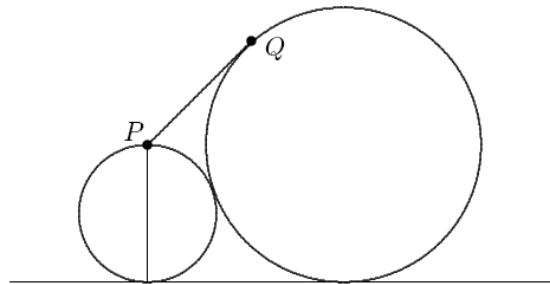




Segunda prueba Nivel mayor

Problema 4. Se definen las sucesiones x_n, y_n mediante las reglas: $x_0 = 2, x_1 = 5, x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}, y_0 = 3, y_1 = 4, y_{n+1} = y_n + 2y_{n-1}$. Pruebe que los conjuntos $\{x_n : n \geq 0\}$ y $\{y_n : n \geq 0\}$ son disjuntos.

Problema 5. Se tienen dos circunferencias C_1 y C_2 tangentes (externamente) entre sí y tangentes a una recta L (por el mismo lado). Desde el punto P de mayor altura (respecto a L) en C_1 se traza la tangente “superior” PQ a C_2 : vea la figura. Pruebe que la longitud de PQ es igual al diámetro de C_1 .



Problema 6. En cada casilla de un tablero $n \times n$ se tiene una ampolleta. Además, se cuenta con $2n$ interruptores. Para cada fila existe un interruptor que, al ser presionado, cambia el estado de las ampolletas de dicha fila (las que estaban encendidas se apagan, y las que estaban apagadas se encienden). Para cada columna se cuenta también con un interruptor que cambia el estado de las ampolletas en ella. Usando estos interruptores, ¿es siempre posible llegar, a partir de cualquier estado inicial, a un estado en el cual el número de ampolletas encendidas en cada fila o columna es menor o igual al de ampolletas apagadas en dicha fila o columna?