, \beta} s_{\mu} x^{\beta}$$

Mostré que  $c_{\lambda, \mu}^{\alpha, \beta}$  es la cantidad de tableaux skew semiestandar en cierta familia que depende de  $\lambda$  y  $\alpha$ .

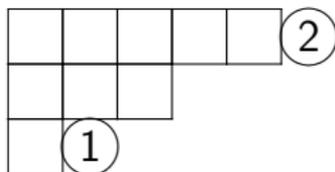
Desarrollando

$$s_{\lambda}^*(x; 1) = s_{\lambda, \alpha}^*(x; 1) = \sum_{\mu, \beta} c_{\lambda, \mu}^{\alpha, \beta} s_{\mu} x^{\beta}$$

Mostré que  $c_{\lambda, \mu}^{\alpha, \beta}$  es la cantidad de tableaux skew semiestandar en cierta familia que depende de  $\lambda$  y  $\alpha$ .

Para  $t$  arbitrario se conjetura que los coeficientes de  $s_{\lambda}^*(x; t)$  yacen en  $\mathbb{N}[t]$ .

Tomando  $\lambda = (5, 3, 1)$ ,  $\alpha' = (3, 1)$  y  $\Lambda' = (\lambda, \alpha')$ . Se tiene el diagrama



y la función es

$$s_{\Lambda'}^*(x; 1) = \det \begin{pmatrix} h_5(X + x_2) & h_6(X + x_2) & h_7(X + x_2) \\ h_2(X + x_2) & h_3(X + x_2) & h_4(X + x_2) \\ 0 & 1 & h_1(X + x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

- El caso  $t = 1$  nos interesa por la simetría que tiene y por que nos da una interpretación de  $K_{\Omega\Lambda}(1, 1)$ .

- El caso  $t = 1$  nos interesa por la simetría que tiene y por que nos da una interpretación de  $K_{\Omega\Lambda}(1, 1)$ .
- El caso  $t = 0$  no posee tal simetría, pero la evidencia en este caso sugiere una teoría más rica.

- El caso  $t = 1$  nos interesa por la simetría que tiene y por que nos da una interpretación de  $K_{\Omega\Lambda}(1, 1)$ .
- El caso  $t = 0$  no posee tal simetría, pero la evidencia en este caso sugiere una teoría más rica.
- Para  $s_{\Lambda}^*(x; t)$  existe una conexión entre el caso  $t = 0$  y el caso  $t = 1$ .

Dada  $\Lambda = (\lambda, \alpha)$  con  $\alpha$  antidominante, es decir  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k$ , sea  $\overleftarrow{\alpha}$  la partición obtenida de ordenar  $\alpha$  en forma dominante y  $\overleftarrow{\Lambda} = (\lambda, \overleftarrow{\alpha})$ .

En este caso se tiene que

$$s_{\Lambda}^*(x; 0) = s_{\overleftarrow{\Lambda}}^*(x; 1), \quad (2)$$

por lo que tenemos una interpretación combinatorial para  $s_{\Lambda}^*(x; 0)$  para  $\Lambda$  antidominante.

También existe notación pletística para  $e_k[X]$ . Se tiene que

$$e_k[X + x_1] = e_k[X] + x_1 e_{k-1}[X]$$

$$e_k[X + x_1 + x_2] = e_k[X] + (x_1 + x_2)e_{k-1}[X] + x_1 x_2 e_{k-2}[X]$$

Sea  $\Lambda = (\lambda, \alpha)$   $\lambda = (4, 2, 1)$ ,  $\alpha = (2, 3)$ .

$$\Lambda = \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & & \end{array}$$

Sea  $\Lambda = (\lambda, \alpha)$   $\lambda = (4, 2, 1)$ ,  $\alpha = (2, 3)$ .

$$\Lambda = \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & & \end{array}$$

En este caso  $s_{\Lambda}(x; 0)$  es igual a

$$\det \begin{pmatrix} x_1 x_2 e_1[X] & x_1 x_2 e_2[X] & x_1 x_2 e_3[X] & x_1 x_2 e_4[X] \\ x_1 & x_1 e_1[X] & x_1 e_2[X] & x_1 e_3[X] \\ 0 & 1 & e_1[X + x_2] & e_2[X + x_2] \\ 0 & 0 & 1 & e_1[X + x_1 + x_2] \end{pmatrix}$$

Donde  $X = \{x_3, x_4, \dots\}$ .

Las funciones de Schur clásicas en variables  $(x_1, x_2, \dots)$  pueden definirse como

$$s_\lambda(x) = \sum_T x^{\text{cont}(T)}$$

Donde  $T$  recorre todos los SSYT de forma  $\lambda$ .

Las funciones de Schur clásicas en variables  $(x_1, x_2, \dots)$  pueden definirse como

$$s_\lambda(x) = \sum_T x^{\text{cont}(T)}$$

Donde  $T$  recorre todos los SSYT de forma  $\lambda$ .

La regla combinatorial para  $t = 1$  da lugar a una expresión del tipo

$$s_\lambda^*(x; 1) = \sum_T x^{\text{cont}(T)}$$

Nos interesa generalizar la interpretación de  $s_{\lambda}(x; 0)$  y  $s_{\lambda}^*(x; 0)$  como suma de monomios indexados por tableaux.

Nos interesa generalizar la interpretación de  $s_{\lambda}(x; 0)$  y  $s_{\lambda}^*(x; 0)$  como suma de monomios indexados por tableaux.

Una vez caracterizados los Tableaux correspondientes a  $s_{\lambda}(x; 0)$  y a  $s_{\lambda}^*(x; 0)$  nos interesa desarrollar una noción de inserción análoga al algoritmo RSK la cual de lugar a una correspondencia del tipo Robinson-Schensted.

# Robinson-Schensted clásico

La identidad Robinson-Schensted establece una correspondencia biyectiva entre las bipalabras  $w_A$  y los pares de tableaux  $(P, Q)$  del mismo tamaño.

$$w_A \xleftrightarrow{RSK} (P, Q)$$

# Robinson-Schensted clásico

La identidad Robinson-Schensted establece una correspondencia biyectiva entre las bipalabras  $w_A$  y los pares de tableaux  $(P, Q)$  del mismo tamaño.

$$w_A \xleftrightarrow{RSK} (P, Q)$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \xleftrightarrow{RSK} \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array} \right)$$

# Igualdad de Cauchy

El teorema de Robinson-Schensted da lugar a la siguiente igualdad

$$\frac{1}{\prod_{i,j} 1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y)$$

# Igualdad de Cauchy

El teorema de Robinson-Schensted da lugar a la siguiente igualdad

$$\frac{1}{\prod_{i,j} 1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y)$$

Nosotros esperamos obtener una nueva demostración combinatorial a la siguiente identidad.

$$\left( \frac{1}{\prod_{i+j \leq m+1} 1 - x_i y_j} \right) \left( \frac{1}{\prod_{i,j} 1 - x_i y_j} \right) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x; 0) s_{\lambda}^*(y; 0)$$

## Ejemplo $s_{\hat{\Lambda}}(x; 0)$

Sea  $\Lambda = (\lambda, (a, b))$  con  $a < b$ , que corresponde al caso dominante, y  $\hat{\Lambda} = (\lambda, (b, a))$ , se tiene que

$$s_{\hat{\Lambda}}(x; 0) = \tilde{\pi}_1 s_{\Lambda}(x; 0) = \frac{x_2}{x_1 - x_2} (1 - K_{1,2}) s_{\Lambda}(x; 0)$$

donde  $K_{1,2}$  es la función que intercambia las variables  $x_1$  y  $x_2$ .

## Ejemplo $s_{\hat{\Lambda}}^*(x; 0)$

Sea  $\Lambda = (\lambda, (a, b))$  con  $b > a$ , que corresponde al caso antidominante, y  $\hat{\Lambda} = (\lambda, (b, a))$ , se tiene que

$$s_{\hat{\Lambda}}^*(x; 0) = \pi_1 s_{\Lambda}(x; 0)$$

donde  $\pi_1 = \hat{\pi}_1 + 1$ .

# Caracterización combinatorial caso dual

Dado  $\Lambda = (\lambda, \alpha)$ , sea  $\beta$  antidominante tal que  $\alpha = \sigma\beta$ .  
Partiendo de una definición basada en los operadores plácticos  $f_i$  para los tableaux asociados a  $s_{\Lambda}^*(x, 0)$ , llegamos a una definición para el caso general.

# Caracterización combinatorial caso dual

Dado  $\Lambda = (\lambda, \alpha)$ , sea  $\beta$  antidominante tal que  $\alpha = \sigma\beta$ .  
Partiendo de una definición basada en los operadores plácticos  $f_i$  para los tableaux asociados a  $s_{\Lambda}^*(x, 0)$ , llegamos a una definición para el caso general.

La hemos caracterizado independientemente de los  $f_i$  y de la factorización de  $\sigma$  en los generadores de Moore-Coxeter de la permutación, empleando sólo la permutación  $\sigma$ .

	$t = 0$	$t = 1$
$s_\Lambda(x; t)$		
$s_\Lambda^*(x; t)$		

	$t = 0$	$t = 1$
$s_\Lambda(x; t)$		
$s_\Lambda^*(x; t)$		✓

	$t = 0$	$t = 1$
$s_\Lambda(x; t)$		
$s_\Lambda^*(x; t)$	✓	✓

	$t = 0$	$t = 1$
$s_\Lambda(x; t)$		
$s_\Lambda^*(x; t)$	✓	✓

	$t = 0$	$t = 1$
$s_\Lambda(x; t)$	✓	
$s_\Lambda^*(x; t)$	✓	✓

Estudiaré los polinomios  $m$ -simétricos. En particular

1. Hallar una interpretación como suma de monomios indexados por tableaux de  $s_\lambda(x; 0)$  en el caso general.

Estudiaré los polinomios  $m$ -simétricos. En particular

1. Hallar una interpretación como suma de monomios indexados por tableaux de  $s_{\lambda}(x; 0)$  en el caso general.
2. Emplear las interpretaciones combinatorial de  $s_{\lambda}(x; 0)$  y  $s_{\lambda}^*(x; 0)$ , y hallar una regla de inserción del tipo RSK para poder probar una correspondencia del tipo Robinson-Schensted.

Estudiaré los polinomios  $m$ -simétricos. En particular

1. Hallar una interpretación como suma de monomios indexados por tableaux de  $s_\Lambda(x; 0)$  en el caso general.
2. Emplear las interpretaciones combinatorial de  $s_\Lambda(x; 0)$  y  $s_\Lambda^*(x; 0)$ , y hallar una regla de inserción del tipo RSK para poder probar una correspondencia del tipo Robinson-Schensted.
3. Hallar una generalización de la carga, cocarga y el cyclage para estos tableaux.

Estudiaré los polinomios  $m$ -simétricos. En particular

1. Hallar una interpretación como suma de monomios indexados por tableaux de  $s_\lambda(x; 0)$  en el caso general.
2. Emplear las interpretaciones combinatorial de  $s_\lambda(x; 0)$  y  $s_\lambda^*(x; 0)$ , y hallar una regla de inserción del tipo RSK para poder probar una correspondencia del tipo Robinson-Schensted.
3. Hallar una generalización de la carga, cocarga y el cyclage para estos tableaux.
4. Hallar una interpretación combinatorial de los coeficientes  $K_{\Omega\lambda}(q, 0)$ .

¡Muchas Gracias!