XXIX Olimpíada Nacional de Matemática 2017

Nivel Mayor

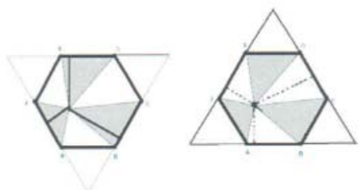
1. En el interior de un hexágono regular se marca un punto P. Desde el punto se trazan segmentos hasta los vértices y luego se colorean de azul en forma alternada, los sectores que se obtienen. Demuestre que la suma de las áreas de los sectores pintados, es igual a la suma de los sectores sin pintar.

Solución

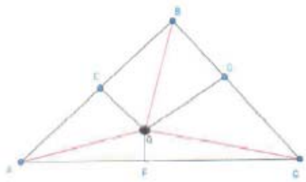
Se construyen los triángulos equiláteros grandes que contienen al hexágono. Ellos son claramente congruentes.

Además, todos los 3 triángulos sombreados y los 3 triángulos no sombreados tienen las mismas bases, un lado del hexágono.

Basta probar que las sumas de las longitudes, desde el punto Q a pié de cada perpendicular de cada lado es constante



Demostración. Si elegimos un punto S en el interior de un triángulo equilátero y trazamos los trazos perpendiculares a cada lado, ellos son las alturas de triángulos de lados rojos y base un lado del triángulo ABC.

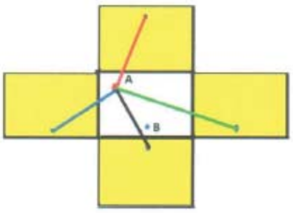


La suma de las tres áreas es igual al área del triángulo ABC, de lo que se deduce que la suma de las alturas es igual a la altura de triángulo ABC, la cual es independiente de las alturas,

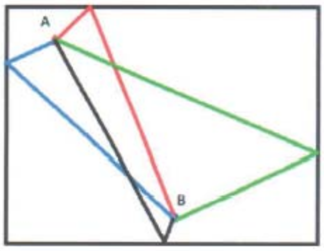
2. Calcular la cantidad máxima de caminos distintos que se pueden construir en una mesa de billar para unir dos bolas en la mesa a n bandas. Se define una banda al rebote de una bola en un lado de la mesa, con el ángulo de incidencia igual al ángulo de salida.

Solución

Se refleja cada rectángulo respecto a sus lados como muestra la figura.
Un tiro a una banda consiste en unir A con B de tal manera de aterrizar en el interior de uno de los reflejados. El tiro queda totalmente determinado al trazar la recta que une el punto A con el punto reflejado B, como muestra la figura



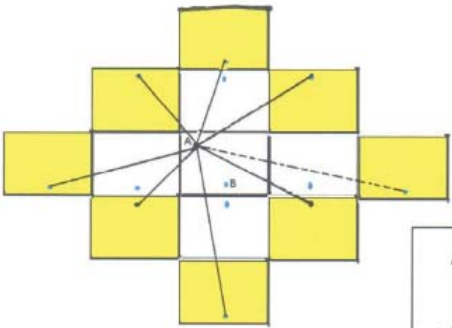
A una banda



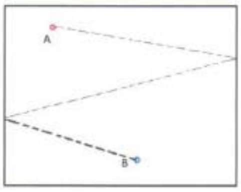
A lo más hay cuatro trazos que unen al punto A con uno de sus cuatro reflejados.
Por lo tanto, hay a lo más 4 trayectorias para un tiro con una banda.

Para dos bandas, completamos la figura anterior de la siguiente manera: Una tiro a dos bandas significa que se debe llegar al desde A al reflejado de B en uno de los 8 rectángulos pintados

A lo más hay 8 trazos con esa propiedad, y por lo tanto hay a lo más 8 trayectorias distintas que unen a A con B pegando en dos bandas (u orillas). Entonces para n=2 hay a lo más 8 trayectorias.



A dos bandas

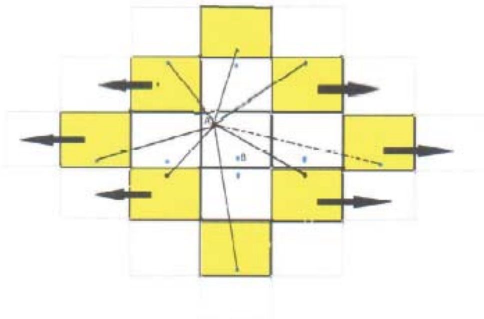


Afirmación.

Hay 4n trayectorias distintas que unen A con B tocando n bandas.

Demostración.

Entre dos bandas consecutivos n, (n+1) se pasa de uno al otro agregando un nuevo anillo de rectángulos blancos que rodee a los $4n$ amarillos.



Excepto por los dos rectángulos extremales, de arriba y de abajo, se le asocia a cada uno de los $4n-2$ rectángulos, un otro rectángulo. A cada extremal se le asocia tres rectángulo. Con ello se ha construido un anillo de $\mathbf{4n-2+2\cdot 3=4n+4=4(n+1)}$. rectángulos a distancia $n+1$.

Por cada uno de los $4(n+1)$ rectángulos hay una y sólo una línea que une el punto A con él único punto B_{n+1}^{k} que es el reflejado de A en el rectángulo C_{n+1}^{k} . Esto prueba que la cantidad de trayectorias es a lo más $\mathbf{4(n+1)}$.

Además se logra tal número, para una configuración adecuada.

3. Utilizando sólo dos dígitos distintos 2 y d, se forma el siguiente número de 90 cifras:

$$m = 2d22d222d2222d \ldots \ldots$$

Si m es múltiplo de 9, determinar todos los valores posibles del dígito d.

Solución

Primero calculemos el largo mayor de 2 que puede haber en el número de 90 cifras m .

Hay 1 dos, 2 dos, 3 dos etc.

Luego si sumamos $\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$ no puede sobrepasar 90, es decir,

$N(N+1) \leq 180$ obteniéndose que N=12.

Hay 12 paquetes de 1, 2, 3, ..., 12 dígitos 2.

De esta manera se obtiene que hay 78 dígitos 2 y por lo tanto hay 12 dígitos d.

La regla de divisibilidad de 9 afirma que: Un número es divisible por 9 si la suma de los dígitos Es un múltiplo de 9.

Sumando los dígitos de m, se obtiene la expresión:

$$2 \cdot 78 + 12\,\mathrm{d} = 3 \cdot 2^2 \cdot (13 + \mathrm{d})$$

Luego $(13 + \mathrm{d})$ debe ser un múltiplo de 3, con d =0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Las soluciones son d=2, d= 5 y d=8.

Como d no puede ser 2 se obtiene que las soluciones son d= 5 y d=8.

4. Calcule todas las soluciones x, y, z en los números reales positivos del siguiente sistema:

$$x(6-y) = 9$$
$$y(6-z) = 9$$
$$z(6-x) = 9$$

Solución

Observemos que de la condición $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ se deduce que

$$0 < y < 6, \quad 0 < z < 6, \quad 0 < x < 6,$$

Multiplicando las tres ecuaciones se tiene la siguiente igualdad:

$$x(6-y)y(6-z)z(6-x) = x(6-x)y(6-y)z(6-z) = 9^3 \quad (*)$$

Además, $0 < x(6-x) = 9-(3-x)^2$ lo cual implica que $0 < x(6-x) \leq 9$.
La igualdad se cumple para $x = 3$.

Similarmente se obtiene que

$0 < y(6-y) \leq 9$. La igualdad se cumple para $y = 3$.
$0 < z(6-z) \leq 9$. La igualdad se cumple para $z = 3$.

De la igualdad (*) se deduce que cada factor debe tener el valor 3, es decir,

$$y(6-y) = 9 \quad , \quad y(6-y) = 9 \quad , \quad y(6-y) = 9$$

Por lo tanto las únicas soluciones son $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$.