XIV

Cuarta Fecha

30 de Julio de 2016

Soluciones

Individual

Primer Nivel

1 ¿Cuántos números enteros desde 1 hasta 1000 (ambos incluídos) cumplen que el producto de sus dígitos no es 0?

Solución

Primera solución:
Vamos a considerar todos los números desde 1 hasta 1000, o sea 1000, y eliminar todos aquellos que no cumplen la propiedad. Debemos tener en cuenta que, si el producto de sus dígitos es 0, entonces al menos uno de sus dígitos es 0 y esto es lo que ocuparemos para contar.
Los números que tienen un 0 en las unidades son los múltiplos de 10, en total son 100 números. Además, los números que no tienen un 0 en las unidades, pero sí en las decenas, son aquellos de la forma $x0y$, con x e y dígitos diferentes de 0 (no necesariamente distintos); como x e y pueden ser 9 dígitos cada uno, entonces son 81 números de esta forma. Así tenemos $81 + 100 = 181$ números que no cumplen la propiedad. Por lo tanto, $1000 - 181 = 819$ números cumplen la propiedad.
Segunda solución:
Como se ha indicado en la primera solución, los números que cumplen la propiedad son aquellos con todos los dígitos distintos de 0. Vamos a contar los números que cumplen esta propiedad y tienen 1, 2 ó 3 dígitos.
Con un dígito se tienen 9 números: 1, 2, 3, ..., 9. Con dos dígitos se tienen los números de la forma xy con x e y dígitos diferentes de 0 (no necesariamente distintos), en total son $9 \cdot 9 = 81$. De manera similar, con tres dígitos se tienen $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ números. Por lo tanto, $9 + 81 + 729 = 819$ números cumplen la propiedad.

2 Dos personas A y B juegan el siguiente juego: A comienza eligiendo un número natural y luego B dice un número de acuerdo con las siguientes reglas:

a) Si el último número dicho fue impar, el jugador suma 7 a este número.

b) Si el último número dicho fue par, el jugador lo divide por 2.

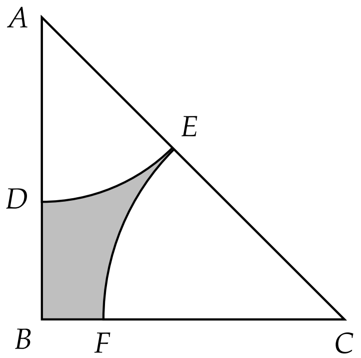
Después, cada uno dirá el número que corresponde según las dos reglas anteriores. Gana el jugador que repite el número elegido inicialmente por A. Encuentre todos los números que A puede elegir para ganar *en su segunda jugada*. Justifique su respuesta.

Solución

Para que A gane en su segunda jugada, debe comenzar eligiendo un número a, luego B debe señalar un número b (de acuerdo al algoritmo del juego) y finalmente A debe elegir otra vez el número a. La solución depende de la paridad del número inicial a.
Si a es impar, entonces $a = 2n + 1$. En este caso, B debe señalar el número $b = a + 7 = 2n + 8 = 2(n + 4)$; luego A señala el número $n + 4$. Entonces $2n + 1 = n + 4$, luego $n = 3$ y $a = 7$.
Si a es par, entonces $a = 2n$. En este caso, B debe señalar el número n. Como A debe ganar en el siguiente turno, entonces n debe ser impar (si n fuera par, entonces A diría $n/2$, que es menor que n y éste menor que a, contradicción); así A señala el número $n + 7$. Entonces $2n = n + 7$, luego $n = 7$ y $a = 14$.
Por lo tanto, los números que A puede elegir para ganar en su segunda jugada son 7 o 14.

Segundo Nivel

1 Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles en B cuyos catetos miden $AB = BC = a$. Por un punto E en la hipotenusa $\overline{AC}$ se dibujan los arcos DE y EF (con centros A y C, respectivamente). Suponga que el área del sector circular limitado por el arco EF y los radios $\overline{CE}$ y $\overline{CF}$ es la mitad del área del triángulo. Calcular el área de la región gris en función de a.



Solución

Sean $r = CE = CF$ el radio del sector circular CEF y $s = AD = AE$ el radio del sector circular ADE. El área del sector circular CEF es la mitad del área del triángulo ABC, entonces:

$$\pi r^2 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2}$$
$$\frac{\pi r^2}{8} = \frac{a^2}{4}$$
$$r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

El radio del sector circular ADE mide:

$$s = a\sqrt{2} - r = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{\pi} - 1)}{\sqrt{\pi}}$$

Entonces el área del sector circular ADE es:

$$\text{Área(sector circular } ADE) = \pi s^2 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{2a^2(\sqrt{\pi}-1)^2}{\pi} = \frac{a^2(\sqrt{\pi}-1)^2}{4}$$

Finalmente, el área de la región gris es:

$$\begin{aligned}\text{Área(región gris)} &= \text{Área(triángulo } ABC) - \text{Área(sector circular } CEF) - \text{Área(sector circular } ADE) \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2(\sqrt{\pi}-1)^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{4} \cdot (2 - 1 - (\pi - 2\sqrt{\pi} + 1)) \\ &= \frac{a^2}{4} \cdot (2\sqrt{\pi} - \pi)\end{aligned}$$

2 En la siguiente sucesión de dígitos: $1, 1, 1, 3, 5, 9, 7, \ldots$, los tres primeros términos son iguales a 1 y cada término, a partir del cuarto, es igual al dígito de las unidades de la suma de los tres términos anteriores.

a) Pruebe que esta sucesión es periódica y encuentre su periodo.

b) Encuentre la suma de los primeros 2016 términos de la sucesión.

*Observación: se dice que una sucesión es **periódica** si está formada por una secuencia finita de números que se repite infinitamente. En este caso, el **periodo** es la cantidad de números en la menor secuencia finita que se repite infinitamente. Por ejemplo la sucesión* $2, 5, 7, 2, 5, 7, 2, 5, 7, \ldots$ *es periódica con periodo 3, porque la menor secuencia que se repite infinitamente es* $2, 5, 7$.

Solución

a) Los primeros términos de la sucesión son:

$$1, 1, 1, 3, 5, 9, 7, 1, 7, 5, 3, 5, 3, 1, 9, 3, 3, 5, 1, 9, 5, 5, 9, 9, 3, 1, 3, 7, 1, 1, 9, 1, 1, 1, \ldots$$

Como cada término de la sucesión, a partir del cuarto, depende de los tres anteriores y, además, se han encontrado nuevamente tres dígitos 1 consecutivos, entonces la sucesión es periódica y su periodo es 31.

b) Al dividir 2016 : 31, el cociente es 65 y el resto es 1, es decir: $2016 = 65 \cdot 31 + 1$. Por lo tanto, los primeros 2016 términos de la sucesión están formados por la subsucesión:

$$1, 1, 1, 3, 5, 9, 7, 1, 7, 5, 3, 5, 3, 1, 9, 3, 3, 5, 1, 9, 5, 5, 9, 9, 3, 1, 3, 7, 1, 1, 9$$

escrita 65 veces y un dígito 1 al final. En los primeros 31 términos hay nueve dígitos 1, siete dígitos 3, seis dígitos 5, tres dígitos 7 y seis dígitos 9, entonces la suma de los primeros 31 términos es:

$$9 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 6 \cdot 9 = 9 + 21 + 30 + 21 + 54 = 135$$

Por lo tanto, la suma de los primeros 2016 términos es $65 \cdot 135 + 1 = \boxed{8776}$

Tercer Nivel

1 Encuentre todas las ternas (a, b, c) de números reales tales que:

$$a^2 = 8(b-2), \qquad b^2 = 8(c-2), \qquad c^2 = 8(a-2)$$

Solución

Solución 1:

Se define la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la fórmula: $f(x) = \dfrac{x^2}{8} + 2$. Entonces $f(a) = b$, $f(b) = c$ y $f(c) = a$.
Además:

$$f(x) - x = \frac{x^2}{8} + 2 - x = \frac{x^2 - 8x + 16}{8} = \frac{(x-4)^2}{8} \geq 0,$$

con igualdad si y sólo si $x = 4$. Es decir, $f(x) \geq x$, con igualdad si y sólo si $x = 4$.
En particular: como $a = f(c) \geq c = f(b) \geq b = f(a) \geq a$, entonces $f(a) = a$, luego $a = 4$. Por lo tanto, $(a, b, c) = (4, 4, 4)$.

Solución 2:

Las igualdades se pueden reescribir como:

$$a^2 + 16 = 8b, \qquad b^2 + 16 = 8b, \qquad c^2 + 16 = 8a$$

Observe que $x^2 + 16 = (x-4)^2 + 8x$, entonces $x^2 + 16 \geq 8x$, con igualdad si y sólo si $x = 4$. Sumando las desigualdades correspondientes a $x = a$, $x = b$ y $x = c$, se tiene:

$$(a^2 + 16) + (b^2 + 16) + (c^2 + 16) \geq 8a + 8b + 8c$$

Por las igualdades dadas en el enunciado, se tiene la igualdad. Por lo tanto, $(a, b, c) = (4, 4, 4)$.

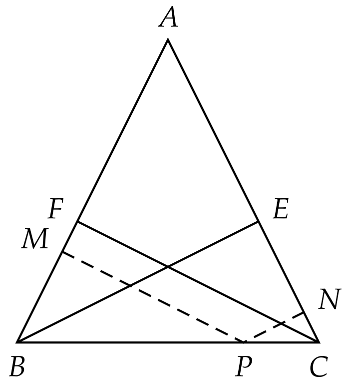
2 Sea ABC un triángulo tal que $AB = AC$. Sea P un punto en el lado $\overline{BC}$ y sean M y N los pies de las perpendiculares desde P hasta los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Demuestre que el valor de la suma

$$PM + PN$$

no depende de la posición del punto P.

Solución

En el triángulo ABC, sean $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ dos alturas y sea $a = BC$. Como $AB = AC$, entonces $BE = CF = h$. Observe que h no depende de la posición del punto P.



Como $\overline{PM}$ y $\overline{CF}$ son perpendiculares a $\overline{AB}$, entonces $\overline{PM}$ y $\overline{CF}$ son paralelos. Por el Teorema de Thales:

$$\frac{PM}{CF} = \frac{PB}{CB} \Rightarrow PM = \frac{PB \cdot h}{a}$$

Análogamente, $PN = \dfrac{PC \cdot h}{a}$. Por lo tanto:

$$PM + PN = \frac{PB \cdot h}{a} + \frac{PC \cdot h}{a} = \frac{(PB + PC) \cdot h}{a} = \frac{ah}{a} = h,$$

es decir, $PM + PN$ no depende de la posición de P.

Cuarto Nivel

1 Los números enteros positivos a, b, c cumplen:

$$ab(a + b) = (c + a)(c + b)$$

pruebe que $a + b + c$ es compuesto.

Solución

Sse tiene que:

$$ab(a + b) = c(a + b + c) + ab$$
$$ab(a + b - 1) = c(a + b + c)$$

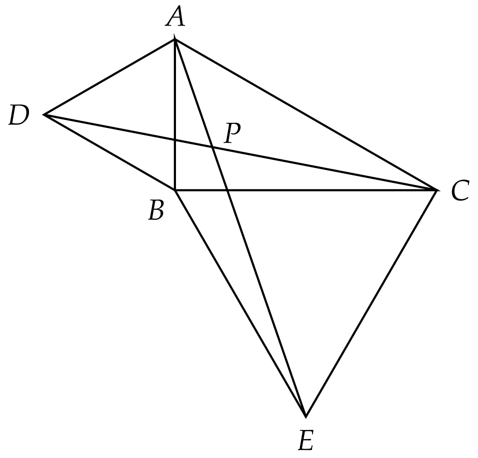
Si $a + b + c = p$ fuese primo, entonces p divide al menos a uno de los tres factores del lado izquierdo. Pero esto es imposible porque p es mayor que cada uno de estos tres factores (contradicción). Por lo tanto, $a + b + c$ es compuesto.
Nota: para cada entero posivo x, la terna $(a, b, c) = (2x^2, 2x^2, 4x^3 - 2x^2)$ cumple la igualdad.

2 En un triángulo $\triangle ABC$, con $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ y $\sphericalangle ABC = 90^\circ$, se construyen triángulos equiláteros exteriores $\triangle ADB$ y $\triangle BEC$. Los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ se intersectan en P. Pruebe que:

- $\sphericalangle APC = 120^\circ$
- $AP - PC = PD - PE$

Solución

Solución 1:
En la siguiente figura, al realizar una rotación de 60° en sentido antihorario, con centro B, el punto A se transforma en D y el punto E se transforma en C.



El segmento $\overline{AE}$ se transforma en $\overline{DC}$, entonces ambos segmentos determinan un ángulo de 60°. Por lo tanto, $\sphericalangle APC = 120^\circ$. Además, los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$ son congruentes, es decir:

$$AE = CD \Rightarrow AP + PE = DP + PC \Rightarrow AP - PC = PD - PE$$

Solución 2:
Notamos que $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DBC = 150^\circ$, $AB = BD$, $BC = BE$, luego $\sphericalangle BEA = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle BAE + \sphericalangle BCD = 30^\circ$ y $AE = CD$

- Sabemos que

$$\begin{aligned}
\sphericalangle APC + \sphericalangle CAP + \sphericalangle PCA &= 180^\circ \\
\sphericalangle APC + \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAE + \sphericalangle BCA - \sphericalangle BCD &= 180^\circ \\
\sphericalangle APC + \sphericalangle BAC + \sphericalangle BCA - (\sphericalangle BAE + \sphericalangle BCD) &= 180^\circ \\
\sphericalangle APC + 60^\circ + 30^\circ - 30^\circ &= 180^\circ \\
\sphericalangle APC &= 120^\circ
\end{aligned}$$

- Tenemos que

$$\begin{aligned}
AE &= CD \\
AP + PE &= CP + PD \\
AP - PC &= PD - PE
\end{aligned}$$