SOLUCIONES PRUEBA NACIONAL 19° **Olimpiada de Matemáticas**

Prueba de Nivel Mayores. Primera Parte **25 de Agosto 2007**
Tiempo: 2 horas

---

1. En el rectángulo de la figura cuya base es el doble que la altura, se construyen los dos cuadrantes de circunsferencia mostrados y las circunsferencias tangentes a ambos cuadrantes y a la anterior (excepto la primera que es tangente al lado superior del rectángulo). Denotemos por R la altura del rectángulo y enumeremos las circunsferencias tangentes por orden de tamaño decrecientes:

   (a) Demuestre que
   $$d_n = \frac{R}{n(n+1)}$$
   donde d_n denota el diametro de la n-ésima circunsferencia.

   (b) Demuestre que
   $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1$$

   SOL:

   (a) Notemos que, la circunsferencia de diametro d_1 será tangente a ambos cuadrantes y al lado superior del rectángulo sólamente si la distancia del centro de circunsferencia a ambos cuadrantes y al lado superior del rectángulo es la misma. Por tanto se tiene la relación pitagórica:

   $$\begin{aligned}(R-r_1)^2+R^2 &= (R+r_1)^2\\ &\Rightarrow\ 2R^2-2Rr_1+r_1^2=R^2+2Rr_1+r_1^2\\ &\Rightarrow\ R^2-4Rr_1=0\\ &\Rightarrow\ R(R-4r_1)=0\end{aligned}$$

   y por tanto
   $$r_1=\frac{R}{4}\quad\Rightarrow\quad d_1=\frac{R}{2}$$

   (b) Para probar esto, demostremos primero que:

   $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\quad\forall n\geq 1 \tag{1}$$

   Para esto, usemos Inducción completa, por una parte, si $n=1$, esta relación se tiene de manera trivial, por otro lado, supongamos que para $n=k$ es cierta y demostremos que también lo será para $n = k+1$.

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}}_{\text{suma de los primeros } k \text{ elementos}} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

Notemos que con esta relación, se tiene entonces que:

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = R\frac{n}{n+1}$$

y por tanto, usando la misma idea que en la parte (a), se tiene que:

$$\begin{aligned}
(R - \sum_{i=1}^{n-1} d_i - r_n)^2 + R^2 &= (R + r_n)^2 \\
&\Rightarrow (R - R\frac{n-1}{n} - r_n)^2 + R^2 = (R+r_n)^2 \\
&\Rightarrow (\frac{R}{n} - r_n)^2 + R^2 = (R+r_n)^2 \\
&\Rightarrow \frac{R^2}{n^2} - 2\frac{R}{n}r_n + r_n^2 + R^2 = R^2 + 2Rr_n + r_n^2 \\
&\Rightarrow \frac{R^2}{n^2} - 2\frac{R}{n}r_n - 2Rr_n = 0 \\
&\Rightarrow R^2 - 2(n+n^2)Rr_n = 0
\end{aligned}$$

y por tanto:

$$r_n = \frac{R}{2(n^2+n)} \quad \Rightarrow \quad d_n = \frac{R}{n(n+1)}$$

(c) Finalmente, de la relación (1), se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

Otra forma de ver esto sería multiplicando esta suma por R y por tanto, tendríamos la suma de todos los diámetros de las circunsferencias inscritas:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) &= \frac{1}{R}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{R}{1\cdot 2} + \frac{R}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{R}{n(n+1)}\right) \\
&= \frac{1}{R}\lim_{n\to\infty}(d_1 + d_2 + \cdots + d_n) \\
&= \frac{1}{R}(d_1 + d_2 + \cdots + d_n + \cdots)
\end{aligned}$$

y de la propia figura se comprueba, que la suma de todos los diámetros es exactamente la altura del rectangulo, es decir, R.

2. Sea x un número real tal que $x + \frac{1}{x}$ es entero. Probar que $x^{2007} + \frac{1}{x^{2007}}$ es entero.

   SOL:

   Si $x + \frac{1}{x}$ es un entero, entonces

   $$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

   es un entero. Del mismo modo,

   $$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

   es un entero. Iterando este procedimiento se tiene que si para $k = 1, \ldots, n$ el número $x^k + \frac{1}{x^k}$ es un entero, entonces

   $$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

   es un entero. Es claro que puede por obtenerse por este procedimiento que $x^n + \frac{1}{x^n}$ es un entero para cualquier n fijo.

3. En la isla de Camelot, viven 13 camaleones rojos, 15 verdes y 17 amarillos. Cuando dos camaleones de distinto color se encuentran, cambian simultáneamente al tercer color. ¿Podría darse la situación en la que todos tengan el mismo color?. Justifique su respuesta.

   SOL:

   Notemos primeramente que para que todos los camaleones sean de un mismo color, en algún momento deben de haber dos grupos de diferente color con la misma cantidad de camaleones, de hecho, el último paso de este eventual hecho ocurre cuando sólo quedan dos de diferente color y el resto tienen el tercer color y por ende, cuando estos dos se encuentren se convertirán al tercer color, quedando todos iguales. Pasa exactamente lo mismo cuando se tengan dos grupos de diferente color con la misma cantidad de camaleones. Por tanto, todo se reduce a comprobar si es posible, o no, de que en algún momento se tengan dos grupos de diferente color con la misma cantidad de camaleones. Para esto, fijemos $i = 0$, $j = 0$ y $k = 0$, las variables que nos serviran para contar, de manera que cada vez que ocurre un encuentro entre dos camaleones, se tiene que:

   - $i = i + 1$: Si se encuentran un camaleon verde con uno rojo.
   - $j = j + 1$: Si se encuentran un camaleon verde con uno amarillo.
   - $k = k + 1$: Si se encuentran un camaleon amarillo con uno rojo.

   Por tanto, después de $i + j + k$ encuentros, se tiene que hay:

   - $13 - i + 2j - k$ camaleones rojos
   - $15 - i - j + 2k$ camaleones verdes

- $17 + 2i - j - k$ camaleones amarillos

Por lo tanto, tenemos sólo tres posibilidades, la primera es si los camaleones rojos se igualan en cantidad, con los verdes:

$$
\begin{aligned}
&13 - i + 2j - k = 15 - i - j + 2k \\
&\Rightarrow 3(j - k) = 2
\end{aligned}
$$

lo cual es imposible, es decir, no existen i, j y k tal que se cumpla esa ecuación, la segunda es si los camaleones rojos se igualan en cantidad con los amarillos:

$$
\begin{aligned}
&13 - i + 2j - k = 17 + 2i - j - k \\
&\Rightarrow 3(j - i) = 4
\end{aligned}
$$

lo cual también es imposible dado que 4 no es múltiplo de 3, por último, tenemos la tercera posibilidad que es cuando los camaleones verdes se igualan en cantidad a los amarillos, en este caso se tiene:

$$
\begin{aligned}
&15 - i - j + 2k = 17 + 2i - j - k \\
&\Rightarrow 3(k - i) = 2
\end{aligned}
$$

y estariamos como en el primer caso. Por tanto concluimos que nunca se tendrán todos los camaleones del mismo color. Por último, les sugerimos comprobar que si en vez de 17 amarillos, hubiesemos tenido 19, entonces si hubiese sido posible.

---

4. Sea n un número natural. Se sabe que podemos escribir n^3 como la suma de n números naturales impares consecutivos. Por ejemplo

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ 2^3 &= 3+5 \\ 3^3 &= 7+9+11 \\ 4^3 &= 13+15+17+19 \end{aligned}$$

(a) Dado un número natural arbitrario n, describa explícitamente una forma de determinar los n números impares consecutivos usados para escribir n^3 como arriba.

(b) Generalice lo anterior para n^k, donde k es un número natural mayor o igual que 2.

SOL:

(a) La idea es escribir 72^3 como la suma de 72 números naturales consecutivos e impares, es decir,

$$\begin{aligned} 72^3 &= (a+0)+(a+2)+(a+4)+\cdots+(a+(2\times 72-2)) \\ &= (a+a+\cdots+a)+(2+4+\cdots+142) \\ &= 72\times a + 2\,\frac{71\times 72}{2} \\ &= 72\times a + 72\times 71 \end{aligned}$$

de donde $a = 72^2 - 71 = 5113$, por lo tanto, nos queda

$$72^3 = 5113 + 5515 + \cdots + 5255\,.$$

(b) La idea ahora es simplemente generalizar lo que hicimos en el caso (a). Para ellos escribimos

$$\begin{aligned} n^3 &= (a+0)+(a+2)+\cdots+(a+(2n-2)) \\ &= \underbrace{(a+a+\cdots+a)}_{n \text{ veces}} + 2\underbrace{(1+2+\cdots+(n-1))}_{n-1 \text{ veces}} \\ &= na + 2\,\frac{(n-1)n}{2} \\ &= n(a+n-1) \end{aligned}$$

Luego, $a = n^2 - n + 1$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} n^3 &= (n^2-n+1)+(n^2-n+1+2)+(n^2-n+1+4)+\cdots(n^2-n+1+2n-2) \\ &= (n^2-n+1)+(n^2-n+3)+(n^2-n+5)+\cdots(n^2+n-1) \end{aligned}$$

(c) Realizando cálculos análogos a los que hicimos en el item (b), obtenemos

$$n^k = n(a+n-1)\,,$$

esto es, $a = n^{k-1} - n + 1$. Por lo tanto

$$n^k = (n^{k-1}-n+1) + (n^{k-1}-n+3) + (n^{k-1}-n+5) + \cdots (n^{k-1}+n-1)$$

5. Si a, b y c son tres reales positivos cualesquiera, compruebe que se cumple:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$$

SOL:

Como a, b y c son tres reales positivos cualesquiera, entonces denotemos por:

$$p = \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad q = \frac{c}{a}$$

y sustituyendo en la desigualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{p+1}{q} + \frac{q+1}{p} + p + q &\geq 6 \\
\frac{p^2+p+q^2+q}{pq} &\geq 6 - p - q \\
p^2+p+q^2+q &\geq 6pq - p^2q - pq^2 \\
p^2 - 2pq + q^2 &\geq -p(q^2-2q+1) - q(p^2-2p+1) \\
(p-q)^2 + p(q-1)^2 + q(p-1)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

y esta última desigualdad siempre se cumple por ser la suma de tres términos positivos.

6. Sean dos parábolas, de ecuaciones : $y = cx^2 + d$ (con $c > 0$ y $d < 0$) y $x = ay^2 + b$ (con $a > 0$ y $b < 0$), que se cortan en cuatro puntos. Demostrar que esos cuatro puntos pertenecen a una misma circunsferencia.

SOL:

Si un punto (x, y) está en ambas parábolas, entonces satisface simultáneamente las ecuaciones $cx^2 + d - y = 0$ y $ay^2 + b - x = 0$ de manera que también satisface cualquier combinación lineal de éstas. En particular:

$$a(cx^2 + d - y) + c(ay^2 + b - x) = 0$$

Esta ecuación se puede reescribir:

$$ac(x^2 - \frac{1}{a}x + y^2 - \frac{1}{c}y + \frac{d}{c} + \frac{b}{a})$$

Cancelando $ac \neq 0$ y completando cuadrados:

$$(x - \frac{1}{2a})^2 + (y - \frac{1}{2c})^2 = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4c^2} - \frac{d}{c} - \frac{b}{a}$$

El lado derecho es positivo por las condiciones del problema de manera que el punto (x, y) satisface la ecuación de un círculo. Como este es el mismo círculo para todos los puntos en la intersección de las parábolas, se demuestra el resultado pedido.