Segunda prueba Nivel mayor

Problema 4. Se definen las sucesiones x_n, y_n mediante las reglas: $x_0 = 2, x_1 = 5, x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$, $y_0 = 3, y_1 = 4, y_{n+1} = y_n + 2y_{n-1}$. Pruebe que los conjuntos $\{x_n : n \geq 0\}$ y $\{y_n : n \geq 0\}$ son disjuntos.

Sol. Estudiemos los restos que aparecen al dividir por 7 los términos de las secuencias (en otras palabras, estudiemos el problema con congruencias módulo 7):

$$x_2 \equiv x_1 + 2x_0 \equiv 5 + 2 \cdot 2 \equiv 2 mod(7),$$

$$x_3 \equiv 2 + 2 \cdot 5 \equiv 5 mod(7).$$

Como los restos módulo 7 de los términos que siguen sólo dependen de los restos de los dos términos anteriores, concluimos que la secuancia $\{x_n\}$ tiene el siguiente comportamiento periódio en sus restos: $2, 5, 2, 5, 2, 5, \ldots$

De manera análoga la secuencia $\{y_n\}$ verifica

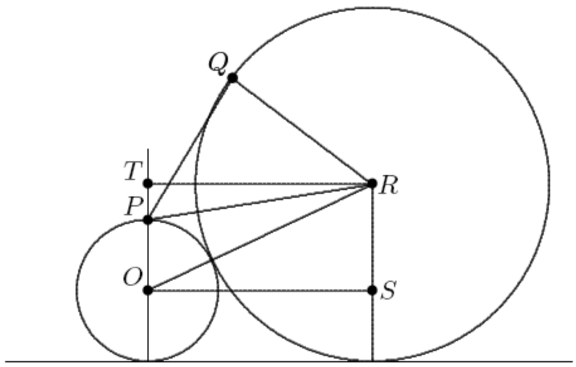
$$y_2 \equiv y_1 + 2y_0 \equiv 4 + 2 \cdot 3 \equiv 3 mod(7),$$

$$y_3 \equiv 3 + 2 \cdot 4 \equiv 4 mod(7).$$

Luego, concluimos que la secuencia $\{y_n\}$ tiene el siguiente comportamiento periódio en sus restos: $3, 4, 3, 4, 3, 4, \ldots$

Vemos de esta forma que un número entero no puede pertenecer simultáneamente a ambas secuancias (de números enteros) pues su resto al dividir por 7 no puede ser a la vez 3 o 4 y 2 o 5.

Problema 5. Se tienen dos circunferencias C_1 y C_2 tangentes (externamente) entre sí y tangentes a una recta L (por el mismo lado). Desde el punto P de mayor altura (respecto a L) en C_1 se traza la tangente "superior" PQ a C_2: vea la figura. Pruebe que la longitud de PQ es igual al diámetro de C_1.



Sol. Llamemos r_1 y r_2 a los radios de C_1 y C_2 respectivamente. Apliquemos Pitágoras al $\triangle OSR$:

$$OS^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_2 + r_1)^2. \tag{1}$$

Apliquemos Pitágoras al $\triangle PTR$:

$$TR^2 + (r_2 - 2r_1)^2 = PR^2. \tag{2}$$

Apliquemos Pitágoras al $\triangle RQP$:

$$PQ^2 + r_2^2 = PR^2. \tag{3}$$

Usando que $OS = TR$, y haciendo $(1) - (2) + (3)$ obtenemos

$$(r_2 - r_1)^2 - (r_2 - 2r_1)^2 + PQ^2 + r_2^2 = (r_2 + r_1)^2$$

lo que luego de las simplificaciones evidentes conduce a

$$PQ^2 = 4r_1^2.$$

Problema 6. En cada casilla de un tablero $n \times n$ se tiene una ampolleta. Además, se cuenta con $2n$ interruptores. Para cada fila existe un iterruptor que, al ser presionado, cambia el estado de las ampolletas de dicha fila (las que estaban encendidas se apagan, y las que estaban apagadas se encienden). Para cada columna se cuenta también con un interruptor que cambia el estado de las ampolletas en ella. Usando estos interruptores, ¿es siempre posible llegar, a partir de cualquier estado incial, a un estado en el cual el número de ampolletas encendidas en cada fila o columna es menor o igual al de ampolletas apagadas en dicha fila o columna?

Sol. Como hay una cantidad finita de ampolletas, hay también una cantidad finita de configuraciones posibles de ampolletas encendidas y apagadas. Esto nos dice también que hay una cantidad finita de configuraciones a las que podemos acceder por medio de una secuencia de acciones sobre los interruptores. De entre todas estas últimas configuraciones, consideremos aquella que tenga la menor cantidad de ampolletas encendidas. Aseguramos que esta configuración cumple con lo pedido en el problema. Efectivamente, supongamos que esta configuración tenga una fila (o columna) en la cual hayan más ampolletas encencidas que apagadas. Si apretamos el interruptor correspondiente a esta fila (o columna), las ampolletas de esa fila (o columna) que estaban encendidas pasan a estar a pagadas y las que estaban apagadas pasan a estar encendidas. Conseguimos de esta forma una configuración accesible por medio de acciones sobre los interruptores y que tiene en total menos ampolletas encendidas que la anterior, lo cual es imposible pues la anterior era aquella configuración que tenía la menor cantidad de ampolletas encendidas. Esto quiere decir que esa configuración verificaba lo pedido por el problema.