Olimpiada Nacional de Matemáticas Chile 2008

Primera prueba Nivel mayor

Problema 1. Se tienen 680 naranjas apiladas en una pirámide triangular. ¿Cuántas naranjas hay en la base de la pirámide?

Sol. En un triangulo equilátero con n naranjas en su lado, se tienen:

$$n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

naranjas. Es decir, en la base hay $\frac{n(n+1)}{2}$ naranjas. Cada nivel de la pirámide es un triangulo equilatero con una naranja menos en su lado que el nivel inferior, y por tanto, en la piramide hay:

$$\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \ldots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

naranjas. Ahora sólo debemos resolver la ecuación:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 680$$

para lo cual encontramos las raices enteras del polinomio:

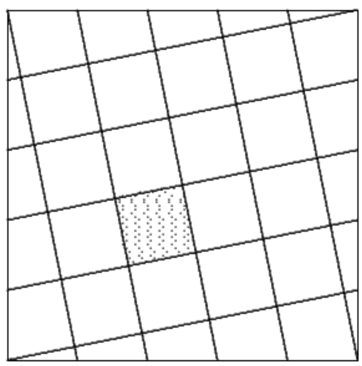
$$x^3 + 3x^2 + 2x - 4080 = 0$$

obteniendose $x = 15$. Se demuestra que las otras dos raices son complejas.Finalmente, concluimos que en la base hay:

$$\left.\frac{n(n+1)}{2}\right|_{n=15} = 120$$

, es decir, 120 naranjas.

Problema 2. En cada lado de un cuadrado de lado n se marcan n-1 puntos de modo de subdividir cada lado en n partes iguales, y se unen como en la figura. ¿Cuál es el área de la región achurada?



Sol. Primero, notemos que en la figura hay $n-1 \times n-1$ regiones iguales a la achurada y *completas*, además de algunos pedazos que tocan al borde del cuadrado. Veamos que con estos pedazos podemos armar otras regiones iguales a la achurada lo que nos permitirá calcular el área de una de ellas, calculando cuántas regiones caben en el cuadrado. Concentrémosnos en un solo lado (el de abajo). Este lado es tocado por n piezas. Separemos el análisis según la paridad de n:

Si n es par: La pieza 1 junto con la pieza n forman una región completa.

La pieza 2 con la pieza $n-1$ forman una región completa.

$$\ldots$$

La pieza i con la pieza $n+1-i$ forman una región completa.

$$\ldots$$

La pieza $\frac{n}{2}$ con la pieza $\frac{n}{2}+1$ forman una región completa.

Entonces, cada borde aporta con $\frac{n}{2}$ regiones completas. Luego el cuadrado admite

$$(n-1) \times (n-1) + 4\frac{n}{2} = n^2 - 2n + 1 + 2n = n^2 + 1$$

regiones completas.

Si n es impar: La pieza 1 junto con la pieza n forman una región completa.

La pieza 2 con la pieza $n-1$ forman una región completa.

$$\ldots$$

La pieza i con la pieza $n+1-i$ forman una región completa.

$$\ldots$$

La pieza $\frac{n-1}{2}$ con la pieza $n+1-\frac{n-1}{2} = \frac{n+3}{2}$ forman una región completa.

Sobra la pieza $\frac{n+1}{2}$ que es exactamente la mitad de una región completa.

Entonces, cada borde aporta con $\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}$ regiones completas. Luego el cuadrado admite

$$(n-1) \times (n-1) + 4\left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\right) = n^2 - 2n + 1 + 2n - 2 + 2 = n^2 + 1$$

regiones completas.

En ambos casos el cuadrado admite n^2+1 regiones completas e iguales. Lego el área de una de ellas es

$$\frac{n^2}{n^2+1}.$$

Problema 3. El conjunto $\mathbb{Z}^2$ es dividido en n partes (disjuntas y) no vacías $A_1, \ldots, A_n$ que verifican la siguiente propiedad: si a y b pertencen a A_i entonces su suma $a+b$ pertence al mismo conjunto A_i. Determine los posibles valores del entero positivo n.

Observación: recuerde que la suma de $a = (m, n) \in \mathbb{Z}^2$ y $b = (m', n') \in \mathbb{Z}^2$ es definida como $(m + m', n + n')$.

Sol. Encontrar soluciones para valores particulares de n (pueden acumular hasta 5 puntos con esto):

Para $n = 1$ tomar $A_1 = \mathbb{Z}^2$ (1 punto)

Para $n = 2$ tomar $A_1 = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : n \geq 0\}$ y $A_2 = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : n < 0\}$ (1 punto)

Para $n = 3$ tomar por ejemplo $A_1 = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : n > 0\}$, $A_2 = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : n < 0\}$ y $A_3 = \{(m, 0) : m \in \mathbb{Z}\}$ (1 punto)

Para $n = 4$ tomar $A_1 = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : n > 0\}$, $A_2 = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : n < 0\}$, $A_3 = \{(m, 0) : m > 0\}$ y $A_4 = \{(m, 0) : m \leq 0\}$ (1 punto)

Para $n = 5$ tomar $A_1 = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : n > 0\}$, $A_2 = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : n < 0\}$, $A_3 = \{(m, 0) : m > 0\}$, $A_4 = \{(m, 0) : m < 0\}$ y $A_5 = \{(0, 0)\}$ (1 punto)

Construir al menos un ejemplo de una partición en que uno de los subconjuntos sea un cono con vértice en el origen (3 puntos)

Probar que cualquier cono con vértice en el origen satisface la propiedad pedida para los conjuntos A_i (1 punto)

Usando descomposiciones en conos, concluir que n puede tomar cualquier valor positivo (1 punto)