XIV

Cuarta Fecha

30 de Julio de 2016

Mayor

Grupal

Entreguen solo una respuesta por equipo.

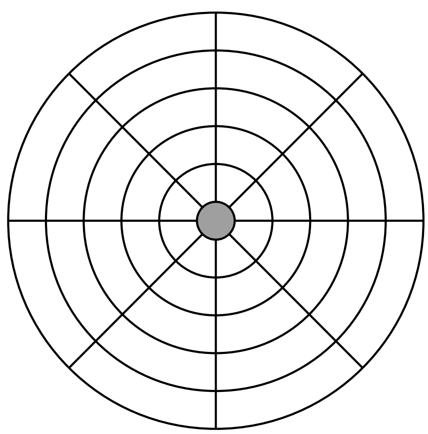
Jugando con Citricus(círculos, triángulos y cuadrados)

La siguiente prueba consiste en analizar un juego creado por un subgrupo del equipo académico del CMAT. Como el juego es nuevo, comenzaremos por estudiar el tablero, luego proseguiremos señalando las fichas disponibles para luego establecer el juego y analizar algunas posibles estrategias ganadoras.

1. El tablero

- El tablero consiste en $n \in \mathbb{N}$ niveles circulares y $r \in \mathbb{N}$ radios.
- Un *nivel circular*(o simplemente *nivel*) corresponde al espacio limitado por dos circunferencias concéntricas. El círculo central (rodeado por una circunferencia) se llamará *botón*, el nivel más lejano al botón se llamará *nivel* 1 y el nivel más cercano al botón se llamará *nivel* n o *último nivel*.
- Un *radio* corresponde al segmento radial que une el primer nivel con el botón.
- A un tablero de n niveles y r radios lo designaremos por $T_{n,r}$.
- Un *cruce* corresponde al punto formado por la intersección de un radio y una circunferencia.

En el ejemplo se muestra un tablero $T_{5,8}$.



- Denominaremos *regiones* o *casillas* a los posibles lugares de un tablero en donde se pueda ubicar una ficha (son los sectores del tablero delimitados por dos circulos y dos radios).
- **Importante:** El botón no es considerado una región.

2. Preguntas

1. Determine la cantidad de cruces para cualquier tablero $T_{n,r}$.
2. Pruebe que no existen tableros $T_{n,n}$ con una cantidad impar de cruces.

2.1. Las fichas

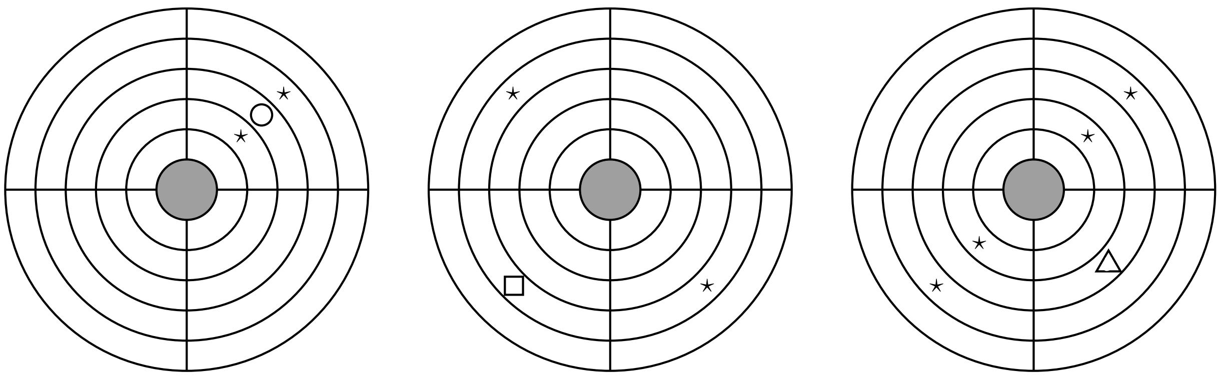
Para jugar se dispone de tres tipos diferentes de fichas ◯, □, △. Una ficha sólo puede colocarse en alguna casilla previamente vacía. Cada ficha obliga, al siguiente turno, colocar otra en alguna de las casillas vecinas según las siguientes reglas:

i) Una ficha ◯ permite colocar otra ficha en las casillas adyacentes con las que comparte un trozo de circunferencia.

ii) Una ficha □ permite colocar otra ficha en las casillas adyacentes con las que comparte un trozo de radio.

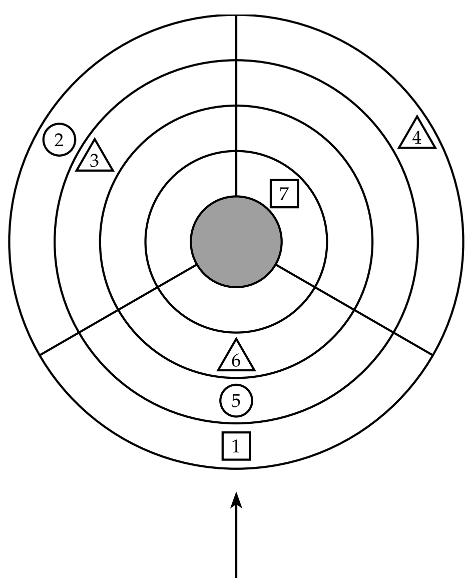
iii) Una ficha △ permite colocar otra ficha en las casillas con las que comparte un cruce y con las que no comparte un trozo de circunferencia ni un trozo de radio.

En los siguientes tableros $T_{5,4}$ se muestran los movimientos posibles de ◯, □ y △ respectivamente indicando con $\star$ aquellas casillas en las que se permite colocar la siguiente ficha.



- **Importante:** En una casilla sólo puede ir una ficha(no dos).
- Un *camino* consiste en una disposición de fichas sobre el tablero que se inicia en alguna casilla del nivel 1 (a la ficha que aquí se coloque la marcaremos con un 1 y una flecha que apunte a la casilla, en dirección al botón), y que permite recorrer las fichas siguientes enumerándolas de uno en uno, con los movimientos permitidos, desde la ficha 1 hasta la última. Una sola ficha colocada en una casilla del primer nivel es un camino(harto trivial, pero camino).

En la siguiente figura se muestra un camino de 7 fichas en un tablero $T_{4,3}$



- Llamaremos *tablero completo* a aquel tablero en que todas las regiones están ocupadas por alguna ficha.

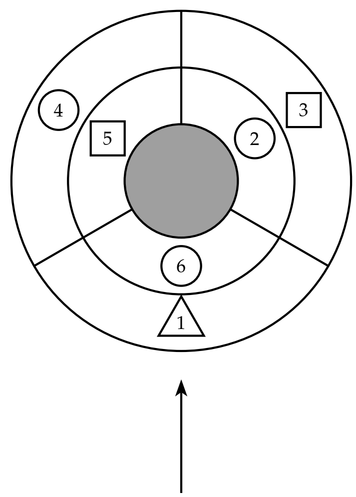
3. Consideren un tablero $T_{3,7}$ y grafiquen en él un camino que lo complete usando todas las fichas al menos dos veces.
4. Al considerar sólo dos tipos de fichas distintas tenemos tres combinaciones posibles ($(\square, \bigcirc)$; $(\square, \triangle)$ y $(\bigcirc, \triangle)$)) . Explique por qué una de estas combinaciones no permite completar el tablero $T_{3,7}$ con un camino.
5. Considere un tablero $T_{n,r}$, considerando que tanto n como r son mayores a 1.

   a) Construyan un ejemplo de un tablero $T_{n,r}$ con $n \geq 4$ y $r \geq 3$ que se pueda completar utilizando sólo $\triangle$.

   b) Establezcan condiciones sobre n y r para que que exista un camino que complete el tablero $T_{n,r}$ usando sólo $\triangle$

- Un camino se dice *cerrado* si, iniciando en una casilla recorre parte o todo el tablero y termina en la misma casilla.

La siguiente figura muestra un ejemplo de un camino cerrado que, a la vez, completa el tablero $T_{2,3}$



Importante: Un camino cerrado no necesariamente completa al tablero.

- Ahora hacemos lo siguiente: al presionar el botón todas las fichas dispuestas sobre el tablero se modifican de acuerdo al siguiente cuadro:

$\triangle \to \bigcirc$
$\bigcirc \to \square$
$\square \to \triangle$

- Llamaremos *camino invertible* a aquel camino que, tras presionar el botón el resultado sigue siendo un camino, transformando la ficha 1 en la última y viceversa.
- **Importante:** Recuerde que un camino requiere que la ficha 1 se ubique en alguna casilla del nivel 1.

6. Encuentre un camino invertible para un tablero $T_{3,7}$, usando al menos dos fichas de cada tipo.

3. El Juego

Ahora que conocemos algunos aspectos del tablero y las disposiciones de las fichas, ¡vamos a jugar!.

- El juego permite dos jugadores que tendrán a su haber, inicialmente, una cantidad ilimitada de cada tipo de fichas. Dispondrán de un tablero $T_{n,r}$ como ya se definió.
- Ambos jugadores formarán un único camino agregando, alternadamente y en cada turno, una de sus piezas.
- Ganará el jugador que logre ubicar, por primera vez, una de sus fichas en el nivel n.
- **Importante:** En cada turno el jugador que ponga una pieza en el tablero, debe permitir a su oponente seguir jugando (a menos que gane el juego). En el caso en que ninguno de los jugadores logre llegar al nivel n, el juego quedará en *tabla* dando como ganador al jugador que haya ubicado más fichas en el tablero.
- El objetivo del juego es ganar.
- Una estrategia ganadora consiste en algún método, basado en ciertas condiciones, que le permita a un jugador ganar el juego.

Comenzaremos con un juego particular, en el que ambos jugadores sólo utilizarán fichas $\bigcirc$

7. Considere un tablero $T_{234,1}$.
   a) En cada turno un jugador puede colocar 1 ó 2 de sus fichas. ¿Cuál es la estrategia ganadora?
   b) En cada turno un jugador puede colocar $1, 2$ ó 3 de sus fichas. ¿Cuál es la estrategia ganadora?
   c) En cada turno un jugador puede colocar $1, 2, 3$ ó 4 de sus fichas. ¿Cuál es la estrategia ganadora?
   d) En cada turno un jugador puede colocar $1, 2, ...,$ ó k de sus fichas, con $k \leq 24$. ¿Cuál es la estrategia ganadora para cada k?

Para la última pregunta considere que ambos jugadores poseen una cantidad ilimitada de fichas de cada tipo.

8. Encuentre una estrategia ganadora para todos los tableros $T_{3,r}$, $r > 1$.