XV
Campeonato Escolar de Matemáticas

PrimeraFecha
22 de Abril de 2017
Soluciones
Grupal

Estrategias ganadoras

En esta prueba vamos a estudiar algunos juegos para dos jugadores. Para entender un juego, es necesario establecer sus reglas, considerando:

- Una situación inicial.
- El orden en que los dos jugadores intervienen (por ejemplo, ¿Alternadamente? ¿Quién comienza?).
- La manera en que cada jugador interviene, en sus turnos.
- Las condiciones para que el juego termine, indicando un ganador y un perdedor.

Una *estrategia ganadora* es un plan, para uno de los jugadores el cual, si este jugador lo sigue, le asegura ganar independiente de cómo intervenga el otro jugador en sus turnos.

Estamos interesados en encontrar estrategias ganadoras para algunos juegos.

Ejemplo: En una pizarra está escrito el número 1. Dos jugadores: Anacleto y "Sebita", practican un juego con las siguientes reglas: juegan alternadamente comenzando con Anacleto. Cada jugador, en su turno, sustituye el número escrito en la pizarra sumándole 1, 2 ó 3. Gana el primer jugador que obtiene un resultado mayor o igual que 17. Determine cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicho jugador.

Solución: Sea $n \in \{1, \ldots, 16\}$.

- Se dice que n es **ganador** si, cuando es el turno de un jugador y en la pizarra está escrito el número n, este jugador tiene una estrategia ganadora.
- Se dice que n es **perdedor** si, cuando es el turno de un jugador y en la pizarra está escrito el número n, este jugador debe sustituirlo por un número ganador.
- Se dice que n es **de empate** si no es ganador ni perdedor.

Ahora notamos lo siguiente:

- Si $n \in \{14, 15, 16\}$, entonces n es ganador porque, cuando es el turno de un jugador y en la pizarra está escrito el número n, este jugador puede sustituirlo por 17 y gana.
- $n = 13$ es perdedor porque, cuando es el turno de un jugador y en la pizarra está escrito el número 13, este jugador debe sustituirlo por 14, 15 ó 16, que son números ganadores.
- Si $n \in \{10, 11, 12\}$, entonces n es ganador porque, cuando es el turno de un jugador y en la pizarra está escrito el número n, este jugador puede sustituirlo por 13, que es un número perdedor.
- $n = 9$ es perdedor porque, cuando es el turno de un jugador y en la pizarra está escrito el número 9, este jugador debe sustituirlo por 10, 11 ó 12, que son números ganadores.

Continuando de esta manera, se concluye que $n = 1$ es perdedor. Por lo tanto, "Sebita" tiene una estrategia ganadora: elegir siempre los números perdedores, que son 5, 9 y 13.En efecto, Anacleto debe jugar y puede escribir 2, 3 ó 4. Si escribe 2 Sebita le suma 3 y escribe 5; si escribe 3, Sebita le suma 2 y escribe 5 y si escribe 4, Sebita le suma 1 y escribe 5. Ahora Anacleto puede escribir 6,7 ó 8 y así sucesivamente.

◄ π ►

En este ejemplo, describir la estrategia ganadora (y explicar por qué funciona) es simple. Sin embargo, encontrarla puede ser más complejo. En esta solución se definen las situaciones ganadoras, perdedoras y de empate (estas definiciones son estándar) y luego, para cada situación posible (en el ejemplo, esto depende del número escrito en la pizarra) se determina si es ganadora, perdedora o "de empate". Es importante definir la situación "de empate" porque, en principio, podría ocurrir, a pesar que en la solución se compruebe que esto no sucede. Observe que la solución está pensada en el sentido “desde la situación final hasta la situación inicial” y que la estrategia consiste en elegir las situaciones perdedoras, es decir, mantener al otro jugador en posición de perder.

1. Si, en el **Ejemplo**, se cambia el número 17 por 33, determine cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicho jugador. Nuevamente empieza Anacleto.

   Solución:

   “Sebita” tiene el mismo tipo de estrategia: elegir los números perdedores, que son 5, 9, 13, 17, 21, 25 y 29.

2. Si, en el **Ejemplo**, se cambia el número inicialmente escrito en la pizarra por 2, determine cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicho jugador. Nuevamente empieza Anacleto.

   Solución:

   Esta vez, Anacleto tiene el mismo tipo de estrategia: elegir los números perdedores, que son 5, 9 y 13.Por tanto gana Anacleto.

3. Si, en el **Ejemplo**, *pierde* el primer jugador que obtiene un resultado mayor o igual que 17, determine cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicho jugador. Nuevamente empieza Anacleto y el número escrito en la pizarra es 1.

   Solución:

   Esta vez, $n = 16$ es perdedor porque, cuando es el turno de un jugador y en la pizarra está escrito el número 16, este jugador debe sustituirlo por 17, 18 ó 19 y pierde. Si $n \in \{13, 14, 15\}$, entonces n es ganador porque, cuando es el turno de un jugador y en la pizarra está escrito el número n, este jugador puede sustituirlo por 16, que es un número perdedor. Continuando de esta manera, 12 es un número perdedor, al igual que 8 y 4.Se concluye que $n = 1$ es ganador. Por lo tanto, Anacleto tiene una estrategia ganadora: elegir siempre los números perdedores, que son 4, 8, 12 y 16.

4. Si, en el **Ejemplo**, se cambian las reglas por las siguientes: se puede sumar 1,2,3 ó 4 y las jugadoras son ahora María Paz y Cecilia, quién empieza. Gana la primera jugadora que obtiene un valor mayor o igual a 35. Determine cuál de las dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicha jugadora.

   Solución:

   En este caso son números ganadores 34,33,32 y 31.Por tanto 30 es un número perdedor; 29,28,27 y 26 son números ganadores y 25 es perdedor; 24,23,22 y 21 son ganadores y 20 es perdedor; 19,18,17 y 16 son ganadores y 15 es perdedor; 14,13,12 y 11 son ganadores y 10 es perdedor; 9,8,7 y 6 son ganadores y 5 es perdedor. Por tanto Cecilia tiene una estrategia ganadora dejar el 5. Luego María Paz debe dejar 6 o 7 o 8 o 9 y Cecilia deja el 10. Así sucesivamente.

5. Si, en el **Ejemplo**, se cambian las reglas por las siguientes: se puede sumar 1,2,3 ó 4 y las jugadoras son ahora María Paz y Cecilia, quién empieza. El número inicial es 7 y gana la primera jugadora que obtiene un valor mayor o igual a 50. Determine cuál de las dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicha jugadora.

   Solución:

   El problema es similar al anterior. Son números ganadores 49,48,47 y 46, 45 es perdedor; son números ganadores 44,43,42 y 41, 40 es número perdedor; y así sucesivamente. Cecilia puede sumar 3 y dejar el 10 que es perdedor; María Paz debe dejar 11,12, 13 o 14. Ahí Cecilia deja el 15 y así sucesivamente.

6. Si, en el **Ejemplo**, se cambian las reglas por las siguientes: se puede sumar 1,2,3 ó 4 y las jugadoras son ahora María Paz y Cecilia, quién empieza y el número esctito en la pizarra es 1. Pierde la primera jugadora que obtiene un valor mayor o igual a 35. Determine cuál de las dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicha jugadora.

Solución:

Esta vez, $n = 34$ es perdedor porque, cuando es el turno de una jugadora y en la pizarra está escrito el número 34, esta jugadora debe sustituirlo por 35, 36, 37 ó 38 y pierde. Si $n \in \{33, 32, 31, 30\}$, entonces n es ganador porqué cuando es el turno de una jugadora y en la pizarra está escrito el número n, esta jugadora puede sustituirlo por el 34, que es un número perdedor. Continuando de esta manera, se concluye que $n = 1$ es ganador. Por lo tanto, Cecilia tiene una estrategia ganadora: elegir siempre los números perdedores, que son 4, 9, 14, 19, 24,29 y 34.

7. En una pizarra está escrito el número 1. Dos jugadores: Roberto y Carlos, practican un juego con las siguientes reglas: ellos juegan alternadamente, comenzando con Roberto. Cada jugador, en su turno, sustituye el número escrito en la pizarra sumándole un número primo. Pierde el primer jugador que obtiene un resultado mayor o igual que 30. Determine cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicho jugador.

   Solución:

   Se definen los números ganadores, perdedores y de empate como en el **Ejemplo**. 28 y 29 son números perdedores, entonces 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26 y 27 son números ganadores. 19 y 20 son números perdedores (en efecto si el número es 19 y sumas 2 tienes 21 que es ganador para el otro jugador; si sumas 3 queda 22 que es ganador para el otro jugador y así sucesivamente), entonces 1 es un número ganador: en efecto sumas 19 y queda 20 que es perdedor. Por lo tanto, Roberto tiene una estrategia ganadora: elegir el número 20 en su primer turno; para no perder de inmediato, Carlos eligirá uno de los números 22, 23, 25 y 27, entonces Roberto debe elegir uno de los números 28 ó 29, luego Carlos perderá en el siguiente turno.

8. En una pizarra está escrito el número 15. Dos jugadores: Roberto y Carlos, practican un juego con las siguientes reglas: ellos juegan alternadamente, comenzando con Roberto. Cada jugador, en su turno, sustituye el número escrito en la pizarra sumándole um múltiplo positivo de 3. Pierde el primer jugador que obtiene un resultado mayor que 60. Determine cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicho jugador.

   Solución:

   Aquí 60, 59 y 58 son números perdedores. Todos los otros números son ganadores, luego gana Roberto. En efecto, cómo está escrito el 15, Roberto suma 45= 3x15 y llega a 60; luego Carlos pierde.

9. En una pizarra está escrito el número 1. Dos jugadores: Juan y Luis, practican un juego con las siguientes reglas: ellos juegan alternadamente, comenzando con Juan. Cada jugador, en su turno, sustituye el número escrito en la pizarra sumándole 1 o multiplicándole por 2. Gana el primer jugador que obtiene un resultado mayor o igual que 31. Determine cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicho jugador.

   Solución:

   Se definen los números ganadores, perdedores y de empate como en el **Ejemplo**. Los números $16, 17, 18, \ldots, 30$ son ganadores, entonces el número 15 es perdedor, luego el número 14 es ganador, entonces el número 13 es perdedor, luego el número 12 es ganador. Continuando de esta manera, se concluye que el número 1 es perdedor. Por lo tanto, Luis tiene una estrategia ganadora: elegir siempre los números perdedores. En efecto, Juan puede sólo colar el 2; Luis deja el 3; Juan puede elegir el 6 o el 4. Si elige el 6 Luis deja el 7 y si elige el 4 Luis deja el 5. Así sucesivamente Juan debe dejar a Luis siempre en un número ganador.

10. En una pizarra está escrito el número 1. Dos jugadores: Juan y Luis, practican un juego con las siguientes reglas: ellos juegan alternadamente, comenzando con Juan. Cada jugador, en su turno, sustituye el número escrito en la pizarra sumándole 1 o multiplicándole por 2. Pierde el primer jugador que obtiene un resultado mayor o igual que 31. Determine cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicho jugador.

    Solución:

Se definen los números ganadores, perdedores y de empate como en el **Ejemplo**. 30 es un número perdedor, entonces 29 es un número ganador, luego 28 es un número perdedor, entonces 27 es un número ganador. Continuando de esta manera, los números 26, 24, 22, 20, 18 y 16 son perdedores y los números 25, 23, 21, 19 y 17 son ganadores, luego los números $15, 14, 13, \ldots, 8$ son ganadores, luego el número 7 es perdedor, entonces el número 6 es ganador, luego el número 5 es perdedor, entonces el número 4 es ganador, luego el número 3 es perdedor, entonces el número 2 es ganador, luego el número 1 es perdedor. Por lo tanto, Luis tiene una estrategia ganadora: elegir siempre los números perdedores.

11. En una pizarra está escrito el número 12. Dos jugadores: Branco y Rafael, practican un juego con las siguientes reglas: ellos juegan alternadamente, comenzando con Branco. Cada jugador, en su turno, sustituye el número escrito en la pizarra sumándole 1 ó 2 o multiplicándole por 3. Gana el primer jugador que obtiene un resultado mayor o igual que 91. Determine cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicho jugador.

    Solución:

    Aquí Rafael tiene una estrategia ganadora. En efecto Branco debe escribir 13, 14 o 36. Si escribe 36, Rafael multiplica por 3 y gana. Si escribe 13 Rafael escribe 15; si escribe 14, Rafael escribe 15. Branco ahora puede escribir 16, 17 o 45. Si escribe 45, Rafael multiplica por 3 y gana. Si escribe 16, Rafael escribo 18; si escribe 17, Rafael escribe 18. Y así sucesivamente.

12. En una hoja cuadriculada juegan Helena y Adriana. En un cuadrado de 5x5 marcan los puntos del borde y el juego se trata de que cada una de ellas va colocando, alternadamente, un trazo del borde de un lado de un cuadrado del cuadriculado. Cuando se completan los cuatro lados quien completa coloca la letra inicial de su nombre (A o H)y sigue el juego con el turno de la contrincante. Quién completa el último cuadrado recibe un bono de 25 letras con su nombre. Gana quién tiene más letras en total (entre letras dibujadas en el cuadrado y bono). Si parte Adriana ¿ quién ganará el juego?

    Solución:

    La cantidad de segmentos horizontales a dibujar es de $5 \times 6 = 30$. La cantidad de segmentos verticales es también 30. Por tanto, deben dibujar 60 segmentos. Cómo Adriana inicia el juego, ella marcará su trazo en los lugares 1,3,5,7,....y Helena lo marcará en los lugares 2,4,6,8,...Así, Helena marcará el último trazo. Por tanto recibirá 25 letras de bono. Cómo en el cuadrado se puede marcar un máximo de 25 letras, y la última la marcó Helena, ganará Helena ya que tiene, al menos 26 letras y Adriana tendrá, a lo más, 24.

13. En una hoja cuadriculada juegan Helena y Adriana. En un rectángulo de 22x17 marcan los puntos del borde y el juego se trata de que cada una de ellas va colocando, alternadamente, un trazo del borde de un lado de un cuadrado del cuadriculado. Cuando se completan los cuatro lados quien completa coloca la letra inicial de su nombre (A o H)y sigue el juego con el turno de la contrincante. Quíen completa el último cuadrado recibe un bono de 374 letras con su nombre. Gana quién tiene más letras en total (entre letras dibujadas en el cuadrado y bono). Si parte Adriana ¿ quién ganará el juego?

    Solución:

    La cantidad de segmentos horizontales a dibujar es de $23 \times 17 = 391$. La cantidad de segmentos verticales es $18 \times 22 = 396$. Por tanto deben dibujar $391 + 396 = 787$ segmentos. Cómo Adriana inicia el juego, ella marcará su trazo en los lugares 1,3,5,7,....y Helena lo marcará en los lugares 2,4,6,8,...Así, Adriana marcará el último trazo. Por tanto recibirá 374 letras de bono. Como completó el último cuadrado recbirá, al menos 375 letras. Cómo en el cuadrado se puede marcar un máximo de 374 letras, ganará Adriana ya que Helena puede marcar, a lo más, 373 letras.

14. En una gran hoja cuadriculada juegan Helena y Adriana. En un cuadrado de 2017x2017 marcan los puntos del borde y el juego se trata de que cada una de ellas va colocando, alternadamente, un trazo del borde de un lado de un cuadrado del cuadriculado. Cuando se completan los cuatro lados la que lo completa coloca la letra inicial de su nombre (A o H)y sigue el juego con el turno de la contrincante. Quíen completa el último cuadrado recibe un bono de 4.068.289 letras con su nombre. Gana quién tiene más letras en total (entre letras dibujadas en el cuadrado y bono). Si parte Adriana ¿ quién ganará el juego?

Solución:

La cantidad de segmentos horizontales a dibujar es de 2018×2017. La cantidad de segmentos verticales es 2018×2017. Por tanto deben dibujar $2 \times 2018 \times 2017$ segmentos, o sea, un número par de segmentos. Como Adriana inicia el juego, ella marcará su trazo en los lugares 1,3,5,7,....y Helena los marcará en los lugares 2,4,6,8,...Así, Helena marcará el último trazo. Por tanto recibirá 4.068.289 letras de bono. Cómo en el cuadrado se puede marcar un máximo de 4.068.289 letras, y Helena cerró el último cuadrado, ganará Helena.

15. Sobre una mesa se tienen 71 fichas. Dos jugadores: Marco y Antonio, practican un juego con las siguientes reglas: ellos juegan alternadamente, comenzando con Marco. Cada jugador, en su turno, retira una, dos o tres fichas. A partir del primer turno de Antonio, ningún jugador puede retirar la cantidad de fichas que el otro jugador retiró en su último turno. Pierde el jugador que no puede realizar su jugada. Determine cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y encuentre una estrategia ganadora para dicho jugador.

Solución:

Solución 1:

Vamos a suponer que hay una cantidad n de fichas en la mesa.

1.- $n = 1, 2, 3$. En este caso gana el jugador que empieza ya que puede retirar n fichas en su jugada. Con eso, el segundo jugador no puede hacer su movimiento y pierde.

2.- $n = 4$.

a.-) Suponemos que el primer jugador saca 1 ficha. Quedan 3 fichas en la mesa. El segundo jugador saca las tres fichas y gana el juego.

b.- Suponemos que el primer jugador saca 2 fichas. Quedan en la mesa dos fichas. Por las condiciones del juego el segundo jugador no puede sacar las dos fichas. Así, saca una ficha y deja una. Por las condiciones del juego, el primer jugador no puede sacar esa ficha. Gana el segundo jugador.

c.- El primer jugador saca tres fichas. Queda una ficha en la mesa. El segundo jugador saca la ficha y gana el juego.

$\therefore$ El segundo jugador gana el juego.

3.- $n = 5, 6, 7$. En este caso el primer jugador saca una, dos o tres fichas y quedan 4 fichas en la mesa. De acuerdo al caso anterior, el segundo jugador pierde el juego.

4.- $n = 8$

a.-) Suponemos que el primer jugador saca 1 ficha. Quedan 7 fichas en la mesa. El segundo jugador saca tres fichas y quedan 4 fichas en la mesa. De acuerdo al caso $n = 4$ el primer jugador pierde el juego.

b.- Suponemos que el primer jugador saca 2 fichas. Quedan en la mesa 6 fichas. Por las condiciones del juego el segundo jugador no puede sacar dos fichas. Así, saca una ficha y quedan 5. Por las condiciones del juego, el primer jugador no puede sacar una ficha. Puede sacar dos o tres.

b.1.- El primer jugador saca dos fichas. Quedan tres fichas en la mesa. El segundo jugador saca las tres fichas y gana el juego.

b.2.- El primer jugador saca tres fichas. Quedan dos fichas en la mesa. El segundo jugador saca las dos fichas y gana el juego

c.- El primer jugador saca tres fichas. Quedan 5 fichas en la mesa. El segundo jugador saca una ficha y quedan 4 fichas en la mesa. De acuerdo al caso $n = 4$, el segundo jugador gana el juego.

$\therefore$ El segundo jugador gana el juego.

5.- $n = 9, 10, 11$. En este caso el primer jugador saca una, dos o tres fichas y quedan 8 fichas en la mesa. De acuerdo al caso anterior, el segundo jugador pierde el juego.

6.- $n = 12$

a.- Suponemos que el primer jugador saca 1 ficha. Quedan 11 fichas en la mesa. El segundo jugador saca tres fichas y quedan 8 fichas en la mesa. De acuerdo al caso $n = 8$ el primer jugador pierde el juego.

b.- Suponemos que el primer jugador saca 2 fichas. Quedan en la mesa 10 fichas. Por las condiciones del juego el segundo jugador no puede sacar dos fichas. Así, saca una ficha y quedan 9. Por las condiciones del juego, el primer jugador no puede sacar una ficha. Puede sacar dos o tres.

b.1.- El primer jugador saca dos fichas. Quedan 7 fichas en la mesa. El segundo jugador saca tres fichas, en la mesa quedan 4 fichas, y gana el juego.

b.2.- El primer jugador saca tres fichas. Quedan 6 fichas en la mesa. El segundo jugador saca dos fichas, en la mesa quedan 4 fichas, y gana el juego

c.- El primer jugador saca tres fichas. Quedan 9 fichas en la mesa. El segundo jugador saca una ficha y quedan 8 fichas en la mesa. De acuerdo al caso $n = 8$, el segundo jugador gana el juego.

$\therefore$ El segundo jugador gana el juego.

Sucesivamente: todos los casos $4k$ con $k \geq 1$ los gana el segundo jugador y todos los casos $4k + 1; 4k + 2$ y $4k + 3$ los gana el primer jugador.-

Por tanto, para $n = 71$ el primer jugador tiene una estrategia ganadora ya que $71 = 4 \times 17 + 3$.

Solución 2:

En este problema, la situación depende de la cantidad n de fichas sobre la mesa y de la cantidad f de fichas que el otro jugador retiró en su último turno, lo que será denotado con el par (n, f). Se definen los números ganadores, perdedores y de empate como en el **Ejemplo**, pero en este problema es conveniente definir una función $F : \mathbb{Z}^+ \times \{1, 2, 3\} \to \{G, P, E\}$ de la siguiente manera: $F(n, f)$ es igual a G, P o E si la situación (n, f) es ganadora, perdedora o de empate, respectivamente.

Si $n \leq 3$ y $n \neq f$, entonces $F(n, f) = G$ porque este jugador puede retirar n fichas y gana. $F(1, 1) = P$ porque este jugador no puede realizar su jugada. $F(2, 2) = G$ porque este jugador debe retirar una ficha y $F(1, 1) = P$. $F(3, 3) = P$ porque este jugador debe retirar $k < 3$ fichas y $F(3 - k, k) = G$.

Si $n \geq 4$, entonces $F(n, f)$ sólo depende de $F(n - 1, 1)$, $F(n - 2, 2)$ y $F(n - 3, 3)$:

$$F(n, f) = \begin{cases} \text{G}, & \text{si existe } k \in \{1, 2, 3\}, k \neq f, \text{ tal que } f(n - k, k) = \text{P}. \\ \text{P}, & \text{si } f(n - k, k) = \text{G para todo } k \in \{1, 2, 3\}, k \neq f. \end{cases}$$

En particular, para todo $n \geq 1$, $f \in \{1, 2, 3\}$ se puede calcular $F(n, f)$ y $F(n, f) \neq E$. En la siguiente tabla se muestran los valores de $F(n, f)$ para $n \leq 7$:

Los subtableros de dimensiones 3×3 formados por las casillas de las columnas 1, 2, 3 y 5, 6, 7 son iguales, entonces $F(n, f) = F(n - 4, f)$ para todo (n, f) con $n \geq 4$.

Como inicialmente hay 71 fichas sobre la mesa y $F(68, 3) = F(4, 3) = P$, entonces Marco tiene una estrategia ganadora: retirar tres fichas en su primer turno y, en adelante, dejar siempre a Antonio en una posición perdedora.

Asignación de preguntas y puntajes por Nivel

nivel y pregunta	1	2	3	4	5	6
7/8	P1	P3	P4	P8	P9	P12
Puntaje	2	2	4	2	5	5
I/II	P2	P5	P7	P10	P13	P15
Puntaje	2	2	2	4	6	4
III/IV	P3	P6	P7	P11	P14	P15
Puntaje	2	2	2	4	5	5

La pregunta 15 se hace en I/II pero se ocupan 14 fichas, inicialmente.