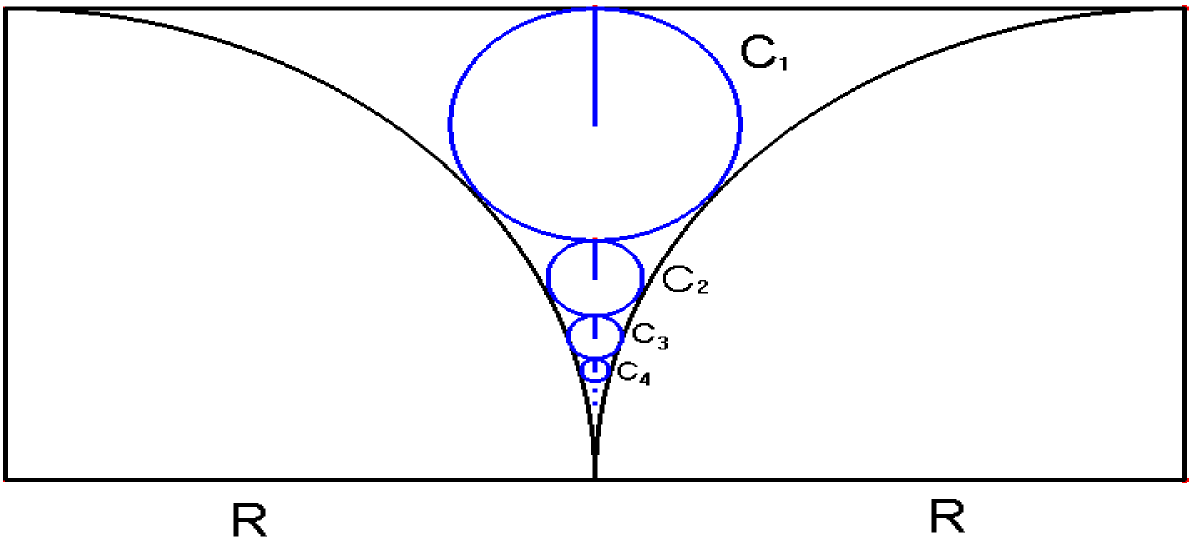
PRUEBA NACIONAL

19 Olimpiada de Matemática

Primera parte: Mayores **25 de Agosto 2007**

---

1. En el rectángulo de la figura, cuya base es el doble que la altura, se construyen los dos cuartos de circunferencia con centro en los vértices inferiores como se muestra. Y las circunferencias tangentes a ambos cuartos de circunferencia y a la anterior (excepto la primera que es tangente al lado superior del rectángulo). Denotemos por R la altura del rectángulo y enumeremos las circunferencias tangentes por orden de tamaño decrecientes:



   (a) Demuestre que
   $$d_n = \frac{R}{n(n+1)}$$
   donde d_n denota el diametro de la n-ésima circunferencia.

   (b) Demuestre que
   $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1$$

2. Sea x un número real tal que $x+\frac{1}{x}$ es entero. Probar que $x^{2007}+\frac{1}{x^{2007}}$ es entero.

3. En la isla de Camelot, viven 13 camaleones rojos, 15 verdes y 17 amarillos. Cuando dos de distinto color se encuentran, cambian simultáneamente al tercer color. ¿Podría darse la situación en la que todos tengan el mismo color? Justifique su respuesta.