XIV CMAT Campeonato Escolar de Matemáticas

PrimeraFecha
23 de Abril de 2016
Soluciones
Individual

Primer Nivel

1 En una reunión hay 201 personas de cinco nacionalidades diferentes. Se sabe que en cada grupo de seis personas, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que existen al menos cinco personas que son del mismo país, edad y sexo.

Solución

Se explicará la solución de este problema teniendo presente el *Principio del Palomar*.
Como hay cinco nacionalidades diferentes, en el peor de los casos (el que va contra nuestro objetivo) tendremos cinco grupos con personas de la misma nacionalidad de: 40, 40, 40, 40 y 41 integrantes, respectivamente. En lo que sigue, trabajaremos con el grupo de 41 personas que son del mismo país.
Hemos de notar que, como en cada grupo de seis personas, al menos dos tienen la misma edad, entonces hay a lo más cinco posibles edades diferentes. En otro caso, seríamos capaces de formar un grupo de seis personas que tuviese solo integrantes con diferentes edades.
Siguiendo con la idea del peor de los casos (cinco posibles edades diferentes), podemos dividir el grupo de 41 personas en cinco subgrupos con personas de la misma edad de: 8, 8, 8, 8 y 9 integrantes, respectivamente. En este último grupo de 9 personas tendremos 4 de un mismo sexo y 5 del otro sexo, en el peor de los casos. Y estos últimos cinco tienen igual nacionalidad, edad y sexo.

2 Un dígito k es un *unidivi* de un número natural n si k es el dígito de las unidades de algún divisor de n. Por ejemplo, los divisores de 25 son 1, 5 y 25, entonces sus unidivis son 1 y 5. Encuentre el menor número natural que tenga 10 unidivis.

Solución

Note usted que existen 10 dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, entonces todos ellos deben ser unidivis de n. Como 0 es unidivi de n, entonces n tiene un divisor que es múltiplo de 10, luego n también es múltiplo de 10. Esto garantiza que 1, 2 y 5 son unidivi de n y ahora es suficiente encontrar n tal que 3, 7 y 9 sean unidivi de n. Concluímos que el número buscado es múltiplo de 90. Verificando entre los primeros múltiplos de 90 tenemos que $270 = 2 \times 3^3 \times 5$, es el menor número que tiene 10 unidivis. En efecto, lo dividen $1, 2, 3, 5, 6, 9$ y 10. También lo dividen $18, 27$ y 54. Así 270 es el menor número con 10 unidivis.

Segundo Nivel

1 Sean a, b, c primos tales que:

$$\begin{aligned} ab + bc &= 189 \\ ab + ac &= 128 \end{aligned}$$

Encuentre el valor de $a^b + c$.

Solución

Solución 1:

Escribamos las igualdades de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} b\,(a+c) &= 189 \\ a\,(b+c) &= 128 \end{aligned}$$

Note en la primera igualdad que $189 = 3^3 \cdot 7$, por lo que b (al ser primo) puede tener valor 3 o 7. Luego, se nos abren dos casos: $b = 3$ o $b = 7$. En la segunda igualdad tenemos que $128 = 2^7$, por lo que necesariamente $a = 2$. Sabiendo esto, si en la primera ecuación $b = 7$, tenemos que $2 + c = 27$ y por consiguiente que $c = 25$, que no es primo. Luego, tenemos que $b = 3$, $a = 2$ y $c = 61$, obteniendo que $a^b + c = 2^3 + 61 = 69$.

Solución 2:

Resolvamos como sistema de ecuaciones. Restando la primera con la segunda ecuación, obtenemos:

$$c\,(b-a) = 61$$

Como 61 es primo, necesariamente debe cumplirse que $c = 61$ y $b - a = 1$. Luego, $b = 3$ y $a = 2$, y $a^b + c = 69$.

2 Sea $ABCD$ un trapecio con bases $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, tal que $AD < BC$ y $AB = BC = CD$. Sea P un punto en el lado $\overline{BC}$ tal que $\overline{AP} \perp \overline{BC}$.
Sea M un punto cualquiera en el lado $\overline{BC}$ y sean T y R puntos en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, tales que $\overline{MT} \perp \overline{AB}$ y $\overline{MR} \perp \overline{CD}$.
Demuestre que $AP = MT + MR$.

Solución

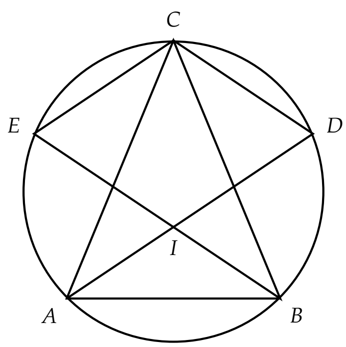
Como los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son paralelos, entonces Área$(\triangle AMC) =$ Área$(\triangle DMC)$, luego:

$$\begin{aligned} \text{Área}(\triangle ABC) &= \text{Área}(\triangle AMB) + \text{Área}(\triangle AMC) \\ \text{Área}(\triangle ABC) &= \text{Área}(\triangle AMB) + \text{Área}(\triangle DMC) \\ \frac{BC \cdot AP}{2} &= \frac{AB \cdot MT}{2} + \frac{CD \cdot MR}{2} \end{aligned}$$

Como $AB = BC = CD$, multiplicando la igualdad anterior por $\dfrac{2}{AB}$ se tiene $AP = MR + MT$.

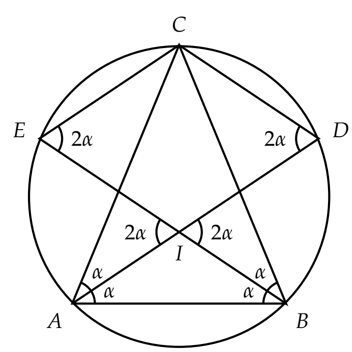
Tercer Nivel

1 En un triángulo isósceles ABC se trazan las bisectrices AI y BI de los ángulos basales, los cuales intersectan a la circunferencia circunscrita en los puntos D y E.
Demostrar que el cuadrilátero $CEID$ es un rombo.



Solución

Sea $\alpha = \measuredangle BAD = \measuredangle CAD = \measuredangle ABE = \measuredangle CBE$. Por ángulo exterior en el triángulo $\triangle ABI$, se tiene $\measuredangle AIE = 2\alpha$. Los ángulos inscritos en la circunferencia circunscrita: $\angle ABC$ y $\angle ADC$ subtienden el mismo arco AEC, entonces $\measuredangle ADC = 2\alpha$. Todo esto se muestra en la figura:



Entonces $\measuredangle ADC = \measuredangle AIE$, luego los lados $\overline{CD}$ y $\overline{EI}$ son paralelos. Análogamente, los lados $\overline{CE}$ y $\overline{DI}$ son paralelos. Entonces el cuadrilátero $CEID$ es (al menos) un paralelogramo.
Por otra parte, los ángulos inscritos $\angle CAD$ y $\angle CBE$ miden α, entonces $CD = CE$. Como el paralelogramo $CEID$ tiene dos lados consecutivos congruentes, entonces $CEID$ es un rombo.

2 Si Patito no está haciendo clases, está cocinando; y si no está cocinando, está viendo series. Si Patito puede hacer solo una cosa a la vez, ¿Qué está haciendo Patito?

Solución

Definamos las proposiciones lógicas:

$$\begin{aligned} p &= \text{Patito está en clases.} \\ q &= \text{Patito está cocinando.} \\ r &= \text{Patito está viendo series.} \end{aligned}$$

Sabemos que exactamente una de estas proposiciones es verdadera (las otras dos son falsas).
Sean $\neg$ y $\Rightarrow$ los conectores lógicos de negación y condicional, respectivamente ($\neg s$: "no s"; $s \Rightarrow t$: "si s, entonces t"). Podemos escribir las frases de la siguiente forma:

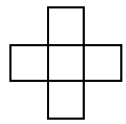
$$\neg p \Rightarrow q, \qquad\qquad \neg q \Rightarrow r$$

Solución 1:
Supongamos que p es verdadera. Entonces q y r son falsas, y $\neg q$ es verdadera. La segunda frase es falsa porque una proposición verdadera implica una proposición falsa. Por lo tanto, *p es falsa y $\neg p$ es verdadera*.
Por la primera frase, como $\neg p$ es verdadera, entonces q es verdadera, luego r y $\neg q$ son falsas. La segunda frase es verdadera porque una proposición falsa implica una proposición falsa. Finalmente, *Patito está cocinando*.

Solución 2:
La primera frase es lógicamente equivalente a: $\neg q \Rightarrow p$. Si Patito no está cocinando ($\neg q$), entonces está haciendo clases (p) y viendo series (r), lo que es imposible porque Patito puede hacer solo una cosa a la vez. Por lo tanto, *Patito está cocinando*.

Cuarto Nivel

1 Arturo y Miguel han creado un juego de *Combate Naval* con las siguientes reglas: cada uno dispone de un tablero cuadriculado de $n \times n$. En primer lugar, Arturo debe colocar su barco sobre su tablero, sin que Miguel pueda ver. El barco de Arturo es una ficha con la siguiente forma y debe cubrir exactamente cinco fichas del tablero. No está permitido mover la ficha:



Miguel, quien conoce la forma del barco de Arturo pero no su posición, marca algunas casillas de su tablero (representando disparos). Miguel gana el juego si logra hundir el barco de Arturo; en caso contrario, Arturo gana.

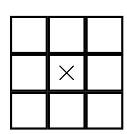
a) Suponga que el barco de Arturo es el *Huáscar*, que sólo se hunde si recibe 5 disparos. Determine, en función de n, la menor cantidad de disparos que Miguel necesita marcar en su tablero para asegurar su victoria. Para esta cantidad mínima, indique la posición de los disparos.

b) Suponga que el barco de Arturo es la *Esmeralda*, que se hunde si recibe al menos un disparo. **Para cada n** $\in \{\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$, determine la menor cantidad de disparos que Miguel necesita marcar en su tablero para asegurar su victoria y, para esta cantidad mínima, indique una posible posición de los disparos.

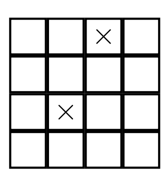
Solución

a) Miguel necesita marcar $n^2 - 4$ disparos (uno en cada casilla, excepto en las cuatro esquinas) para asegurar la victoria. Si Miguel marca menos disparos, entonces existe una casilla C, distinta de las esquinas y sin marcar; Miguel perdería si el Huáscar cubre la casilla C.

b) $\boxed{n = 3}$ Miguel necesita marcar al menos un disparo. Como existe una única posición posible para la Esmeralda, entonces un disparo es suficiente para asegurar su victoria, por ejemplo, en la casilla central:



$\boxed{n = 4}$ Existen cuatro posiciones posibles para la Esmeralda y ninguna casilla es común a estas cuatro posiciones, entonces Miguel necesita marcar al menos dos disparos. Además, dos disparos es suficiente para asegurar su victoria, por ejemplo:



$\boxed{n=5}$ En cada casilla del tablero se escribe la cantidad de posiciones de la Esmeralda que cubren dicha casilla. En otras palabras, un disparo a una casilla permite hundir la Esmeralda en tantas posiciones como el número indicado en dicha casilla:

0	1	1	1	0
1	3	4	3	1
1	4	5	4	1
1	3	4	3	1
0	1	1	1	0

Si Miguel pudiera asegurar su victoria marcando dos disparos, entonces estos disparos deben ser en casillas con números a y b tales que $a+b \geq 9$, luego $a=5$ y $b=4$ (o viceversa), entonces Miguel debe marcar dos disparos como se muestra en la figura (o una rotación de ella):

		×		
		×		

Sin embargo, estos dos disparos no hunden la Esmeralda en todas las posiciones posibles. Por lo tanto, Miguel necesita marcar al menos tres disparos. Además, tres disparos es suficiente para asegurar su victoria, por ejemplo:

	×		×	
		×		

2 Dado un cubo, a cada vértice se asigna un número real positivo y en cada cara se escribe el producto de los números asignados a sus cuatro vértices. Sean P el producto de los números asignados a los ocho vértices del cubo y Q la suma de los cuadrados de los números escritos en las seis caras.

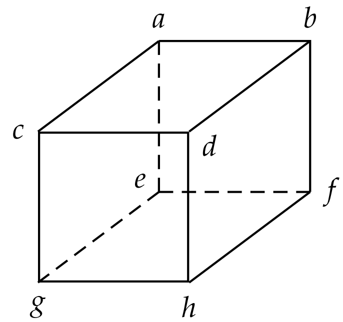
a) Pruebe que $Q \geq 6P$.

b) Asigne un número entero positivo a cada vértice de manera tal que:

- los ocho números sean distintos,
- ningún número entero, diferente de 1, divida a los ocho números, y
- $Q = 6P$.

Solución

Sean a, b, c, d, e, f, g y h los números asignados a los vértices, como se muestra en la figura:



Entonces $P = abcdefgh$ y $Q = ((abcd)^2 + (efgh)^2) + ((abef)^2 + (cdgh)^2) + ((aceg)^2 + (bdfh)^2)$.

a) Si x e y son números reales positivos, entonces:

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &\geq 0\\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0\\ x^2 + y^2 &\geq 2xy,\end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si $x = y$. Usando esta desigualdad, cada uno de los tres paréntesis grandes de la expresión de Q es mayor o igual que $2P$. Por lo tanto, $Q \geq 6P$.

b) $Q = 6P$, entonces $abcd = efgh$, $abef = cdgh$ y $aceg = bdfh$. De la primera igualdad se tiene $h = \dfrac{abcd}{efg}$.
Sustituyendo h en las otras dos igualdades:

$$abef = cdg \cdot \frac{abcd}{efg} \Rightarrow e^2f^2 = c^2d^2 \Rightarrow ef = cd \Rightarrow f = \frac{cd}{e}$$

$$aceg = bdf \cdot \frac{abcd}{efg} \Rightarrow e^2g^2 = b^2d^2 \Rightarrow eg = bd \Rightarrow g = \frac{bd}{e}$$

Sustituyendo f y g en la expresión de h: $h = \dfrac{abcd}{e} \cdot \dfrac{e}{cd} \cdot \dfrac{e}{bd} = \dfrac{ae}{d}$.
Por ejemplo, si $e = 1$ y $d = 2$, entonces $f = 2c$, $g = 2b$ y $2h = a$. Podemos asignar valores a a, b, c, f, g y h sin repeticiones, obteniendo, por ejemplo: $(a, b, c, d, e, f, g, h) = (6, 4, 5, 2, 1, 10, 8, 3)$.