CMAT Campeonato Escolar de Matemáticas

XV

PrimeraFecha
22 de Abril de 2017
Soluciones
Individual

---

1 Max recibe una mesada muy particular puesto que va variando cada mes, de acuerdo a las siguientes condiciones:

- A Max le quitan el 20 % de su mesada si tiene 3 o más anotaciones en el colegio al mes.
- A Max le quitan el 40 % de su mesada si tiene un promedio de notas menor o igual a 5,5 al mes.
- A Max le aumentan su mesada en un 50 % de su mesada, si obtiene un promedio de notas mayor o igual a 6,5 al mes.

Supongamos que Max debe ir a su primer día de clases en el mes de Marzo y que inicialmente recibió una mesada de $10000 a finales de Febrero. Luego Max tuvo:2 anotaciones en Abril, Mayo y Junio; 3 anotaciones en Agosto y Octubre y 4 anotaciones en Septiembre y Noviembre.

Los promedios de notas de Max fueron: (5,5), (6,0), (6,8), (6,5), (6,3), (5,2), (5,3), (6,7), (5,7), (6,6); respectivamente en cada mes, a partir de marzo.

Como a nuestro amigo Max le gusta ahorrar todas sus mesadas, calcule:

1. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado hasta el mes de Agosto?
2. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado para las vacaciones de verano (es decir, hasta Diciembre)?

Nota 1: Max recibe su mesada al final de cada mes.
Nota 2: Los cálculos se hacen en base a la mesada recibida el mes anterior (por ejemplo para calcular cuanto recibirá Max el mes de Marzo, se toma la mesada de Febrero).
Nota 3: Los valores decimales se aproximan al entero más cercano (por ejemplo($17,4$ se aproxima a 17 y $17,5$ se aproxima a 18).

Solución

Realizamos un cuadro mensual para registrar los datos del problema y cual es la mesada respectivamente de cada mes.

	Anotaciones	Promedio Notas	Mesada
Marzo	0	5,5	\$6000
Abril	2	6,0	\$6000
Mayo	2	6,8	\$9000
Junio	2	6,5	\$13500
Julio	0	6,3	\$13500
Agosto	3	5,2	\$5400
Septiembre	4	5,3	\$2160
Octubre	3	6,7	\$2808
Noviembre	4	5,7	\$2246
Diciembre	0	6,6	\$3369

Concluimos que Max tiene ahorrado \$63400 hasta el mes de Agosto y para sus vacaciones tendrá ahorrado \$73983 (considerando los \$10000 iniciales en ambos casos.)

2 Dado un tablero cuadriculado infinito, dos jugadores: A y R, practican un juego con las siguientes reglas: A y R juegan alternadamente, comenzando con A. A tiene un lápiz azul y R tiene un lápiz rojo. Cada jugador, en su turno, elige tres casillas sin color y las colorea usando su lápiz. El juego termina cuando se forma un subtablero de dimensiones 2×2 con sus cuatro casillas del mismo color, y gana el jugador que formó dicho subtablero. Encuentre una estrategia ganadora para A, con la menor cantidad posible de turnos.

Solución

Después del primer turno, hay tres casillas de cada color, entonces se necesitan al menos dos turnos para tener un ganador. Vamos a demostrar que A tiene una estrategia ganadora en dos turnos.
En su primer turno, A colorea las tres casillas indicadas con la letra A en la figura:

B	B		
B	A	$\times$	
C	A	A	D
C	C	D	D

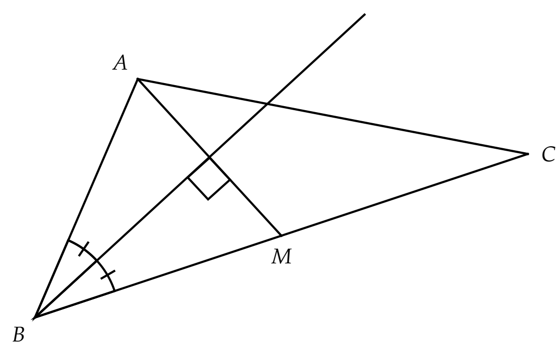
En su primer turno, R debe evitar que A gane a continuación, para lo cual debe colorear la casilla marcada con $\times$, al menos una casilla indicada con la letra B, al menos una casilla indicada con la letra C y al menos una casilla indicada con la letra D. Esto es imposible, porque R sólo puede colorear tres casillas. Por lo tanto, A gana en su segundo turno.

Segundo Nivel

1 En un triángulo, la medida de un lado es el doble de la medida de otro. Pruebe que una de las transversales de gravedad es perpendicular a una de las bisectrices.
Recuerde que, en un triángulo, se llama *transversal de gravedad* a un segmento trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Todo triángulo tiene tres transversales de gravedad.

Solución

Supongamos que en un triángulo $\triangle ABC$, se cumple que $2AB = BC$. Sea M el punto medio de $\overline{BC}$. Tenemos que $AB = BM$, o sea el triángulo $\triangle ABM$ es isósceles de base $\overline{AM}$. Notemos que la bisectriz del ángulo $\sphericalangle MBA$ es altura en el triángulo $\triangle ABM$, luego $\overline{AM}$ es perpendicular a la bisectriz del $\sphericalangle ABC$.



2 Si sumamos 36 al número 37 obtenemos 73. Establezcan todos los números de la forma ab tales que $ab + 36 = ba$. Justifica tu respuesta.

Solución

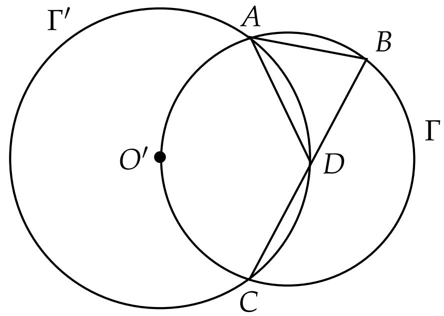
La propiedad se puede traducir en lo siguiente: «Existen números de la forma $10a + b$ tales que al sumarle 36 la suma resulta ser $10b + a$». Luego:

$$\begin{aligned} 10a + b + 36 &= 10b + a \\ 36 &= 10(b-a) - (b-a) \\ 36 &= 9(b-a) \\ 4 &= b - a \end{aligned}$$

Entonces, los pares (a, b) que satisfacen la igualdad anteriormente dicha son $(1,5), (2,6), (3,7), (4,8), (5,9)$. Por lo tanto, los números que cumplen la propiedad son 15, 26, 37, 48 y 59.

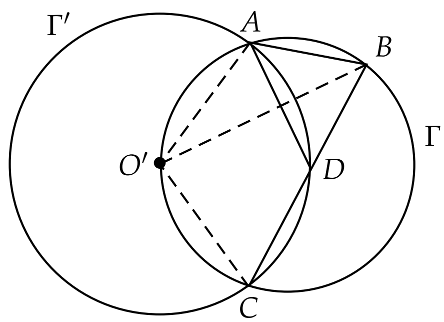
Tercer Nivel

1 Sean Γ y Γ' dos circunferencias secantes en los puntos A y C, de manera tal que Γ pasa por el centro O' de Γ', como se muestra en la figura. Sea B un punto de Γ, exterior a Γ'. La cuerda $\overline{BC}$ intersecta a Γ' en el punto D. Pruebe que $BD = BA$.



Solución

Sea α tal que $\measuredangle ABC = 2\alpha$. Se trazan los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$:



El cuadrilátero $ABCO'$ está inscrito en Γ, entonces $\measuredangle CO'A = 180^\circ - 2\alpha$. El ángulo $\angle ADC$, inscrito en Γ', subtiende un arco cuyo ángulo central mide $180^\circ + 2\alpha$, entonces $\measuredangle ADC = 90^\circ + \alpha$.
Los ángulos $\angle ADB$ y $\angle ADC$ son suplementarios, entonces $\measuredangle ADB = 90^\circ - \alpha$. Además, la suma de los ángulos interiores del triángulo $\triangle ABD$ es 180°, entonces $\measuredangle BAD = 90^\circ - \alpha$.
Como $\measuredangle BAD = 90^\circ - \alpha = \measuredangle BDA$, entonces $BD = BA$.

2 Se tienen un tablero de ajedrez (8×8) y tres botones que sólo pueden ser distinguidos por su color. Determine de cuántas maneras se pueden colocar estos botones en casillas distintas del tablero, en los siguientes casos:

(a) Los tres botones tienen distinto color: rojo, blanco y azul.

(b) Los tres botones son rojos.

(c) Dos botones son rojos y el otro botón es blanco.

Aclaración: Considere que no es posible rotar el tablero.

Solución

(a) Si los botones son colocados en el siguiente orden: rojo, blanco y azul, entonces hay 64 opciones para colocar el botón rojo, 63 para el blanco y 62 para el azul. Por lo tanto, los botones se pueden colocar de $64 \cdot 63 \cdot 62 = 249984$ maneras distintas.

(b) Por cada manera de colocar tres botones rojos, hay seis maneras de colocar tres botones de distinto color. En la parte (a) fueron contadas las maneras de colocar tres botones de distinto color (249984), entonces los tres botones rojos se pueden colocar de $249984 : 6 = 41664$ maneras distintas.

(c) Por cada manera de colocar dos botones rojos y uno blanco, hay dos maneras de colocar tres botones de distinto color. En la parte (a) fueron contadas las maneras de colocar tres botones de distinto color (249984), entonces los dos botones rojos y uno blanco se pueden colocar de $249984 : 2 = 124992$ maneras distintas.

Cuarto Nivel

1 Sea $n \in \mathbb{N}$ un número que cumple que los números 3, 5 y 9 aparecen al menos una vez como dígito de n y, además, n es divisible por 3, 5 y 8. Hallar los seis menores valores de n.

Solución

Si un número natural n es divisible por 5 y por 8, es divisible por 40. La cifra de las unidades es entonces 0, y la de las decenas, par. Como este número satisface además de que entre sus cifras aparezcan 3,5 y 9, tiene que tener al menos 5 lugares.

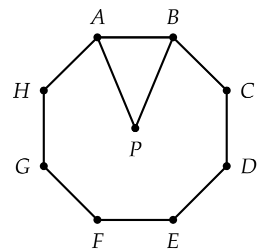
Supongamos que el número n tiene 5 lugares, entonces la cifra de las centenas es impar. Según la regla de divisibilidad por 8 resulta: La cifra de las decenas de n tiene que ser 2 o 6. Entonces la suma de las cifras básicas de n no es divisible por 3. Luego el número tiene que tener por lo menos 6 lugares.

Supongamos ahora que el número tiene exactamente 6 lugares y que la primera cifra es 1. En este caso de nuevo la cifra de las centenas tiene que ser impar y la cifra de las decenas, 2 o 6. Cuando la cifra de las decenas es 2, n no es divisible por 3, pero con la cifra 6 sí es divisible por 3. Luego existen exactamente seis números naturales de seis lugares y con un 1 como primera cifra que satisfacen las condiciones:

$$135960, 139560, 153960, 159360, 193560, 195360$$

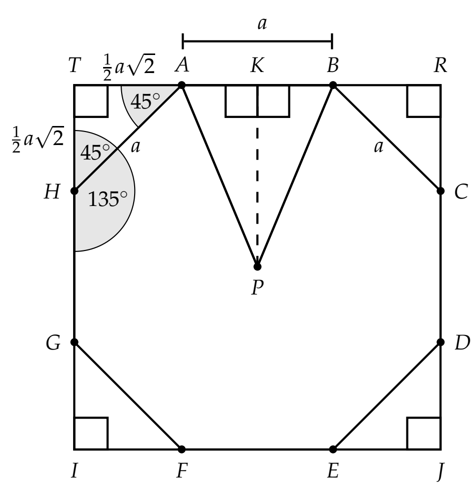
Cualquier otro número natural que cumpla las condiciones dadas, o tiene más de seis cifras, o si tiene seis cifras, la primera es mayor que 1. Por eso los números naturales anteriores son los seis menores números naturales que cumplen las condiciones dadas.

2 Dado un octágono regular, con área del $\triangle APB = \sqrt{2}+1$, calcule la medida, sin usar razones trigonométricas, del lado del octágono $ABCDEFGH$. Donde P es el centro del octágono regular.



Solución

Sabemos por la formula $\dfrac{180(n-2)}{n}$ al evaluarla en $n = 8$ que cada ángulo interior del octágono regular mide $135°$.



Por ángulo extendido $\sphericalangle THA \cong \sphericalangle TAH = 45°$, luego el $\sphericalangle HTA = 90°$, análogo para el $\triangle BCR$. Por Pitágoras $HT = TA = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}$, luego $TR = a\sqrt{2}+a$.

Pero por el procedimiento anterior, podemos decir que $IJRT$ es un cuadrado de lado $a\sqrt{2}+a$ y como P es el centro del octágono, es centro del cuadrado.

Luego $\overline{KP}$, altura del triángulo APB, mide $\dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2}+a\right)$ y por datos del problema $\dfrac{1}{4}a\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot a = \sqrt{2}+1 \therefore \dfrac{1}{4}a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 2$, calculando la medida del octágono regular.