SOCIEDAD DE MATEMATICA

PRUEBA NACIONAL

19 Olimpiada de Matemática

Segunda parte: Mayores **25 DE AGOSTO 2007**

---

1. Sea n un número natural. Se sabe que podemos escribir n^3 como la suma de n números naturales impares consecutivos. Por ejemplo

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ 2^3 &= 3+5 \\ 3^3 &= 7+9+11 \\ 4^3 &= 13+15+17+19 \end{aligned}$$

   (a) Dado un número natural arbitrario n, describa explictamente una forma de determinar los n números impares consecutivos usados para escribir n^3 como arriba.

   (b) Generalice lo anterior para n^k, donde k es un número natural mayor o igual que 2.

2. Si a, b y c son tres reales positivos cualesquiera, demuestre que se cumple:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 6$$

3. Sean dos parábolas, de ecuaciones : $y=cx^2+d$ (con $c>0$ y $d<0$) y $x=ay^2+b$ (con $a>0$ y $b<0$), que se cortan en cuatro puntos. Demostrar que esos cuatro puntos pertenecen a una misma circunferencia.