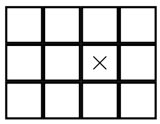
XIV

SegundaFecha
28 de Mayo de 2016
Soluciones
Grupal

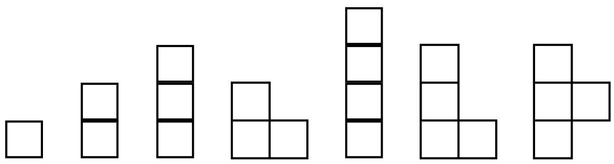
Combinatoria y tableros cuadriculados

Algunos problemas de matemática finita consisten en determinar si es posible realizar una tarea y, en caso afirmativo, determinar de cuántas maneras se puede realizar. La *combinatoria* es el área de la matemática que estudia este tipo de problemas. En esta prueba será aplicada la combinatoria (técnicas de conteo y recurrencias) para resolver problemas sobre tableros cuadriculados.

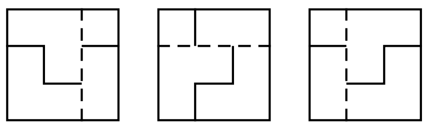
Sean m y n números enteros positivos. Vamos a fijar una unidad de distancia (por ejemplo, el centímetro). Un *tablero cuadriculado con m filas y n columnas*, o *tablero $m \times n$*, es un rectángulo con m unidades de alto y n unidades de ancho, dividido en mn cuadrados unitarios (de lado 1 unidad) disjuntos. La casilla ubicada en la intersección de la fila i (de arriba hacia abajo) y la columna j (de izquierda a derecha) será denotada (i, j). En la figura se muestra un tablero 3×4 con una cruz marcada en la casilla $(2, 3)$:



Se dispone también de *fichas*, formadas por cuadrados unitarios como se muestra en la figura. Estas fichas serán llamadas I_1, I_2, I_3, L_3, I_4, L_4 y T_4, de izquierda a derecha (observe que el subíndice indica la cantidad de cuadrados unitarios que forman cada ficha). A menos que se indique lo contrario, se dispone de una cantidad ilimitada de estas fichas y está permitido rotarlas y voltearlas.



Cubrir un tablero significa colocar fichas sobre él para cubrir todas sus casillas. Las fichas no se pueden superponer, ni cubrir una región fuera del tablero, ni cubrir parcialmente algunas casillas. En la figura se muestran tres maneras distintas de cubrir un tablero 3×3 usando dos fichas L_3, una ficha I_2 y una ficha I_1:



Dado un tablero $m \times n$ cubierto por fichas, una *falla* (del cubrimiento) es una línea recta horizontal o vertical que divide el tablero en dos subtableros sin cortar fichas. En la figura anterior, cada uno de los tres cubrimientos tiene una falla que está indicada por una línea discontinua.

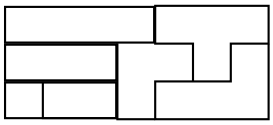
A continuación presentamos un ejemplo del tipo de preguntas que haremos en esta prueba.

Pregunta de ejemplo Encuentren todos los pares (m, n) de números enteros positivos tales que $m \leq n$ y que se pueda cubrir un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_1, I_2, I_3, L_3, I_4, L_4 y T_4 exactamente una vez. Para cada par (m, n) encontrado, muestre un cubrimiento *libre de fallas* de un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_1, I_2, I_3, L_3, I_4, L_4 y T_4 exactamente una vez.

Solución:

Las siete fichas cubren, en total, $1 + 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 21 = 3 \cdot 7$ fichas, entonces $(m, n) = (1, 21)$ o $(m, n) = (3, 7)$. La opción $(1, 21)$ es imposible porque no se pueden colocar las fichas L_3, L_4 y T_4 en un tablero 1×21. La opción

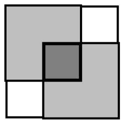
$(3,7)$ es posible y en la figura se muestra un cubrimiento libre de fallas:



1. Se desea cubrir un tablero 3×3 usando dos fichas L_3, una ficha I_2 y una ficha I_1.
   a) Demuestren que la ficha I_1 debe cubrir una esquina del tablero.
   b) Demuestren que la ficha I_2 no puede cubrir la casilla central del tablero.
   c) Determinen la cantidad de cubrimientos del tablero 3×3 usando estas fichas. ¿Cuántos de estos cubrimientos son libres de fallas?

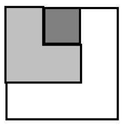
Solución:

a) Si la ficha I_1 cubre la casilla central del tablero, entonces hay una manera (identificando las rotaciones) de colocar las dos fichas L_3, como se muestra en la figura:



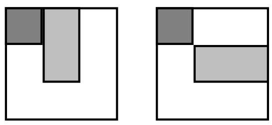
Entonces no es posible colocar la ficha I_2, contradicción. Por lo tanto, la ficha I_1 no cubre la casilla central.

Si la ficha I_1 cubre la casilla $(1,2)$ (el mismo razonamiento sirve para las casillas $(2,1)$, $(2,3)$ y $(3,2)$, aplicando una rotación), entonces una ficha L_3 debe cubrir una de las casillas $(1,1)$ o $(1,3)$. Identificando las simetrías, se tiene la situación mostrada en la figura:



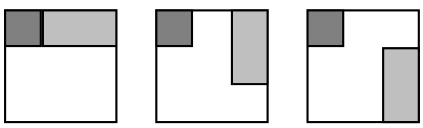
Entonces no es posible colocar, en lo que queda vacío del tablero, la ficha I_2 y la otra ficha L_3, contradicción. Por lo tanto, la ficha I_1 debe cubrir una esquina del tablero. *Identificando los diversos cubrimientos por medio de rotaciones, podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que la ficha I_1 cubre la casilla $(1,1)$, esto significa que la cantidad de formas en que cubramos el tablero manteniendo la ficha I_1 en el lugar $(1,1)$ se debe multiplicar por cuatro para obtener la cantidad de formas de cubrir el tablero con estas fichas.*

b) Si la ficha I_2 cubre la casilla central del tablero, entonces hay dos maneras (identificando las simetrías) de colocar la ficha I_2, como se muestra en la figura:



Entonces no es posible colocar las dos fichas L_3, contradicción. Por lo tanto, la ficha I_2 no puede cubrir la casilla central del tablero.

c) Identificando también las simetrías (lo que significará multiplicar la cantidad de formas que obtengamos por 2), vemos que hay tres maneras de colocar la ficha I_2:



En el primer caso hay dos maneras de colocar las fichas L_3 y ambas tienen una falla; en el segundo caso no es posible colocar las dos fichas L_3; en el tercer caso hay una manera de colocar las fichas L_3 y es libre de fallas. Por lo tanto, hay 24 cubrimientos del tablero 3×3 y 8 de ellos son libres de fallas.

2. Encuentren todos los pares (m, n) de números enteros positivos tales que $m \leq n$ y que se pueda cubrir un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_1, I_2, I_3 y L_3 exactamente una vez. Para cada par (m, n) encontrado, determinen la cantidad de cubrimientos del tablero $m \times n$ usando estas fichas.

   Solución:

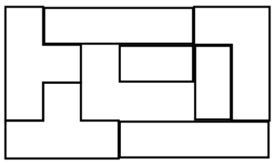
   Las cuatro fichas cubren, en total, $1 + 2 + 3 + 3 = 9 = 3^2$ casillas, entonces $(m, n) = (1, 9)$ o $(m, n) = (3, 3)$. La opción $(1, 9)$ es imposible porque no se puede colocar la ficha L_3. La opción $(3, 3)$ es posible, como se indicará a continuación:

   Es claro que la ficha I_3 no puede cubrir la casilla central del tablero(divide al tablero en dos). Identificando las rotaciones, podemos suponer que esta ficha cubre la primera fila y multiplicar el resultado por 4. Hay seis maneras de colocar la ficha I_1 y, para cada una, hay dos maneras de colocar las fichas I_2 y L_3. Por lo tanto, hay 48 cubrimientos del tablero 3×3.

3. Encuentren todos los pares (m, n) de números enteros positivos tales que $m \leq n$ y que se pueda cubrir un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_2, I_4, L_4 y T_4 exactamente dos veces. Para cada par (m, n) encontrado, muestren un cubrimiento libre de fallas de un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_2, I_4, L_4 y T_4 exactamente dos veces.

   Solución:

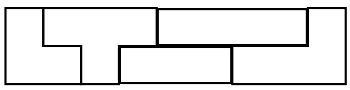
   Las ocho fichas cubren, en total, $2 \cdot (2 + 4 + 4 + 4) = 28 = 2^2 \cdot 7$ casillas, entonces $(m, n) = (1, 28)$ o $(m, n) = (2, 14)$ o $(m, n) = (4, 7)$. La opción $(1, 28)$ es imposible porque no se pueden colocar las fichas L_4 y T_4. La opción $(2, 14)$ es imposible porque, al colocar una ficha T_4, el tablero es dividido en dos regiones, cada una con una cantidad impar de casillas, entonces no se pueden cubrir estas regiones usando las fichas permitidas. La opción $(4, 7)$ es posible y en la figura se muestra un cubrimiento libre de fallas:

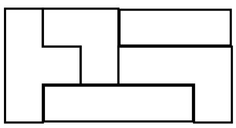


4. Encuentren todos los pares (m, n) de números enteros positivos tales que $m \leq n$ y que se pueda cubrir un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_3, L_3, I_4, L_4 y T_4 exactamente una vez. Para cada par (m, n) encontrado, muestren un cubrimiento libre de fallas de un tablero $m \times n$ usando cada una de las fichas I_3, L_3, I_4, L_4 y T_4 exactamente una vez.

   Solución:

   Las cinco fichas cubren, en total, $3 + 3 + 4 + 4 + 4 = 18 = 2 \cdot 3^2$ casillas, entonces $(m, n) = (1, 18)$ o $(m, n) = (2, 9)$ o $(m, n) = (3, 6)$. La opción $(1, 18)$ es imposible porque no se pueden colocar las fichas L_3, L_4 y T_4. Las otras opciones: $(2, 9)$ y $(3, 6)$, son posibles y en la figura se muestran cubrimientos libres de fallas:





   Dado un tablero $m \times n$ y cierto(s) tipo(s) de fichas disponible(s) para cubrirlo, queremos determinar la cantidad de cubrimientos. Una estrategia para determinar esta cantidad es considerarla como función de n. Más precisamente, es posible considerar m fijo, llamar a_n a esta cantidad y estudiar la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$

5. Sea a_n la cantidad de cubrimientos de un tablero $2 \times n$ usando fichas I_2. Encuentren a_1, a_2 y pruebe que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para todo $n \geq 3$. Determinen el valor de a_{16}

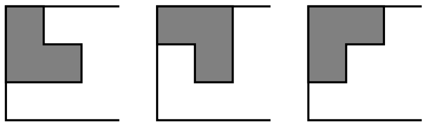
Solución:

Claramente $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$. Si $n \geq 3$, entonces la casilla $(1,1)$ se puede cubrir con una ficha orientada horizontal o verticalmente. En el primer caso, la casilla $(2,1)$ se debe cubrir con otra ficha orientada horizontalmente y falta cubrir un subtablero $2 \times (n-2)$, que se puede hacer de a_{n-2} maneras. En el segundo caso, falta cubrir un subtablero $2 \times (n-1)$, que se puede hacer de a_{n-1} maneras. Por lo tanto, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Usando esta relación de recurrencia, se tiene $a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8, \ldots, a_{16} = 1597$.

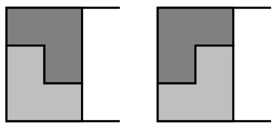
6. Sea a_n la cantidad de cubrimientos de un tablero $3 \times n$ usando fichas L_3. Encuentren una fórmula para a_n y úsenla para determinar los valores de a_{2015} y a_{2016}.

Solución:

Claramente $a_1 = 0$ y $a_2 = 2$. Si $n \geq 3$, entonces hay tres maneras de cubrir la casilla $(1,1)$:



En el primer caso no es posible cubrir la casilla $(3,1)$. En el segundo y tercer caso hay una manera de cubrir la casilla $(3,1)$:



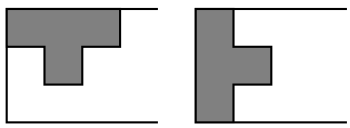
En el segundo y tercer caso, falta cubrir un subtablero $3 \times (n-2)$, que se puede hacer de a_{n-2} maneras. Por lo tanto, $a_n = 2a_{n-2}$.

Por las condiciones iniciales y la relación de recurrencia, $a_n = 0$ si n es impar y $a_n = 2^{n/2}$ si n es par. En particular, $a_{2015} = 0$ y $a_{2016} = 2^{1008}$.

7. Prueben que no es posible cubrir un tablero $3 \times n$ usando fichas T_4.

Solución:

Suponga que es posible. Hay dos maneras de cubrir la casilla $(1,1)$:



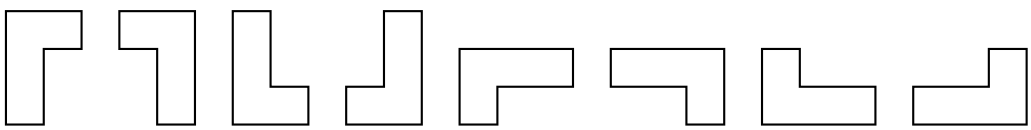
En el primer caso no es posible cubrir la casilla $(2,1)$. En el segundo caso, las fichas que cubren las casillas $(1,2)$ y $(3,2)$ se superponen. Por lo tanto, no es posible cubrir el tablero.

8. Sea a_n la cantidad de cubrimientos de un tablero $3 \times n$ usando fichas L_4. Encuentre una fórmula para a_n y úsela para encontrar a_{2016}.

Solución:

El tablero tiene $3n$ casillas. Si este tablero está cubierto con k casillas L_4, entonces $3n = 4k$, luego 4 divide a n. Es decir: si 4 no divide a n, entonces $a_n = 0$(esto es $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = \cdot = a_{4k+1} = a_{4k+2} = a_{4k+3} = 0$).

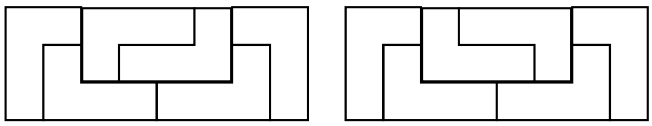
Existen ocho posiciones posibles para la ficha L_4, numeradas desde 1 hasta 8, de izquierda a derecha en la figura:



El primer paso es cubrir la casilla $(1,1)$ y esto no es posible colocando una ficha en posición 4 u 8. Si se coloca una ficha en posición 2 ó 7, entonces no será posible cubrir la casilla $(3,1)$. Si se coloca una ficha en posición 5 ó 6, entonces hay una manera de cubrir la casilla $(3,1)$ y luego no será posible cubrir la casilla $(2,2)$. Por lo tanto, la casilla $(1,1)$ se debe cubrir colocando una ficha en posición 1 ó 3. Ambas situaciones son simétricas, entonces es posible suponer que se ha colocado en posición 1 y multiplicar el resultado final por 2.

Para cubrir las casillas $(2,2)$ y $(3,2)$, se debe colocar una ficha en posición 5 ó 7. Si se elige la posición 5, entonces no será posible cubrir las casillas $(3,1)$ y $(3,3)$ (esto porqué las fichas que se usen para cubrir estas casillas coincidirán en la casilla $(2,5)$). Por lo tanto, las casillas $(2,2)$ y $(3,2)$ se deben cubrir colocando una ficha en posición 7. Ahora es claro que $a_4 = 0$. Supongamos que $n \geq 8$.

Para cubrir las casillas $(1,3)$ y $(2,3)$, se debe colocar una ficha en posición 5 ó 7. En ambos casos se debe continuar colocando fichas como se muestra en la figura:



Por lo tanto, $a_8 = 4$. Además, si $n \geq 2$, entonces $a_{8n} = 4a_{8(n-1)}$. Por las condiciones iniciales ($a_1 = \ldots = a_7 = 0$, $a_8 = 4$) y la relación de recurrencia: $a_n = 0$ si 8 no divide a n y $a_n = 4^{n/8} = 2^{n/4}$ si 8 divide a n. En particular, $a_{2016} = 2^{504}$.

Dado un tablero $m \times n$ y cierto(s) tipo(s) de fichas disponible(s) para cubrirlo, se ha discutido la estrategia de considerar m fijo, llamar a_n a la cantidad de cubrimientos y estudiar la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$; en algunos casos, la geometría del problema invita a considerar la cantidad de cubrimientos de otro(s) tipo(s) de tablero(s), no necesariamente rectangular(es). De esta manera, se deben estudiar dos o más sucesiones simultáneamente.

9. Sea a_n la cantidad de cubrimientos de un tablero $3 \times n$ usando fichas I_2. Sea b_n la cantidad de cubrimientos de un tablero $3 \times (n+1)$ después de retirar la casilla $(3,1)$.

   a) Demuestre que, si n es impar, entonces $a_n = b_n = 0$.

   b) Encuentre a_2 y b_2.

   c) Si $n \geq 4$, pruebe que $a_n = a_{n-2} + 2b_{n-2}$ y $b_n = b_{n-2} + a_n$.

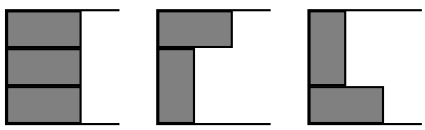
   d) Encuentre a_{10}.

   Solución:

   a) Suponga que n es impar. El tablero $3 \times n$ tiene $3n$ casillas, una cantidad impar, y el tablero $3 \times (n+1)$ después de retirar la casilla $(3,1)$ tiene $3n+2$ casillas, una cantidad impar. Como cada ficha I_2 cubre dos casillas, entonces ninguno de estos tableros puede ser cubierto. Por lo tanto, $a_n = b_n = 0$.

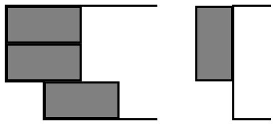
   b) $a_2 = 3$ por la Pregunta 5. Para el tablero 3×3 después de retirar la casilla $(3,1)$, la casilla $(1,1)$ se puede cubrir con una ficha orientada horizontal o verticalmente. En el primer caso, hay una manera de completar el cubrimiento. En el segundo caso, hay $a_2 = 3$ maneras. Por lo tanto, $b_2 = 4$.

   c) Para el tablero $3 \times n$: La casilla $(1,1)$ se puede cubrir con una ficha orientada horizontal o verticalmente. En el primer caso, la casilla $(2,1)$ se puede cubrir con una ficha orientada horizontal o verticalmente. En el segundo caso, la casilla $(3,1)$ se debe cubrir con una ficha orientada horizontalmente. Además, si las casillas $(1,1)$ y $(2,1)$ están cubiertas con fichas orientadas horizontalmente, entonces la casilla $(3,1)$ se debe cubrir con una ficha orientada horizontalmente. Todo esto se muestra en la figura:



Por lo tanto, $a_n = a_{n-2} + 2b_{n-2}$.

Para el tablero $3 \times (n+1)$ después de retirar la casilla $(3,1)$: La casilla $(1,1)$ se puede cubrir con una ficha orientada horizontal o verticalmente. En el primer caso, las casillas $(2,1)$ y $(3,2)$ se deben cubrir con una ficha orientada horizontalmente. Todo esto se muestra en la figura:



Por lo tanto, $b_n = b_{n-2} + a_n$.

d) Usando reiteradamente las recurrencias:

n	2	4	6	8	10
a_n	3	11	41	153	571
b_n	4	15	56	209	780