XIV

CMAT Campeonato Escolar de Matemáticas

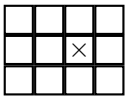
TerceraFecha
18 de Junio de 2016
Mayor
Grupal

Entreguen solo una respuesta por equipo.

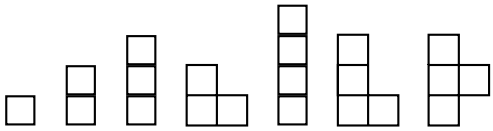
Combinatoria y tableros cuadriculados

Algunos problemas de matemática finita consisten en determinar si es posible realizar una tarea y, en caso afirmativo, determinar de cuántas maneras se puede realizar. La *combinatoria* es el área de la matemática que estudia este tipo de problemas. En esta prueba será aplicada la combinatoria (técnicas de conteo y recurrencias) para resolver problemas sobre tableros cuadriculados.

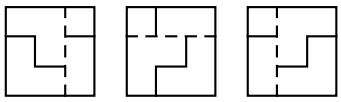
Sean m y n números enteros positivos. Vamos a fijar una unidad de distancia (por ejemplo, el centímetro). Un *tablero cuadriculado con m filas y n columnas*, o *tablero* $m \times n$, es un rectángulo con m unidades de alto y n unidades de ancho, dividido en mn cuadrados unitarios (de lado 1 unidad) disjuntos. La casilla ubicada en la intersección de la fila i (de arriba hacia abajo) y la columna j (de izquierda a derecha) será denotada (i, j). En la figura se muestra un tablero 3×4 con una cruz marcada en la casilla $(2, 3)$:



Se dispone también de *fichas*, formadas por cuadrados unitarios como se muestra en la figura. Estas fichas serán llamadas I_1, I_2, I_3, L_3, I_4, L_4 y T_4, de izquierda a derecha (observe que el subíndice indica la cantidad de cuadrados unitarios que forman cada ficha). A menos que se indique lo contrario, se dispone de una cantidad ilimitada de estas fichas y está permitido rotarlas y voltearlas.



Cubrir un tablero significa colocar fichas sobre él para cubrir todas sus casillas. Las fichas no se pueden superponer, ni cubrir una región fuera del tablero, ni cubrir parcialmente algunas casillas. En la figura se muestran tres maneras distintas de cubrir un tablero 3×3 usando dos fichas L_3, una ficha I_2 y una ficha I_1:

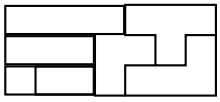


Dado un tablero $m \times n$ cubierto por fichas, una *falla* (del cubrimiento) es una línea recta horizontal o vertical que divide el tablero en dos subtableros sin cortar fichas. En la figura anterior, cada uno de los tres cubrimientos tiene una falla que está indicada por una línea discontinua.

A continuación presentamos un ejemplo del tipo de preguntas que haremos en esta prueba.

Pregunta de ejemplo Encuentren todos los pares (m, n) de números enteros positivos tales que $m \leq n$ y que se pueda cubrir un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_1, I_2, I_3, L_3, I_4, L_4 y T_4 exactamente una vez. Para cada par (m, n) encontrado, muestre un cubrimiento *libre de fallas* de un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_1, I_2, I_3, L_3, I_4, L_4 y T_4 exactamente una vez.

Respuesta Las siete fichas cubren, en total, $1 + 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 21 = 3 \cdot 7$ fichas, entonces $(m, n) = (1, 21)$ o $(m, n) = (3, 7)$. La opción $(1, 21)$ es imposible porque no se pueden colocar las fichas L_3, L_4 y T_4 en un tablero 1×21. La opción $(3, 7)$ es posible y en la figura se muestra un cubrimiento libre de fallas:



1. (3 puntos) Se desea cubrir un tablero 3×3 usando dos fichas L_3, una ficha I_2 y una ficha I_1.

   a) Demuestren que la ficha I_1 debe cubrir una esquina del tablero.

   b) Demuestren que la ficha I_2 no puede cubrir la casilla central del tablero.

   c) Determinen la cantidad de cubrimientos del tablero 3×3 usando estas fichas. ¿Cuántos de estos cubrimientos son libres de fallas?

2. (2 puntos) Encuentren todos los pares (m, n) de números enteros positivos tales que $m \leq n$ y que se pueda cubrir un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_1, I_2, I_3 y L_3 exactamente una vez. Para cada par (m, n) encontrado, determinen la cantidad de cubrimientos del tablero $m \times n$ usando estas fichas.

3. (2 puntos) Encuentren todos los pares (m, n) de números enteros positivos tales que $m \leq n$ y que se pueda cubrir un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_2, I_4, L_4 y T_4 exactamente dos veces. Para cada par (m, n) encontrado, muestren un cubrimiento libre de fallas de un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_2, I_4, L_4 y T_4 exactamente dos veces.

4. (2 puntos) Encuentren todos los pares (m, n) de números enteros positivos tales que $m \leq n$ y que se pueda cubrir un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_3, L_3, I_4, L_4 y T_4 exactamente una vez. Para cada par (m, n) encontrado, muestren un cubrimiento libre de fallas de un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_3, L_3, I_4, L_4 y T_4 exactamente una vez.

5. (2 puntos) Sea a_n la cantidad de cubrimientos de un tablero $2 \times n$ usando fichas I_2. Encuentren a_1, a_2 y pruebe que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para todo $n \geq 3$. Determinen el valor de a_{16}

6. (2 puntos) Sea a_n la cantidad de cubrimientos de un tablero $3 \times n$ usando fichas L_3. Encuentren una fórmula para a_n y úsenla para determinar los valores de a_{2015} y a_{2016}.

7. (3 puntos) Sea a_n la cantidad de cubrimientos de un tablero $3 \times n$ usando fichas L_4. Encuentre una fórmula para a_n y úsela para encontrar a_{2016}.

   Dado un tablero $m \times n$ y cierto(s) tipo(s) de fichas disponible(s) para cubrirlo, se ha discutido la estrategia de considerar m fijo, llamar a_n a la cantidad de cubrimientos y estudiar la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$; en algunos casos, la geometría del problema invita a considerar la cantidad de cubrimientos de otro(s) tipo(s) de tablero(s), no necesariamente rectangular(es). De esta manera, se deben estudiar dos o más sucesiones simultáneamente.

8. (4 puntos) Sea a_n la cantidad de cubrimientos de un tablero $3 \times n$ usando fichas I_2. Sea b_n la cantidad de cubrimientos de un tablero $3 \times (n+1)$ después de retirar la casilla $(3, 1)$.

   a) Demuestre que, si n es impar, entonces $a_n = b_n = 0$.

   b) Encuentre a_2 y b_2.

   c) Si $n \geq 4$, pruebe que $a_n = a_{n-2} + 2b_{n-2}$ y $b_n = b_{n-2} + a_n$.

   d) Encuentre a_{10}.