Olimpiada Nacional de Matemáticas Chile 2008

Segunda prueba Nivel menor

Problema 4. Encuentre todos los enteros positivos a, b tales que

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=2.$$

Sol. La ecuación equivale a

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+1}{a}\right)\left(\frac{b+1}{b}\right) &= 2 \\ ab+a+b+1 &= 2ab \\ a+b+1 &= ab. \end{aligned}$$

Supongamos que $a = b$. La ecuación se reduce a $2a + 1 = a^2$, que no tiene soluciones enteras pues el lado izquierdo no es un múltiplo de a. Luego podemo suponer que $a > b \leq 1$. Luego

$$\begin{aligned} ab = a+b+1 &\leq 2a \\ b &\leq 2. \end{aligned}$$

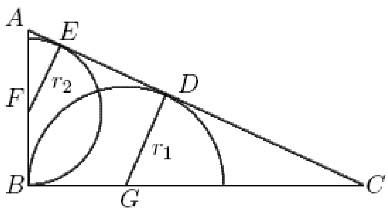
Tenemos así dos casos:

$b = 1$: La ecuación se reduce a $a + 2 = a$ lo cual es imposible.

$b = 2$: La ecuación se reduce a $a + 3 = 2a$ lo que implica que $a = 3$.

Por la simetría del problema, concluimos finalmente que las únicas soluciones son los pares $(2, 3)$ y $(3, 2)$.

Problema 5. Se tiene un triángulo rectángulo de catetos 5cm y 12cm. Con centro en cada cateto se construye una circunferencia que pasa por el vértice del ángulo recto y es tangente a la hipotenusa (vea la figura). Calcule la razón entre los radios de ambas circunferencias.



$$\frac{r_2}{r_1} = ?$$

Sol. Sean los puntos como en la figura (centros y tangencias respectivamente). Se tiene que $AC^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$. El $\triangle GDC$ es rectángulo en D y $\angle DCG = \angle ACB$, luego los $\triangle ABC$ y $\triangle GDC$ son semejantes. Esto implica que

$$\begin{aligned} \frac{DG}{GC} &= \frac{AB}{AC} \\ \frac{r_1}{12 - r_1} &= \frac{5}{13} \end{aligned}$$

lo que implica a su vez que $r_1 = \frac{10}{3}$.

De manera análoga los $\triangle ABC$ y $\triangle FEA$ son semejantes y un cálculo similar nos da $r_2 = \frac{12}{5}$. Luego la razón buscada es

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{18}{25}.$$

Problema 6. En cada casilla de un tablero 7×7 hay una ampolleta. Además, se cuenta con 14 interruptores. Para cada fila existe un iterruptor que, al ser presionado, cambia el estado de las ampolletas de dicha fila (las que estaban encendidas se apagan, y las que estaban apagadas se encienden). Para cada columna se cuenta también con un interruptor que cambia el estado de las ampolletas en ella. Usando estos interruptores, ¿es siempre posible llegar, a partir de cualquier estado incial, a un estado en el cual el número de ampolletas encendidas en cada fila o columna es menor o igual al de ampolletas apagadas en dicha fila o columna?

Sol. Como hay una cantidad finita de ampolletas, hay también una cantidad finita de configuraciones posibles de ampolletas encendidas y apagadas. Esto nos dice también que hay una cantidad finita de configuraciones a las que podemos acceder por medio de una secuencia de acciones sobre los interruptores. De entre todas estas últimas configuraciones, consideremos aquella que tenga la menor cantidad de ampolletas encendidas. Aseguramos que esta configuración cumple con lo pedido en el problema. Efectivamente, supongamos que esta configuración tenga una fila (o columna) en la cual hayan más ampolletas encencidas que apagadas. Si apretamos el interruptor correspondiente a esta fila (o columna), las ampolletas de esa fila (o columna) que estaban encendidas pasan a estar a pagadas y las que estaban apagadas pasan a estar encendidas. Conseguimos de esta forma una configuración accesible por medio de acciones sobre los interruptores y que tiene en total menos ampolletas encendidas que la anterior, lo cual es imposible pues la anterior era aquella configuración que tenía la menor cantidad de ampolletas encendidas. Esto quiere decir que esa configuración verificaba lo pedido por el problema.