Olimpiada Nacional de Matemáticas Chile 2008

Primera prueba Nivel menor

Problema 1. Se tienen 680 naranjas apiladas en una pirámide triangular. ¿Cuántas naranjas hay en la base de la pirámide?

Sol. En un triangulo equilátero con n naranjas en su lado, se tienen:

$$n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

naranjas. Es decir, en la base hay $\frac{n(n+1)}{2}$ naranjas. Cada nivel de la pirámide es un triangulo equilatero con una naranja menos en su lado que el nivel inferior, y por tanto, en la piramide hay:

$$\frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \ldots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

naranjas. Ahora sólo debemos resolver la ecuación:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 680$$

para lo cual encontramos las raices enteras del polinomio:

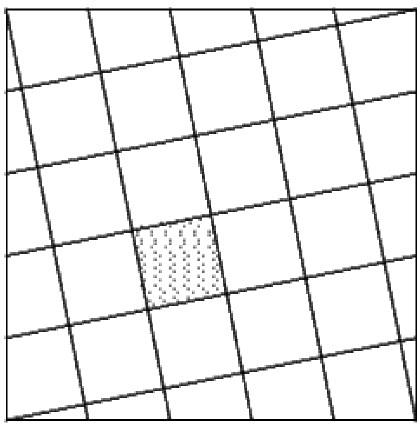
$$x^3 + 3x^2 + 2x - 4080 = 0$$

obteniendose $x = 15$. Se demuestra que las otras dos raices son complejas.Finalmente, concluimos que en la base hay:

$$\left.\frac{n(n+1)}{2}\right|_{n=15} = 120$$

, es decir, 120 naranjas.

Problema 2. En cada lado de un cuadrado de lado 5cm se marcan cuatro puntos de modo de subdividir cada lado en cinco partes iguales, y se unen como en la figura. ¿Cuál es el área de la región achurada?



Sol. Primero, notemos que en la figura hay 4×4 regiones iguales a la achurada y *completas*, además de algunos pedazos que tocan al borde del cuadrado. Veamos que con estos pedazos podemos armar otras regiones iguales a la achurada lo que nos permitirá calcular el área de una de ellas, calculando cuántas regiones caben en el cuadrado. Concentrémosnos en un solo lado (el de abajo).

El triángulo pequeño de la izquierda es exáctamente la pieza que le falta al trapecio de más a la derecha para completar una región. El segundo trapecio es también lo que le falta al cuarto para completar una región. Nos sobra la pieza del centro que es una mitad de una región. De esta manera, cada borde aporta con $2 + \frac{1}{2}$ regiones.

En el total del cuadrado caben entonces $4 \times 4 + 4(2 + \frac{1}{2}) = 26$ regiones iguales. Luego el área de una de ellas es $\frac{25}{26}$.

Problema 3. El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es dividido en n partes (disjuntas y) no vacías $A_1, \ldots, A_n$ que verifican la siguiente propiedad: si a y b pertencen a A_i entonces su suma $a+b$ pertence al mismo conjunto A_i. Determine los posibles valores del entero positivo n.

Sol.

Existen descomposiciones para $n = 1, 2, 3$:

– para $n = 1$, basta tomar $A_1 = \mathbb{Z}$ (1 punto)

– para $n = 2$, tomar por ejemplo $A_1 = \{n \geq 0\}$ y $A_2 = \{n < 0\}$ (1 punto)

– para $n = 3$, tomar $A_1 = \{n > 0\}$, $A_2 = \{n < 0\}$ y $A_3 = \{0\}$ (1 punto)

– Observar que 1 debe pertenecer a algún A_i (1 punto)

– Si 1 pertenece a A_i entonces todos los enteros positivos están en dicho A_i (2 puntos)

– Observar que -1 debe pertenecer a algún A_j, y dicho conjunto A_j debe contener a todos los números enteros negativos (2 puntos)

– Concluir de lo anterior que n no puede ser mayor que 3 (2 puntos)