SOLUCIONES PRUEBA NACIONAL 19° **Olimpiada de Matemáticas**

Prueba de Nivel Menores. Primera Parte **25 de Agosto 2007**
Tiempo: 2 horas

---

1. Determine para que números reales x se satisface la identidad $|x+1| = |x|+1$. Recuerde que para todo número real a, el valor absoluto $|a|$ se define por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

SOL: La expresión $1+|x|$ puede valer $1+x$ o $1-x$ dependiendo del signo de x. La expresión $|1+x|$ puede valer $1+x$ o $-1-x$ dependiendo de si $1+x$ es positivo o negativo. La única manera de que coincidan es que ambos tomen el valor $1+x$. Esto ocurre si x y $1+x$ son ambos positivos, pero esto es equivalente a que x sea positivo.

2. En el rectángulo de la figura cuya base es el doble que la altura, se construyen los dos cuadrantes de circunsferencia mostrados y las circunsferencias tangentes a ambos cuadrantes y a la anterior (excepto la primera que es tangente al lado superior del rectángulo). Denotemos por R la altura del rectángulo y enumeremos las circunsferencias tangentes por orden de tamaño decrecientes:

Demuestre que

$$d_1 = \frac{R}{2}$$

donde d_1 denota el diametro de la primera circunsferencia.

SOL:

Notemos que, la circunsferencia de diametro d_1 será tangente a ambos cuadrantes y al lado superior del rectángulo sólamente si la distancia del centro de circunsferencia a ambos cuadrantes y al lado superior del rectángulo es la misma. Por tanto se tiene la relación pitagórica:

$$\begin{aligned} (R-r_1)^2 + R^2 &= (R+r_1)^2 \\ &\Rightarrow 2R^2 - 2Rr_1 + r_1^2 = R^2 + 2Rr_1 + r_1^2 \\ &\Rightarrow R^2 - 4Rr_1 = 0 \\ &\Rightarrow R(R-4r_1) = 0 \end{aligned}$$

y por tanto

$$r_1 = \frac{R}{4} \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{R}{2}$$

3. En la isla de Camelot, viven 13 camaleones rojos, 15 verdes y 17 amarillos. Cuando dos de distinto color se encuentran, cambian simultáneamente al tercer color. ¿Podría darse la situación en la que todos tengan el mismo color?. Justifique su respuesta.

SOL:

Notemos primeramente que para que todos los camaleones sean de un mismo color, en algún momento deben de haber dos grupos de diferente color con la misma cantidad de camaleones, de hecho, el último paso de este eventual hecho ocurre cuando sólo quedan dos de diferente color y el resto tienen el tercer color y por ende, cuando estos dos se encuentren se convertirán al tercer color, quedando todos iguales. Pasa exactamente lo mismo cuando se tengan dos grupos de diferente color con la misma cantidad de camaleones. Por tanto, todo se reduce a comprobar si es posible, o no, de que en algún momento se tengan dos grupos de diferente color con la misma cantidad de camaleones. Para esto, fijemos $i = 0$, $j = 0$ y $k = 0$, las variables que nos serviran para contar, de manera que cada vez que ocurre un encuentro entre dos camaleones, se tiene que:

- $i = i + 1$: Si se encuentran un camaleon verde con uno rojo.
- $j = j + 1$: Si se encuentran un camaleon verde con uno amarillo.
- $k = k + 1$: Si se encuentran un camaleon amarillo con uno rojo.

Por tanto, después de $i + j + k$ encuentros, se tiene que hay:

- $13 - i + 2j - k$ camaleones rojos
- $15 - i - j + 2k$ camaleones verdes
- $17 + 2i - j - k$ camaleones amarillos

Por lo tanto, tenemos sólo tres posibilidades, la primera es si los camaleones rojos se igualan en cantidad, con los verdes:

$$\begin{aligned}&13 - i + 2j - k = 15 - i - j + 2k\\ &\Rightarrow 3(j - k) = 2\end{aligned}$$

lo cual es imposible, es decir, no existen i, j y k tal que se cumpla esa ecuación, la segunda es si los camaleones rojos se igualan en cantidad con los amarillos:

$$\begin{aligned}&13 - i + 2j - k = 17 + 2i - j - k\\ &\Rightarrow 3(j - i) = 4\end{aligned}$$

lo cual también es imposible dado que 4 no es múltiplo de 3, por último, tenemos la tercera posibilidad que es cuando los camaleones verdes se igualan en cantidad a los amarillos, en este caso se tiene:

$$\begin{aligned}&15 - i - j + 2k = 17 + 2i - j - k\\ &\Rightarrow 3(k - i) = 2\end{aligned}$$

y estariamos como en el primer caso. Por tanto concluimos que nunca se tendrán todos los camaleones del mismo color. Por último, les sugerimos comprobar que si en vez de 17 amarillos, hubiesemos tenido 19, entonces si hubiese sido posible.

PRUEBA NACIONAL 19° **Olimpiada de Matemáticas**

Prueba de Nivel Menores. Segunda Parte **25 de Agosto 2007**
Tiempo: 2 horas

---

4. Sea n un número natural. Se sabe que podemos escribir n^3 como la suma de n números naturales impares consecutivos. Por ejemplo

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ 2^3 &= 3+5 \\ 3^3 &= 7+9+11 \\ 4^3 &= 13+15+17+19 \end{aligned}$$

Determine el primero y el último de los 72 números impares consecutivos que se usan para representar 72^3 como arriba.

SOL:

La idea es escribir 72^3 como la suma de 72 números naturales consecutivos e impares, es decir,

$$\begin{aligned} 72^3 &= (a+0)+(a+2)+(a+4)+\cdots+(a+(2\times 72-2)) \\ &= (a+a+\cdots+a)+(2+4+\cdots+142) \\ &= 72\times a + 2\,\frac{71\times 72}{2} \\ &= 72\times a + 72\times 71 \end{aligned}$$

de donde $a = 72^2 - 71 = 5113$, por lo tanto, nos queda

$$72^3 = 5113 + 5515 + \cdots + 5255\,.$$

5. Sea a un digito entre 1 y 9. Denotaremos por

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ veces}}$$

al número cuya expresión decimal está formada por n digitos a.

(a) Demuestre que la identidad

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ veces}} = a^n$$

no se satisface para ningún entero n.

(b) Para ningún $n>1$ puede ser $\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ veces}}$ un cuadrado perfecto.

SOL:

(a) Basta ver que

$$aa\ldots a \geq a\times 10^{n-1} > a^n.$$

(b) Observando que todo cuadrado es de una de las formas

$$10k + 1, 10k + 4, 10k + 9, 10k + 5, 10k + 6$$

descartamos que a sea 2, 3, 7 u 8. Como $66\ldots6$ es el doble de un número impar, se descarta el caso $a = 6$. Como 5 no divide a $11\ldots1 = 55\ldots5/5$, se descarta el caso $a = 5$. En cualquiera de los casos restantes, $a = 1$, 4, o 9, podemos dividir por un cuadrado y obtenemos que $11\ldots1$ es un cuadrado perfecto. Este número es de la forma $100k+11 = 4(25k+2)+3$, pero ningún cuadrado perfecto puede ser de la forma $4t+3$.

6. Encuentre todos los pares de números primos tales que su suma y su diferencia sean también primos.

SOL:

Sean p_1, p_2 números primos tales que $p_1 + p_2$ y $p_1 - p_2$ son primos.

Si tanto p_1 como p_2 son impares entonces $p = p_1 + p_2$ es un primo par, y por lo tanto igual a 2. Sin embargo, esto implica que $p_1 = p_2 = 1$, lo cual es imposible pues 1 no es primo. Por lo tanto ya sea p_1 o p_2 (y no ambos) es igual a 2. 2 ptos

Observe ahora que p_1 no puede ser 2 pues $p_1 - p_2$ es un primo menor que p_1. Por lo tanto, $p_2 = 2$ y p_1 es impar. 1 pto

Tenemos entonces que p_1, $p_3 = p_1 + 2$ y $p_4 = p_1 - 2$ son primos. Note ahora que $p_3 \cong p_1 + 2 \pmod 3$ y $p_4 \cong p_1 + 1 \pmod 3$. Como la clase módulo 3 de uno de los números $p_1, p_1 + 1, p_1 + 2$ es la clase de 0, existen tres posibilidades: 3 ptos

– $p_1 \cong 0 \pmod 3$: en este caso $p_1 = 3$, por lo que $p_3 = 5$ y $p_4 = 1$. Sin embargo, esto es absurdo pues 1 no es primo. 1 pto

– $p_1 \cong 1 \pmod 3$: en este caso $p_3 \cong 0 \pmod 3$, por lo que $p_3 = 3$. Sin embargo, esto implica que $p_1 = 1$, lo cual nuevamente es absurdo. 1 pto

– $p_1 \cong 2 \pmod 3$: en este caso $p_4 \cong 0 \pmod 3$, por lo que $p_4 = 3$. De esto se deduce que $p_1 = 5$ y $p_3 = 7$. 1 pto

En conclusión, la única pareja de primos buscados es $p_1 = 5$ y $p_2 = 2$. 1 pto

Observación: puede haber alumnos que consideren al 1 como primo. Estos alumnos debieran concluir la existencia de tres pares: 2,1 (pues 2 + 1 = 3 y 2 - 1 = 1), 3,2 (pues 2 + 3 = 5 y 3 - 2 = 1), y 5,2... El puntaje máximo a asignar con esta respuesta es 8 pts.