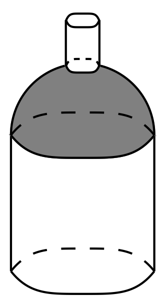
Primer Nivel

1 En cada una de las 2016^2 casillas de un tablero cuadriculado de 2016×2016 se escribe uno de los números -69, 0 ó 69. Pruebe que al menos dos de las $2017 \cdot 2$ sumas posibles (2016 horizontales, 2016 verticales y 2 diagonales) son iguales.

Solución

La máxima suma posible es $69 \cdot 2016$ (cuando todos los números son 69); análogamente, la mínima suma posible es $-69 \cdot 2016$. Además, todas las sumas posibles son divisibles por 69. Así, entre las sumas posibles existen 2016 positivas, 2016 negativas y el 0; en total son $2 \cdot 2016 + 1$ sumas posibles. Finalmente, por el principio del palomar, al menos dos de estas sumas son iguales.

2 En la figura se muestra una botella de 1000π cm.^{3} de capacidad, que se divide en tres partes: la parte inferior es un cilindro con 8 cm. de diámetro basal y 48 cm. de altura; la parte intermedia está coloreada; la parte superior es un cilindro cuyo diámetro basal mide $\frac{1}{4}$ del diámetro basal de la parte inferior y cuya altura mide $\frac{1}{3}$ de la altura de la parte inferior. Calcule el volumen de la zona pintada.



Solución

La capacidad total de la botella es la suma de la capacidad de sus tres partes. La parte inferior es un cilindro con 4 cm. de radio basal y 48 cm. de altura. La parte superior es un cilindro con 1 cm. de radio basal y 16 cm. de altura.

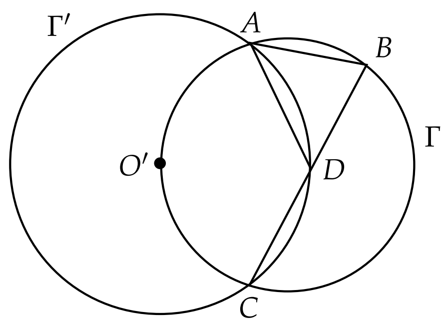
Sea x el volumen de la zona pintada. Entonces:

$$\begin{aligned}
1000\pi \text{ cm.}^3 &= \pi \cdot (4 \text{ cm.})^2 \cdot 48 \text{ cm.} + \pi \cdot (1 \text{ cm.})^2 \cdot 16 \text{ cm.} + x \\
1000\pi \text{ cm.}^3 &= 768\pi \text{ cm.}^3 + 16\pi \text{ cm.}^3 + x \\
216\pi \text{ cm.}^3 &= x
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen de la zona pintada es 216π cm.^{3}.

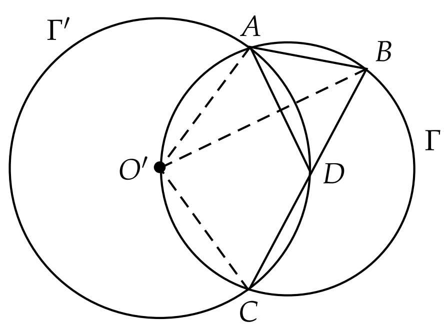
Segundo Nivel

1 Sean Γ y Γ' dos circunferencias secantes en los puntos A y C, de manera tal que Γ pasa por el centro O' de Γ', como se muestra en la figura. Sea B un punto de Γ, exterior a Γ'. La cuerda $\overline{BC}$ intersecta a Γ' en el punto D. Pruebe que $BD = BA$.



Solución

Sea α tal que $\measuredangle ABC = 2\alpha$. Se trazan los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$:



El cuadrilátero $ABCO'$ está inscrito en Γ, entonces $\measuredangle CO'A = 180^\circ - 2\alpha$. El ángulo $\angle ADC$, inscrito en Γ', subtiende un arco cuyo ángulo central mide $180^\circ + 2\alpha$, entonces $\measuredangle ADC = 90^\circ + \alpha$.
Los ángulos $\angle ADB$ y $\angle ADC$ son suplementarios, entonces $\measuredangle ADB = 90^\circ - \alpha$. Además, la suma de los ángulos interiores del triángulo $\triangle ABD$ es 180°, entonces $\measuredangle BAD = 90^\circ - \alpha$.
Como $\measuredangle BAD = 90^\circ - \alpha = \measuredangle BDA$, entonces $BD = BA$.

2 Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $a + d \neq 0$ y $b + c \neq 0$. Si $\dfrac{a+b}{b+c} = \dfrac{c+d}{d+a}$, muestre que $a = c$ o $a + b + c + d = 0$.

Solución

Primera Solución
Si $c+d=0$, entonces $a+b=0$ y $a+b+c+d=0$. Suponemos, en lo que sigue, que $c+d\neq 0$.
Reescribiendo la igualdad:

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b+c}{d+a}$$

Sumando uno a ambos lados, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{c+d}&=\frac{b+c}{d+a}+\frac{d+a}{d+a}\\ \frac{a+b+c+d}{c+d}&=\frac{a+b+c+d}{d+a}\end{aligned}$$

Ambas fracciones tienen el mismo numerador, entonces dicho numerador es cero o los denominadores son iguales, es decir: $a+b+c+d=0$ o $c+d=d+a$. En el segundo caso se tiene $a=c$. Por lo tanto, $a=c$ o $a+b+c+d=0$.

Segunda solución
Multiplicando ambos lados de la igualdad por $(b+c)(d+a)$:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+d)&=(c+b)(c+d)\\ a^2+ab+ad+bd&=c^2+cb+cd+bd\\ a^2-c^2&=cb-ab+cd-ad\\ (a+c)(a-c)&=b(c-a)+d(c-a)\\ (a+c)(a-c)&=(b+d)(c-a)\\ (a+b+c+d)(a-c)&=0\end{aligned}$$

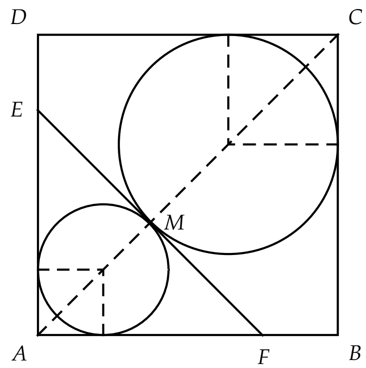
Por lo tanto, $a=c$ o $a+b+c+d=0$.

Tercer Nivel

1 Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 10. Sean $E\in\overline{AD}$ y $F\in\overline{AB}$ puntos tales que $AE=AF=a$. En el interior del triángulo $\triangle AFE$ se dibuja una circunferencia $\mathcal{C}_1$ tangente a los tres lados. En el interior del pentágono $BCDEF$ se dibuja una circunferencia $\mathcal{C}_2$ tangente a los lados $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$. Calcule la razón entre el radio de $\mathcal{C}_1$ y el radio de $\mathcal{C}_2$.

Solución

En ambas soluciones, sean r_1 y r_2 los radios de las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente.
Primera solución
Sea M el punto medio del segmento $\overline{EF}$. Las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son tangentes al segmento $\overline{EF}$ en el punto M.



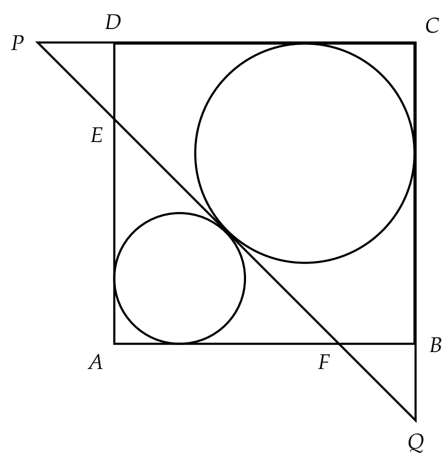
Observe que $AC = 10\sqrt{2}$ y $AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, entonces el $CM = 10\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{(20-a)\sqrt{2}}{2}$. Tenemos:

$$r_1\sqrt{2} + r_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}, \qquad r_2\sqrt{2} + r_2 = \frac{(20-a)\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r_2 = \frac{(20-a)\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}$$

Por lo tanto, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{20-a}$.

Segunda solución

Se prolongan los segmentos $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ hasta formar el triángulo $\triangle CPQ$ como se muestra en la figura:



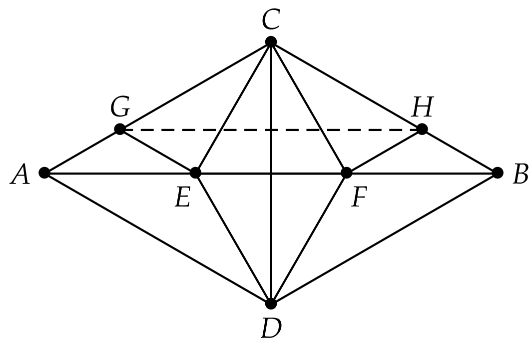
Los triángulos $\triangle AEF$ y $\triangle CPQ$ son rectángulos isósceles, entonces son semejantes, luego $\frac{r_1}{r_2} = \frac{AE}{CP}$. Observe que $AE = a$, entonces $DP = DE = 10 - a$, luego $CP = CD + DP = 20 - a$. Por lo tanto, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{20-a}$.

2 Cada punto en el plano es coloreado con blanco o negro. Pruebe que existe un triángulo cuyos ángulos miden $120°, 30°, 30°$, con el mismo color asignado a los tres vértices.

Solución

Diremos que un triángulo es *bueno* si sus ángulos miden $120°$, $30°$, $30°$. Diremos que un triángulo es *excelente* si, además de ser bueno, tiene dos vértices de un color y el tercero del otro color. Debemos probar que existe un triángulo bueno pero no excelente y, para eso, supondremos que todos los triángulos buenos son excelentes, llegando a una contradicción.

En un plano hay infinitos puntos, entonces existen dos del mismo color (sin perder generalidad, suponemos que este color es negro), que serán llamados A y B.
Se construye el rombo $ACBD$ de manera tal que $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = 30^\circ$. De esta manera, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 120^\circ$ y triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$ son equiláteros. Sean E y F el centro de los triángulos equiláteros $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$, respectivamente. Finalmente, sean $G \in \overline{AC}$ y $H \in \overline{BC}$ puntos tales que $\sphericalangle AEG = \sphericalangle BFH = 30^\circ$. Esto se muestra en la siguiente figura:



Observe que los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle CDE$, $\triangle CDF$, $\triangle AEG$, $\triangle BFH$ y $\triangle CGH$ son buenos y, por la suposición, son excelentes. Como los puntos A y B son negros, entonces los puntos C y D son blancos, luego los puntos E y F son negros, entonces los puntos G y H son blancos. Por lo tanto, el triángulo $\triangle CGH$ no es excelente, llegando a una contradicción.
Al tener una contradicción, la suposición inicial es falsa, es decir, existe un triángulo bueno que no es excelente. Esto significa que sus ángulos miden 120°, 30°, 30° y tiene sus tres vértices del mismo color.

Cuarto Nivel

1 Sea α un número que cumple con la siguiente igualdad:

$$\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

a) Pruebe que $\alpha^7 = 1$ (**Ayuda: NO intente encontrar el valor de** α)

b) Sea $\beta = \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha$. Encuentre números racionales A, B tales que $\beta^2 + A \cdot \beta + B = 0$

c) Sea $\gamma = \alpha^6 + \alpha$. Encuentre números racionales C, D, E tales que $\gamma^3 + C \cdot \gamma^2 + D \cdot \gamma + E = 0$

Solución

a) Multiplique la relación inicial por α:

$$\alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = 0$$
$$\alpha^7 = -(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha)$$

De acuerdo con la relación inicial, el lado derecho es 1.

b) Reemplazamos $\beta = \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha$ en la expresión $\beta^2 + A \cdot \beta + B$. También se usa la relación $\alpha^7 = 1$ para reducir las potencias del tipo α^k con $k \geq 7$:

$$\begin{aligned}
\beta^2 + A \cdot \beta + B &= (\alpha^4 + \alpha^2 + \alpha)^2 + A \cdot (\alpha^4 + \alpha^2 + \alpha) + B \\
&= \alpha^8 + \alpha^4 + \alpha^2 + 2\alpha^6 + 2\alpha^5 + 2\alpha^3 + A\alpha^4 + A\alpha^2 + A\alpha + B \\
&= \alpha + \alpha^4 + \alpha^2 + 2\alpha^6 + 2\alpha^5 + 2\alpha^3 + A\alpha^4 + A\alpha^2 + A\alpha + B \\
&= 2\alpha^6 + 2\alpha^5 + (A+1)\alpha^4 + 2\alpha^3 + (A+1)\alpha^2 + (A+1)\alpha + B
\end{aligned}$$

Una manera de lograr que $\beta^2 + A \cdot \beta + B = 0$ es que todos los coeficientes arriba sean iguales a 2, entonces con $A = 1, B = 2$ se tiene $\beta^2 + \beta + 2 = 0$

c) Reemplazamos $\gamma = \alpha^6 + \alpha$ en la expresión $\gamma^3 + C \cdot \gamma^2 + D \cdot \gamma + E = 0$. También se usa la relación $\alpha^7 = 1$ para reducir las potencias del tipo α^k con $k \geq 7$:

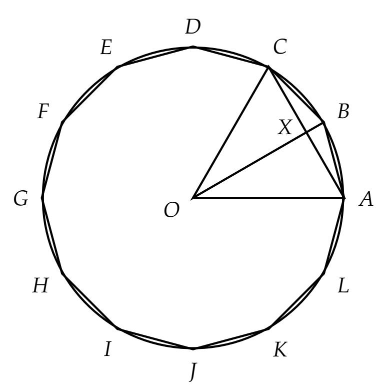
$$\begin{aligned}
\gamma^3 + C \cdot \gamma^2 + D \cdot \gamma + E &= (\alpha^6 + \alpha)^3 + C \cdot (\alpha^6 + \alpha)^2 + D \cdot (\alpha^6 + \alpha) + E \\
&= \alpha^{18} + 3\alpha^{13} + 3\alpha^8 + \alpha^3 + C\alpha^{12} + 2C\alpha^7 + C\alpha^2 + D\alpha^6 + D\alpha + E \\
&= \alpha^4 + 3\alpha^6 + 3\alpha + \alpha^3 + C\alpha^5 + 2C + C\alpha^2 + D\alpha^6 + D\alpha + E \\
&= (D+3)\alpha^6 + C\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + C\alpha^2 + (D+3)\alpha + (2C+E)
\end{aligned}$$

Una manera de lograr que $\gamma^3 + C \cdot \gamma^2 + D \cdot \gamma + E = 0$ es que todos los coeficientes arriba sean iguales a 1, entonces con $C = 1, D = -2, E = -1$ se tiene $\gamma^3 + \gamma^2 - 2\gamma - 1 = 0$

2 Sea $\mathcal{D}$ un dodecágono (polígono de doce lados) regular inscrito en una circunferencia de radio r. Pruebe que el área de $\mathcal{D}$ es $3r^2$.

Solución

Sean O el centro de la circunferencia y $\mathcal{D} = ABCDEFGHIJKL$, como se muestra en la figura. Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{OB}$ se intersectan en el punto X:



Como $OA = OC = r$ y $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$, entonces el triángulo $\triangle OAC$ es equilátero. Como $\overline{OB}$ es la bisectriz del ángulo $\angle AOC$, entonces $\overline{OB} \perp \overline{AC}$ y, además, $AX = \dfrac{r}{2}$. Entonces el área del triángulo $\triangle OAB$ es:

$$[\triangle OAB] = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AX = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2}{4}$$

Uniendo O con cada vértice de $\mathcal{D}$, este polígono queda dividido en doce triángulos congruentes, entonces el área de $\mathcal{D}$ es 12 veces el área del triángulo $\triangle OAB$, es decir:

$$[\mathcal{D}] = 12 \cdot [\triangle OAB] = 12 \cdot \frac{r^2}{4} = 3r^2$$