XIV

CuartaFecha
30 de Julio de 2016
Soluciones
Grupal

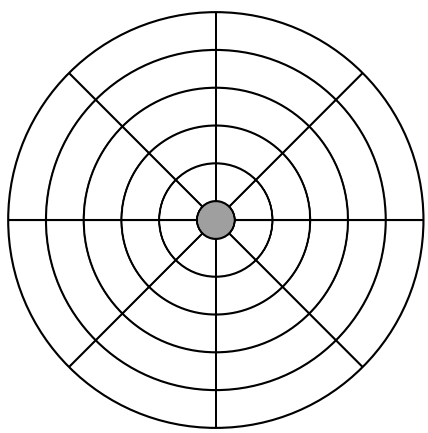
Jugando con Citricus(círculos, triángulos y cuadrados)

La siguiente prueba consiste en analizar un juego creado por un subgrupo del equipo académico del CMAT. Como el juego es nuevo, comenzaremos por estudiar el tablero, luego proseguiremos señalando las fichas disponibles para luego establecer el juego y analizar algunas posibles estrategias ganadoras.

1. El tablero

- El tablero consiste en $n \in \mathbb{N}$ niveles circulares y $r \in \mathbb{N}$ radios.
- Un *nivel circular*(o simplemente *nivel*) corresponde al espacio limitado por dos circunferencias concéntricas. El círculo central (rodeado por una circunferencia) se llamará *botón*, el nivel más lejano al botón se llamará *nivel* 1 y el nivel más cercano al botón se llamará *nivel* n o *último nivel*.
- Un *radio* corresponde al segmento radial que une el primer nivel con el botón.
- A un tablero de n niveles y r radios lo designaremos por $T_{n,r}$.
- Un *cruce* corresponde al punto formado por la intersección de un radio y una circunferencia.

En el ejemplo se muestra un tablero $T_{5,8}$.



- Denominaremos *regiones* o *casillas* a los posibles lugares de un tablero en donde se pueda ubicar una ficha (son los sectores del tablero delimitados por dos circulos y dos radios).
- **Importante:** El botón no es considerado una región.

2. Preguntas

1. Determine la cantidad de regiones para un tablero $T_{n,r}$

   Solución:

   Cada nivel es separado en r regiones, por tanto la cantidad pedida es $n \cdot r$.

2. Determine la cantidad de cruces para cualquier tablero $T_{n,r}$.

   Solución:

   Considerando que los radios *salen* desde el botón, habrán tantos cruces como radios salgan de el. Notemos ahora que, los cruces más alejados del botón, por cada nivel, son nuevamente r.
   Así, la cantidad de cruces total para un tablero $T_{n,r}$ es $(n+1)\cdot r$

3. Pruebe que no existen tableros $T_{n,n}$ con una cantidad impar de cruces.

   Solución:

   Ninguno pues, siendo $n(n+1)$ la cantidad de cruces para un tablero $T_{n,n}$, para cualquier n se tendrá el producto de un número par por uno impar.

4. Se desea colorear los tableros, usando sólo dos colores y de manera que no queden dos casillas adyacentes del mismo color. ¿Qué tableros $T_{n,r}$ no podrán ser coloreados?

   Solución:

   Para $r = 1$ y $n \geq 2$ siempre se puede. Se pinta el primer nivel, luego el tercer y así sucesivamente. Suponemos que $r \geq 2$. Sí $r = 2p$ es par entonces el primer nivel tendría un número par de regiones. Se pintan de manera alternada. Se sigue con las regiones siguiente pintando de manera de manera alternada al sector anterior. Si r es impar y $r \geq 3$ entonces el primer nivel puede ser numerado $1, 2, 3, \cdots, 2k+1$. Si pintamos la región 1 de un color, debemos pintar del mismo color las regiones $3, 5, 7, \cdots, 2k+1$. Como las regiones 1 y $2k+1$ son vecinas, no puede ser. En resumen, se puede pintar $T_{n,r}$ para $r = 1$ y cualquier n o para $r = 2p$, $p \geq 1$ y cualquier n.

2.1. Las fichas

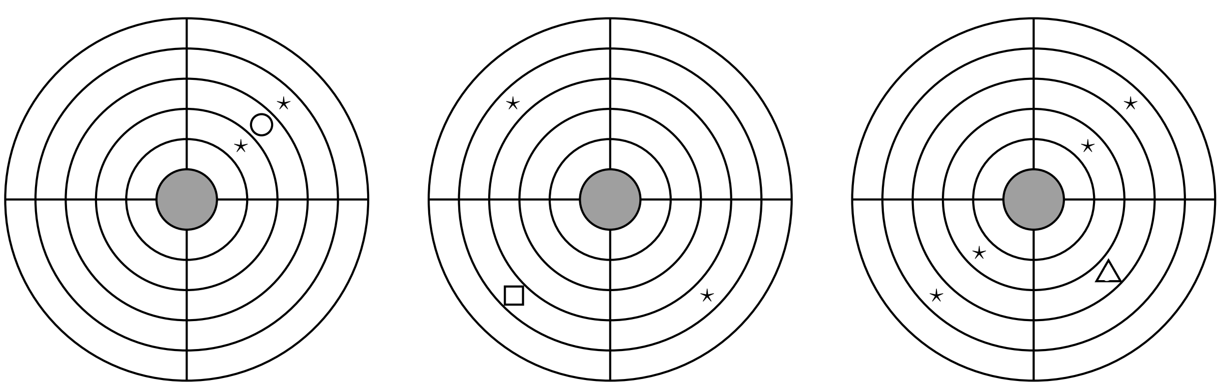
Para jugar se dispone de tres tipos diferentes de fichas $\bigcirc$, $\square$, $\triangle$. Una ficha sólo puede colocarse en alguna casilla previamente vacía. Cada ficha obliga, al siguiente turno, colocar otra en alguna de las casillas vecinas según las siguientes reglas:

i) Una ficha $\bigcirc$ permite colocar otra ficha en las casillas adyacentes con las que comparte un trozo de circunferencia.

ii) Una ficha $\square$ permite colocar otra ficha en las casillas adyacentes con las que comparte un trozo de radio.

iii) Una ficha $\triangle$ permite colocar otra ficha en las casillas con las que comparte un cruce y con las que no comparte un trozo de circunferencia ni un trozo de radio.

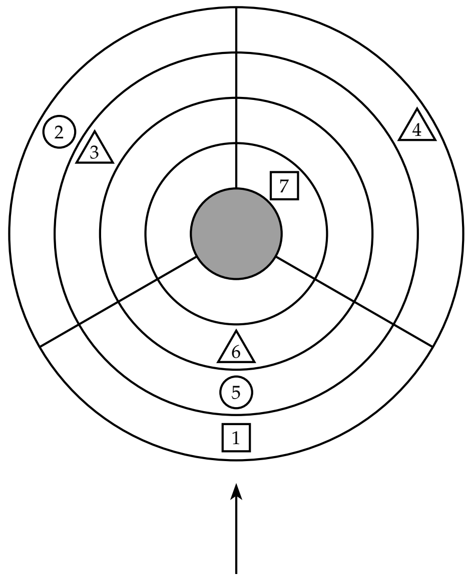
En los siguientes tableros $T_{5,4}$ se muestran los movimientos posibles de $\bigcirc$, $\square$ y $\triangle$ respectivamente indicando con $\star$ aquellas casillas en las que se permite colocar la siguiente ficha.



- **Importante:** En una casilla sólo puede ir una ficha(no dos).

- Un *camino* consiste en una disposición de fichas sobre el tablero que se inicia en alguna casilla del nivel 1 (a la ficha que aquí se coloque la marcaremos con un 1 y una flecha que apunte a la casilla, en dirección al botón), y que permite recorrer las fichas siguientes enumerándolas de uno en uno, con los movimientos permitidos, desde la ficha 1 hasta la última. Una sola ficha colocada en una casilla del primer nivel es un camino(harto trivial, pero camino).

En la siguiente figura se muestra un camino de 7 fichas en un tablero $T_{4,3}$

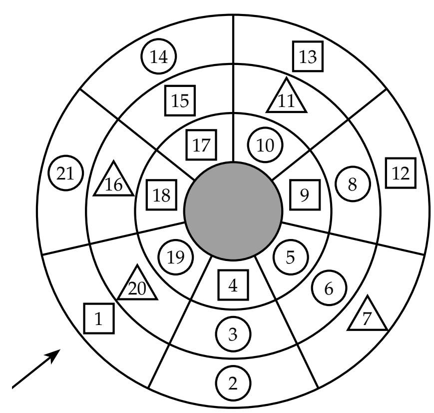


- Llamaremos *tablero completo* a aquel tablero en que todas las regiones están ocupadas por alguna ficha.

5. Consideren un tablero $T_{3,7}$ y grafiquen en él un camino que lo complete usando todas las fichas al menos dos veces.

   Solución:

   Una posible solución:



6. *a*) Al considerar sólo dos tipos de fichas distintas tenemos tres combinaciones posibles ($(\square, \bigcirc)$; $(\square, \triangle)$ y $(\bigcirc, \triangle)$)) . Explique por qué una de estas combinaciones no permite completar el tablero $T_{3,7}$ con un camino.

Solución:

Consideremos el tablero $T_{3,7}$ extendido y enumeremos sus casillas como muestra la figura, en donde N_i representa al i-ésimo nivel, mientras que R_j representa al j-ésimo sector.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
N_1							
N_2							
N_3							

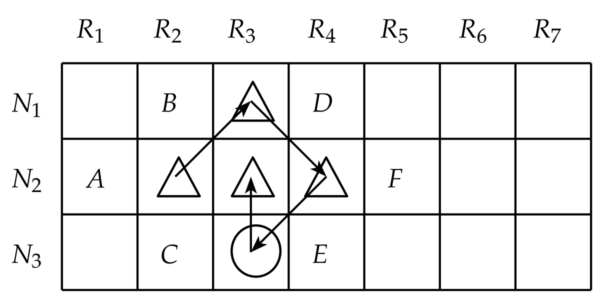
Para las combinaciones de fichas:

i) $\bigcirc$ y $\square$: Al llenar las casillas con $\square$, salvo las casillas (N_1, R_7) y (N_2, R_1) las que ocupamos con $\bigcirc$, completamos el tablero con un camino que se inicia en (N_1, R_1).

ii) $\triangle$ y $\square$: Llenando las casillas con $\square$, salvo las casillas (N_1, R_7) y (N_2, R_7) las que rellenamos con $\triangle$ completamos el tablero con un camino que se inicia en la casilla (N_1, R_1).

iii) La combinación $\triangle$ y $\bigcirc$ no permite completar el tablero con un camino.
Supongamos que sí existe un camino que lo completa, con lo cual dos casillas estarán ocupadas con la ficha 1 y final según corresponda.
En tal caso existirán, a lo menos, tres columnas contiguas $R_j; R_{j+1}, R_{j+2}$ que no contienen, en ninguno de sus niveles, tales fichas.
Escojamos, sin pérdida de generalidad, la columna R_3(o sea $j = 2$) y estudiemos las posibles fichas que pueda contener:

- Esta columna no puede contener $\bigcirc$ en N_1 y N_3 pues, si así fuese, una de estas fichas deberá ser la ficha 1 o final.
- La configuración que contiene $\triangle$ en N_1 y N_3 no está permitida pues, ambas fichas requieren que la casilla (N_2, R_2) contenga una ficha $\triangle$ y que la casilla (N_2, R_4) esté libre.
- Consideremos ahora la configuración $\triangle$ en N_1, N_2 y $\bigcirc$ en N_3 (el caso invertido es análogo). Para que ninguna de las fichas sea inicial ni final, necesariamente se genera la siguiente distribución de fichas:



Una vez situados en la casilla (N_2, R_3), la siguiente ficha deberá ser ubicada en una de las casillas marcadas B, C, D o E. Cualquiera sea la elección, para que no sea la última ficha, deberá ser un $\triangle$, pasando luego a A o a F. Suponemos que hemos colocado un $\triangle$ en B y A. Si el $\triangle$ en A proviene de C deberia ser la ficha inicial, cosa que no sucede. Entonces A proviene de un $\bigcirc$ en (N_3, R_1). Pero entonces la casilla en C quedará vacía. Si la ficha en A proviene de un $\triangle$ en (N_3, R_7) entonces la casilla en C quedará vacía. Como los otros casos son similares, concluímos que el caso de un triángulo en (N_1, R_3), otro triángulo en (N_2, R_3) y un círculo en (N_3, R_3) no puede ser.

Observamos que con este análisis con este análisis, hemos descartado la posibilidad de que en una columna haya una ficha $\triangle$ en N_2.

- La configuración restante y su análoga invertida, exigen que en una de las columnas adyacentes y en N_2 exista una ficha $\triangle$, mas esto no es posible por lo probado anteriormente.

Así, mostramos que no es posible completar el tablero $T_{3,7}$ usando sólo fichas $\bigcirc$ y $\triangle$.

b) **Variación Nivel Menor:** Al considerar sólo dos tipos de fichas distintas tenemos tres combinaciones posibles ($(\square, \bigcirc); (\square, \triangle)$ y $(\bigcirc, \triangle)$)). Pruebe que un tablero $T_{3,3}$ sólo puede ser completado con la combinación de fichas $(\square, \triangle)$ y $(\square, \bigcirc)$, pero no puede ser completado con la combinación $(\bigcirc, \triangle)$.

Solución:

Para las combinaciones $(\square, \triangle)$ y $(\square, \bigcirc)$ la solución es análoga a la presentada para el nivel mayor. Para *la combinación imposible*, la demostración dada para el nivel mayor se puede generalizar descartando, caso por caso, y en el mismo orden las nueve fichas requeridas para completar el tablero $T_{3,3}$.

7. Considere un tablero $T_{n,r}$, considerando que tanto n como r son mayores a 1.

   a) Construyan un ejemplo de un tablero $T_{n,r}$ con $n \geq 4$ y $r \geq 3$ que se pueda completar utilizando sólo $\triangle$.

   Solución:

   El tablero $T_{4,3}$ se puede completar.

   b) Establezcan condiciones sobre n y r para que que exista un camino que complete el tablero $T_{n,r}$ usando sólo $\triangle$

   Solución:

   Cualquier tablero con n par y r impar cumple lo anterior. El procedimiento es completar niveles dos a dos.

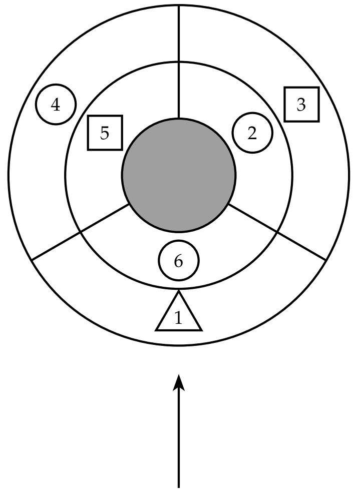
   b) (**Menor**) Si n es impar, ¿se puede completar el tablero $T_{n,r}$ sólo usando $\triangle$?

   Solución:

   Basta ver un tablero $T_{3,2}$ para verificar que la respuesta es no.

- Un camino se dice *cerrado* si, iniciando en una casilla recorre parte o todo el tablero y termina en la misma casilla.

La siguiente figura muestra un ejemplo de un camino cerrado que, a la vez, completa el tablero $T_{2,3}$



Importante: Un camino cerrado no necesariamente completa al tablero.

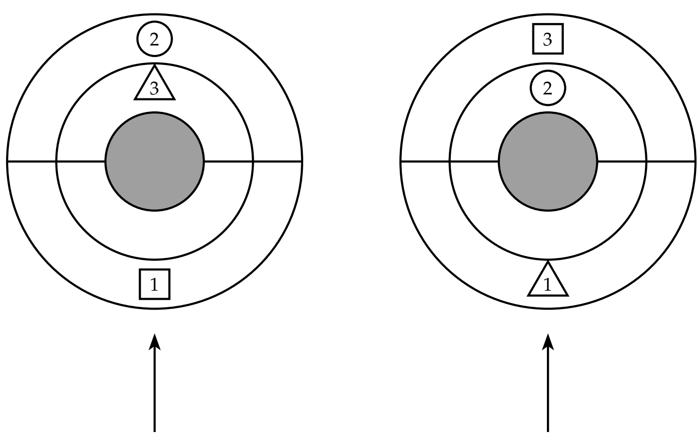
- Ahora hacemos lo siguiente: al presionar el botón todas las fichas dispuestas sobre el tablero se modifican de acuerdo al siguiente cuadro:

$\triangle \to \bigcirc$
$\bigcirc \to \square$
$\square \to \triangle$

8. Usando todos los tipos de ficha, al menos una vez y para un tablero cualquiera, encuentre un camino cerrado (no necesariamente completo) tal que, una vez apretado el botón, el nuevo camino siga siendo cerrado sin cambiar el inicio del camino.

   Solución:

   Para un tablero cualquiera $T_{n,r}$ con $n, r > 1$ basta construir el camino

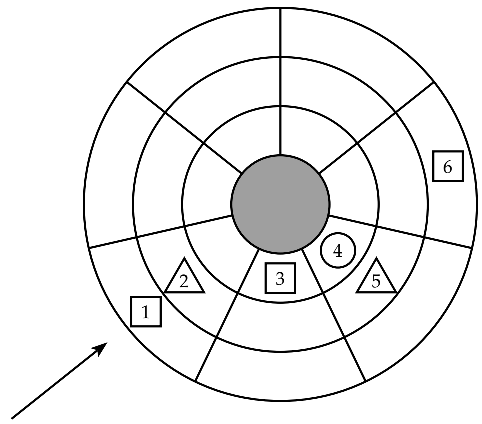


- Llamaremos *camino invertible* a aquel camino que, tras presionar el botón el resultado sigue siendo un camino, transformando la ficha 1 en la última y viceversa.
- **Importante:** Recuerde que un camino requiere que la ficha 1 se ubique en alguna casilla del nivel 1.

9. Encuentre un camino invertible para un tablero $T_{3,7}$, usando al menos dos fichas de cada tipo.

   Solución:

Un camino solución se muestra a continuación



3. El Juego

Ahora que conocemos algunos aspectos del tablero y las disposiciones de las fichas, ¡vamos a jugar!.

- El juego permite dos jugadores que tendrán a su haber, inicialmente, una cantidad ilimitada de cada tipo de fichas. Dispondrán de un tablero $T_{n,r}$ como ya se definió.
- Ambos jugadores formarán un único camino agregando, alternadamente y en cada turno, una de sus piezas.
- Ganará el jugador que logre ubicar, por primera vez, una de sus fichas en el nivel n.
- **Importante:** En cada turno el jugador que ponga una pieza en el tablero, debe permitir a su oponente seguir jugando (a menos que gane el juego). En el caso en que ninguno de los jugadores logre llegar al nivel n, el juego quedará en *tabla* dando como ganador al jugador que haya ubicado más fichas en el tablero.
- El objetivo del juego es ganar.
- Una estrategia ganadora consiste en algún método, basado en ciertas condiciones, que le permita a un jugador ganar el juego.

Comenzaremos con un juego particular, en el que ambos jugadores sólo utilizarán fichas $\bigcirc$

10. Considere un tablero $T_{24,1}$ ($T_{234,1}$).

    a) En cada turno un jugador puede colocar 1 ó 2 de sus fichas. ¿Cuál es la estrategia ganadora?

    b) En cada turno un jugador puede colocar $1, 2$ ó 3 de sus fichas. ¿Cuál es la estrategia ganadora?

    c) En cada turno un jugador puede colocar $1, 2, 3$ ó 4 de sus fichas. ¿Cuál es la estrategia ganadora?

    d) En cada turno un jugador puede colocar $1, 2, ...,$ ó k de sus fichas, con $k \leq 24$. ¿Cuál es la estrategia ganadora para cada k?

    Solución:

    Llamemos J_1 al jugador que comienza la partida y J_2 a su contrincante.
    Para $k \leq 12$, si $(k+1)|n$ entonces ganará J_2 haciendo coincidir la cantidad de fichas colocadas en el tablero (la suma total) con cada $m \cdot (k+1) \leq n/2 \, , m \in \mathbb{N}$.
    Si $(k+1) \nmid n$ entonces, J_1 ganará comenzando con el resto de $n/(k+1)$ y completando con las fichas necesarias para sumar de $k+1$ en $k+1$ hasta n.

En el caso en que $n/2 < k \leq n$ J_2 podrá obligar a J_1 a colocar la ficha $(k-2)/2$ con lo que asegurará su victoria.

Para las últimas preguntas considere que ambos jugadores poseen una cantidad ilimitada de fichas de cada tipo.

11. Encuentre una estrategia ganadora para el tablero $T_{4,3}$.

    Solución:

    La estrategia ganadora debe iniciar el juego con $\triangle$ y obligar al contrincante a ser el primero en colocar una ficha en el nivel 3.

12. Encuentre una estrategia ganadora para todos los tableros $T_{3,r}$, $r > 1$.

    Solución:

    Según la paridad de r tenemos los siguientes casos:

    i) r impar: Si J_1 comienza con $\bigcirc$, obliga a J_2 a colocar $\square$ (para no perder). En su siguiente turno J_1 coloca $\square$ hasta forzar a J_2 a colocar una ficha diferente con lo que J_1 se adjudica la partida.

    ii) r par: El primer jugador en colocar un $\square$ en el nivel 2 ganará la partida.
    J_1 asegura su victoria colocando inicialmente un $\square$.

Nivel	Pregunta(sol)	Puntos
Menor	1(2)	1
	2(4)	2
	3(5)	3
	4(7)	2
	5(6)	4
	6(8)	2
	7(10)	3
	8(11)	3

Nivel	Pregunta(sol)	Puntos
Mayor	1(1)	1
	2(3)	1
	3(5)	2
	4(6)	4
	5(7)	2
	6(9)	3
	7(10)	3
	8(12)	4