XIV
CMAT Campeonato Escolar de Matemáticas

TerceraFecha
18 de Junio de 2016
Soluciones
Individual

Primer Nivel

1 Diego sumó dos números capicúas, cada uno de cuatro dígitos, y observó con asombro que el resultado era otro número capicúa S pero de cinco dígitos, ninguno de ellos nulo. Encuentre todos los valores posibles de S y, para cada valor de S encontrado, muestre al menos dos maneras en que Diego podría obtener ese valor.
Recuerden que *un número capicúa es un número que se lee de la misma manera de izquierda a derecha o de derecha a izquierda*. Por ejemplo, 1221 es capicúa, pero 2342 no lo es.

Solución

Primera Solución
Sean $abba$ y $cddc$ los dos números capicúas de cuatro dígitos y $S = efgfe$. Sabemos que a, c, e, f y g son distintos de 0. Como $abba < 10000$ y $cddc < 10000$, entonces $efgfe = abba + cddc < 20000$. Por otro lado, $e \neq 0$, entonces $e = 1$. Por lo tanto, $abba + cddc = 1fgf1$.
Viendo el dígito de las unidades, se tiene que $a + c = 1$ o $a + c = 11$. Pero $a \geq 1$ y $c \geq 1$, entonces $a + c \geq 2$ y, por lo tanto, $a + c = 11$.
Sumando las desigualdades $1000 \cdot a \leq abba < 1000 \cdot (a + 1)$ y $1000 \cdot c \leq cddc < 1000 \cdot (c + 1)$, se tiene:

$$1000 \cdot (a + c) \leq abba + cddc < 1000 \cdot (a + c + 2),$$

es decir, $11000 \leq 1fgf1 < 13000$, entonces $f = 1$ o $f = 2$. Si $f = 1$, entonces $abba + cddc = 11g11$. Restando la igualdad $a00a + c00c = 11011$, se tiene $bb0 + dd0 = g00$, entonces $bb + dd = g0$, es decir, $11 \cdot (b + d) = g0$, que es imposible porque $10, 20, 30, \ldots, 90$ no son múltiplos de 11. Por lo tanto, $f = 2$.
Tenemos $abba + cddc = 12g21$. Restando la igualdad $a00a + c00c = 11011$, se tiene $bb0 + dd0 = 1g10$, entonces $bb + dd = 1g1$, es decir, $11 \cdot (b + d) = 1g1$. Entre los números $111, 121, 131, \ldots, 191$, el único que es múltiplo de 11 es 121, entonces $g = 2$ y $b + d = 11$. Por lo tanto, $S = 12221$ que se puede escribir, por ejemplo, como $5885 + 6336 = 12221$ o como $5335 + 6886 = 12221$.
Segunda Solución
Como en la primera solución, se concluye que $e = 1$ y $a + c = 11$, entonces $abba + cddc = 1fgf1$.
Viendo el dígito de las decenas, y recordando la reserva obtenida al sumar las unidades, se tiene uno de los siguientes dos casos: $b + d + 1 = f$ o $b + d + 1 = 10 + f$.
Si $b + d + 1 = f$, entonces $b + d < 10$, es decir, la suma de las decenas no genera reserva. Viendo el dígito de las centenas, se tiene $b + d = g$, sin generar reserva. Viendo el dígito de las unidades de mil, se tiene $a + c = 11$, entonces $f = 1$ y luego $g = 0$, contradicción. Por lo tanto, en este caso no hay solución.

Si $b + d + 1 = 10 + f$, viendo el dígito de las centenas y recordando la reserva obtenida al sumar las decenas, se tiene uno de los siguientes casos: $b + d + 1 = g$ o $b + d + 1 = 10 + g$, es decir: $10 + f = g$ o $10 + f = 10 + g$. El primer caso es imposible porque f y g son dígitos, entonces $10 + f = 10 + g$, es decir, $f = g$. Además, la suma de las centenas genera reserva. Viendo el dígito de las unidades de mil y recordando la reserva obtenida al sumar las centenas, se tiene $f = 2$. Por lo tanto, $S = 12221$ que se puede escribir, por ejemplo, como $5885 + 6336 = 12221$ o como $5335 + 6886 = 12221$.

2 Patricio escribe una sucesión de números: $2, 3, 6, 8, \ldots$ en la cual cada término, a partir del tercero, es igual al dígito de las unidades del producto de los dos términos que lo preceden. Por ejemplo $2 \cdot 3 = 6$, luego el tercer término es 6, y como $3 \cdot 6 = 18$, el cuarto término es 8. ¿Qué número escribirá Patricio en la posición 2016?

Solución

Los primeros 12 términos de la sucesión son:

$$2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, \ldots$$

Note que el tercer término se repite con el noveno, el cuarto con el décimo, y así sucesivamente. Por lo tanto, son seis términos que se van repitiendo a partir del tercero. Como $2016 = 336 \cdot 6$, entonces el número en la posición 2016 es igual al número en la posición 2010, igual al número en la posición 2004, ..., igual al número en la posición 6, que es igual a 4.

Segundo Nivel

1 Se tiene un tablero cuadriculado con 20 columnas y 16 filas. Una chinita (coccinellidae) se debe mover desde la casilla de la esquina inferior izquierda hasta la casilla de la esquina superior derecha. Ella se mueve respetando dos reglas:

- Si está en una casilla, puede moverse a cualquier casilla vecina (con un lado común), excepto aquella ubicada en la fila inferior, en caso que exista. Es decir, puede moverse hacia arriba ($\uparrow$) o hacia los lados ($\leftarrow$ y $\rightarrow$), pero no hacia abajo ($\downarrow$).
- Ella no puede pasar dos o más veces por la misma casilla.

¿Cuántos caminos distintos puede realizar la chinita?

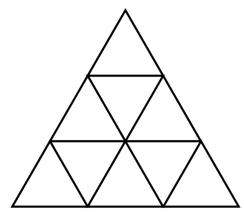
Solución

Las filas serán numeradas de 1 a 16, comenzando con la fila inferior: la fila i será denotada como F_i. Las columnas serán numeradas de 1 a 20, de izquierda a derecha.
Si conocemos un camino recorrido por la chinita, para cada $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ existe una única columna en que la chinita pasa de la fila F_i a la fila F_{i+1}; esta es la columna n_i. De esta manera, se obtiene una sucesión finita $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{15})$ con $n_i \in \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ para todo i.
Recíprocamente, cada sucesión finita $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{15})$ con $n_i \in \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ determina un camino recorrido por la chinita. De hecho, la chinita comienza moviéndose hacia la derecha hasta llegar a la

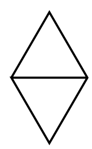
columna n_1, donde sube, luego se mueve hacia la izquierda o derecha hasta llegar a la columna n_2, donde sube, y así sucesivamente hasta llegar a la fila 16 (subiendo por la columna n_{15}); finalmente, está obligada a moverse hacia la derecha hasta llegar a la esquina.
Por lo tanto, el número de caminos es igual al número de sucesiones; este número es igual a

$$20^{15} = 32\,768\,000\,000\,000\,000\,000$$

2 Un tablero tiene la forma de un triángulo equilátero de lado n, dividido en n^2 triángulos equiláteros de lado 1 como se muestra en la figura para $n = 3$.



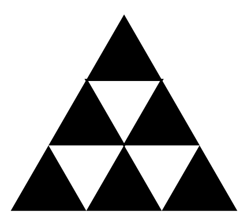
Se tienen una gran cantidad de *fichas* con la siguiente forma. Cada ficha cubre exactamente dos casillas del tablero con un lado común; las fichas pueden estar rotadas.



Determine la mayor cantidad de fichas que se pueden colocar en el tablero, sin superposiciones y de forma que queden totalmente en el tablero.

Solución

Las casillas del tablero son coloreadas de la siguiente manera:



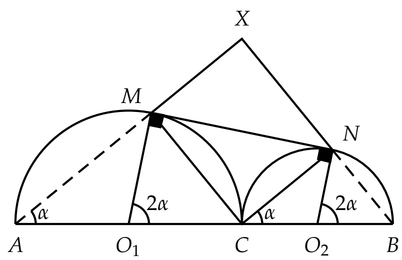
Observe que el tablero tiene $\dfrac{n(n-1)}{2}$ casillas blancas y $\dfrac{n(n+1)}{2}$ casillas negras. Ademas, cada ficha cubre exactamente una casilla blanca y una casilla negra, entonces no se pueden colocar más de $\dfrac{n(n-1)}{2}$ fichas en el tablero, sin superposiciones.
Es posible colocar $\dfrac{n(n-1)}{2}$ fichas en el tablero, sin superposiciones, de la siguiente manera: para cada casilla blanca, existe una única casilla negra con el lado horizontal común, entonces se coloca una ficha cubriendo ambas casillas.

Tercer Nivel

1 Es dado un segmento $\overline{AB}$ fijo, C es un punto variable en $\overline{AB}$. Se construyen las semicircunferencias con diámetros $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, en el mismo lado de la recta AB. Se traza la recta tangente común a ambas semicircunferencias que las toca en M y N, respectivamente. Se construye el paralelogramo $MCNX$. Demuestre que, independiente de la elección de C, X está siempre a la misma distancia del punto medio de $\overline{AB}$.

Solución

$\overline{MN}$ es la recta tangente común; si O_1 y O_2 son los centros de las semicircunferencias respectivas, entonces $\overline{MN} \perp \overline{O_1M}$ y $\overline{MN} \perp \overline{O_2N}$, luego $\overline{O_1M} \parallel \overline{O_2N}$, luego $\measuredangle MO_1C = \measuredangle NO_2B = 2\alpha$, entonces $\measuredangle MAO_1 = \alpha = \measuredangle NCO_2$ (por triángulos isósceles), por lo tanto, $\overline{AM} \parallel \overline{CN}$. Análogamente, $\overline{MC} \parallel \overline{NB}$.



Como $O_1C = O_1M$, entonces $\measuredangle O_1CM = 90° - \alpha$, luego $\measuredangle MCN = 90°$, entonces $MCNX$ es un rectángulo, luego $\measuredangle AXB = 90°$. Por lo tanto, X se mueve en la semicircunferencia con diámetro $\overline{AB}$.

2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(0) = 1$ y, para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(xy+1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2$$

Encuentre $f(x)$.

Solución

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene $f(yx+1) = f(y)f(x) - f(x) - y + 2$. Como $f(xy+1) = f(yx+1)$, entonces:

$$f(x)f(y) - f(y) - x + 2 = f(y)f(x) - f(x) - y + 2$$
$$f(x) + y = f(y) + x$$

Si $y = 0$, entonces $f(x) = x + f(0) = x + 1$.
Observación: No es necesario conocer $f(0)$ para encontrar $f(x)$. Es decir, se puede determinar $f(0)$ a partir de la ecuación funcional. Definiendo $c = f(0)$, sabemos que $f(x) = x + c$ y, reemplazando en la

ecuación funcional:

$$\begin{aligned}
xy + 1 + c &= (x+c)(y+c) - (y+c) - x + 2 \\
xy + 1 + c &= xy + c(x+y) + c^2 - y - c - x + 2 \\
c &= c(x+y) - (x+y) + c^2 - c + 1 \\
0 &= (c-1)(x+y) + c^2 - 2c + 1 \\
0 &= (c-1)(x+y) + (c-1)^2 \\
0 &= (c-1)(x+y+c-1)
\end{aligned}$$

Eligiendo x e y de manera tal que $x + y + c - 1 \neq 0$ (por ejemplo, $x = 2$, $y = -c$), se concluye que $c = 1$.

Cuarto Nivel

1 Sean A y B dos rectángulos con lados de medida entera. Se sabe que el perímetro de A es el doble del perímetro de B, y que el área de B es el doble del área de A. Si uno de los lados de A tiene medida 1, determine todas las medidas posibles de los lados de A y B.

Solución

Solución 1:
Sean 1, b las medidas de A y c, d las medidas de B. Entonces:

$$\begin{aligned}
1 + b &= 2(c+d) \\
cd &= 2b
\end{aligned}$$

Despejando b en la primera ecuación y reemplazando en la segunda:

$$\begin{aligned}
cd &= 2(2c + 2d - 1) = 4c + 4d - 2 \\
c(d-4) &= 4d - 2 \\
c &= \frac{4d-2}{d-4} = 4 + \frac{14}{d-4}
\end{aligned}$$

Como c es entero, entonces $d - 4$ divide a 14 y también $d - 4 > -4$, luego $d - 4 \in \{-2, -1, 1, 2, 7, 14\}$, entonces $d \in \{2, 3, 5, 6, 11, 18\}$. Reemplazando $d \in \{2, 3\}$ se tiene $c < 0$, contradicción. Reemplazando $d \in \{5, 6, 11, 18\}$, calculando c y luego b, se tienen dos pares de soluciones simétricas; estas son:

- A con lados de medida 1 y 45; B con lados de medida 5 y 18.
- A con lados de medida 1 y 33; B con lados de medida 6 y 11.

Solución 2:
Con la misma notación de la Solución 1, se tiene:

$$\begin{aligned}
1 + b &= 2(c+d) \\
cd &= 2b
\end{aligned}$$

Despejando b en la primera ecuación y reemplazando en la segunda:

$$\begin{aligned} cd &= 2(2c+2d-1) = 4c+4d-2 \\ cd-4c-4d &= -2 \\ cd-4c-4d+16 &= 14 \\ (c-4)(d-4) &= 14 \end{aligned}$$

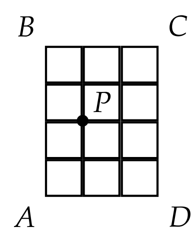
$c-4$ y $d-4$ son números enteros y dividen a 14; los divisores de 14 son $\pm1, \pm2, \pm7, \pm14$. Si uno de los números $c-4, d-4$ es negativo, entonces $(c-4)(d-4)$ es uno de los productos $-1\cdot -14$ ó $-2\cdot -7$, entonces $c-4 \leq -7$ o $d-4 \leq -7$, luego $c < 0$ o $d < 0$, contradicción. Por lo tanto, $c-4$ y $d-4$ pertenecen al conjunto $\{1,2,7,14\}$, luego $c, d \in \{5,6,11,18\}$. Se tienen los siguientes casos:

- $c-4=1, d-4=14$: entonces $c=5$, $d=18$, luego $b=45$.
- $c-4=2, d-4=7$: entonces $c=6$, $d=11$, luego $b=33$.
- $c-4=7, d-4=2$: análogo al cuarto caso.
- $c-4=14, d-4=1$: análogo al tercer caso.

Por lo tanto, los posibles pares de rectángulos son:

- A con lados de medida 1 y 45; B con lados de medida 5 y 18.
- A con lados de medida 1 y 33; B con lados de medida 6 y 11.

2 Considere un rectángulo $ABCD$, con $AB = 4$ y $AD = 3$. Este rectángulo es cuadriculado, como en la figura, en 12 cuadrados de lado 1.



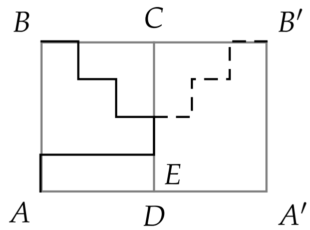
Una chinita (coccinelidae) se mueve por el borde de los cuadrados de lado 1, de la siguiente manera: primero se mueve sólo hacia arriba y hacia la derecha, desde A hasta un punto E del lado $\overline{CD}$; a continuación se mueve sólo hacia arriba y hacia la izquierda, desde E hasta B.

a) ¿Cuántos caminos distintos puede recorrer la chinita?

b) ¿Cuántos caminos distintos puede recorrer la chinita sin pasar por P?

Solución

a) El tablero se refleja con respecto al lado CD, obteniendo un tablero $A'B'CD$. La parte del camino desde E hasta B también es reflejada, obteniendo un camino desde E hasta B' y el camino de la chinita corresponde a un camino desde A hasta B', con movimientos sólo hacia arriba y la derecha.



Estos caminos desde A hasta B' son descritos por secuencias de 4 flechas $\uparrow$ y 6 flechas $\rightarrow$, entonces la cantidad de caminos es $\binom{10}{4} = 210$.

b) Sea P' el punto simétrico de P con respecto al lado CD. De manera similar a la parte anterior, se deben contar los caminos desde A hasta B', con movimientos sólo hacia arriba y la derecha, que no pasan por P ni por P'. Existen $\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{2} = 3 \cdot 21 = 63$ caminos que pasan por P, $\binom{7}{2} \cdot \binom{3}{1} = 63$ caminos que pasan por P' y $\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} = 3 \cdot 3 = 9$ caminos que pasan por P y P'. Entonces, la cantidad de caminos que pasan por P o P' es $63 + 63 - 9 = 117$. Por lo tanto, la cantidad de caminos que no pasan por P ni por P' es $210 - 117 = 93$. Esta es la cantidad de caminos de la chinita sin pasar por P.