XXIX Olimpíada Nacional de Matemática 2017

Nivel Menor

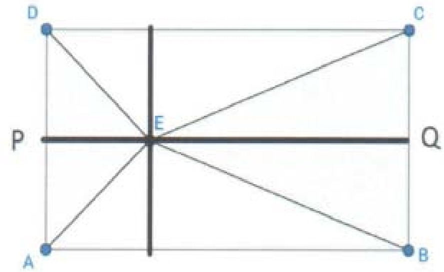
1. En el interior de un rectángulo se marca un punto P. Desde el punto P se trazan segmentos hasta los vértices. En forma alternada se colorean los sectores que se forman. Demuestre que la suma de las áreas de los sectores pintados, es igual a la suma de las áreas de los sectores sin pintar.

Solución

La suma de las longitudes de las alturas de los triángulos sombreados es igual a |PQ|=|AB|=a
Sus bases son iguales: |AD|=BC|=b. Luego la suma de sus áreas es

$$\frac{|AD|(|PE|+|EQ|)}{2} = \frac{|AD||DC|}{2} = \frac{ab}{2}$$

Como el área del rectángulo es ab, se obtiene que el área no sombreada dentro del rectángulo es también igual $\frac{ab}{2}$



2. Determine el menor número entero n de tal forma que la representación decimal de $15 \cdot n$ tenga sólo 0 y 2.

Solución

Llamemos por a_1 , a_2 , a_3, ... los dígitos, es decir, ellos tiene el valor de 0 o 2, como pide el problema.

a) Observamos que $15 \cdot n = a_1$ no puede ser, pues $15 \cdot n$ tiene al menos decenas.

b) Para $15 \cdot n = a_2a_1$ no es posible por simple inspección. En ese caso las únicas posibilidades son $15 \cdot n = 20$, $15 \cdot n = 22$ lo cual es imposible.

c) Estudiemos el caso $15 \cdot n = a_3a_2a_1 = a_1 + a_2 \cdot 10 + a_3 \cdot 10^2$.

El número $15 \cdot n$ debe ser divisible por 5, lo cual determina de inmediato que $a_1 = 0$, pues si fuere 2 cualquier número terminado en 2 no es nunca divisible por 5. Recordemos que un número es divisible por 5 si y sólo si su representación decimal termina en 0 ó en 5.

Además el número $15 \cdot n$ debe también ser divisible por 3. La regla de divisibilidad de 3 nos dice que la suma de los dígitos de $15 \cdot n$ debe ser divisible por 3. Como son 0 ó 2 ello no es posible puesto que:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0\,,2 \text{ y } a_3 = 0\,,2$$

la suma de cualquier combinación no es nunca divisible por 3.

d) Estudiemos el caso de cuatro dígitos. Supongamos que

$$15 \cdot n = a_4a_3a_2a_1 = a_1 + a_2 \cdot 10 + a_3 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10^3 .$$

Igual que antes $a_1 = 0$ y la suma $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = a_4 + a_3 + a_2$ debe ser divisible por 3.

En este caso si se puede dar si todos valen 2. En resumen, el primer número con dígitos 0 y 2 es

$$15 \cdot n = 2220$$

Despejando se obtiene el resultado n = 148.

3. Encuentre todas las funciones $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con la propiedad de que para todo par de números enteros x, y se cumple la ecuación

$$f(x + f(f(y))) = y + f(f(x)) \qquad (*)$$

Solución

Aplicando la función f a la igualdad anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} f[f(x + f(f(y)))\ ] &= f[\,y + f(f(x))] \\ f[f(x + f(f(y)))\ ] &= x + f(f(y))\,. \end{aligned}$$

Si fijamos el parámetro y, llamamos $a = f(f(y))$ se obtiene la igualdad $f\big(f(x + a)\big) = x + a$.

Pero $z = x + a$ recorre todo los enteros en $\mathbb{Z}$, se deduce que

$$f\big(f(z)\big) = z\ .$$

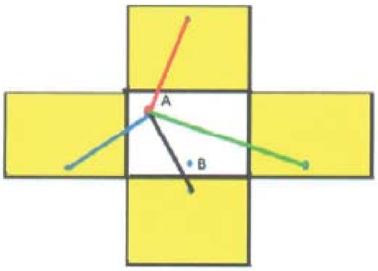
Luego de la igualdad (*) se deduce además que $f(x + y) = x + y$

Por lo tanto la única función que cumple la igualdad (*) es $f(x) = x$

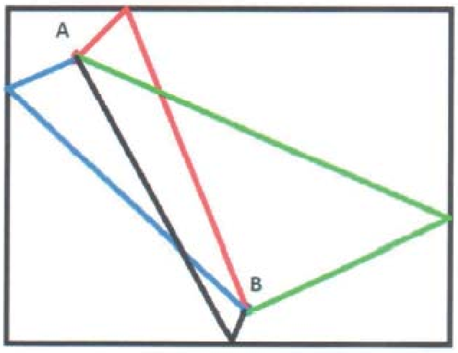
4. Calcular la cantidad máxima de caminos distintos que se pueden construir en una mesa de billar para unir dos bolas con un tiro a tres bandas.

Solución

Se refleja cada rectángulo respecto a sus lados como muestra la figura.
Un tiro a una banda consiste en unir A con B de tal manera de aterrizar en el interior de uno de los reflejados. La trayectoria queda totalmente determinado al trazar la recta que une el punto A con el punto reflejado B., como muestra la figura

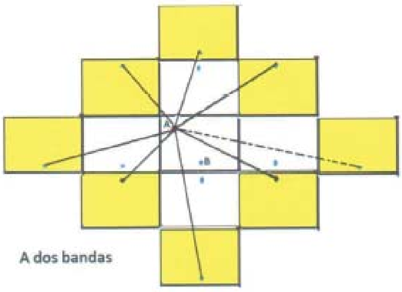


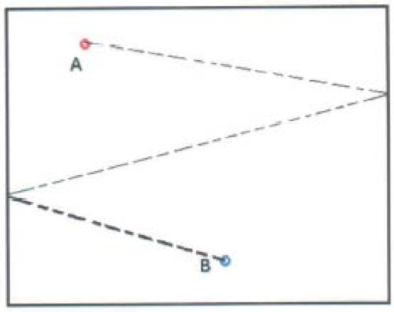
A una banda



A lo más hay cuatro trazos que unen al punto A con uno de sus cuatro reflejados.
Por lo tanto, hay a lo más 4 trayectorias para un tiro con una banda.

Para dos bandas, completamos la figura anterior de la siguiente manera: Un tiro a dos bandas significa que se debe llegar al desde A al reflejado de B en uno de los 8 rectángulos pintados

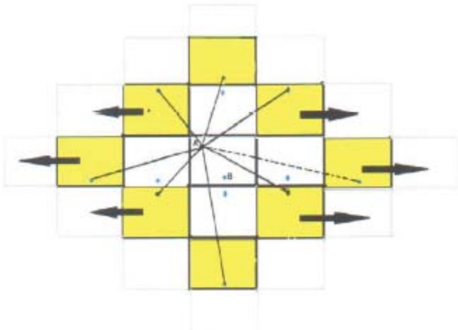




A lo más hay 8 trazos con esa propiedad, puesto que hay a lo más una recta (camino) que une al punto A con el reflejado de B en cada rectángulo del anillo amarillo, y por lo tanto hay a lo más 8 trayectorias distintas que unen a A con B pegando en dos bandas (u orillas).

Entonces para n = 2 hay a lo más 8 trayectorias.

Para tres bandas hay que agregar un nuevo anillo de rectángulos, que los coloreamos blancos en la figura



Asociamos a cada uno de los 6 rectángulos amarillos, marcados con flecha, un rectángulo (ver figura).

Los dos rectángulos extremos, de arriba y abajo, tienen asociado tres rectángulos, con ellos formamos la capa a distancia tres bandas.

Entonces en total hay : $6 + 2 \cdot 3 = 12$ rectángulos a distancia tres del centro.

Hay 12 líneas que unen el punto A con cada uno de los puntos reflejados de B dentro de cada uno de ellos.

Además este número se realiza para una posición adecuada de A y B en el rectángulo.