CMAT Campeonato Escolar de Matemáticas

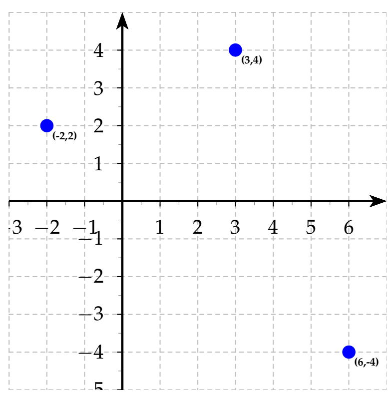
XV

SegundaFecha
20 de Mayo de 2017
Soluciones
Grupal

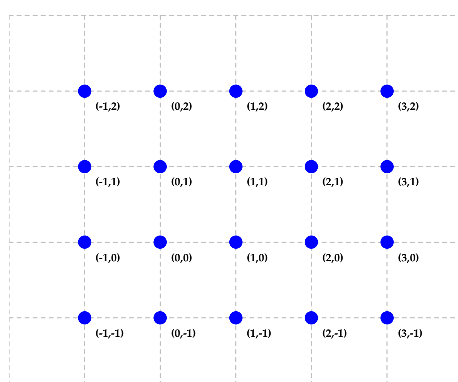
Sumas en línea

Algunos integrantes del equipo académico del CMAT, que están estudiando matemática en la universidad, han estado con tantas pruebas que han llegado a soñar con algunas de sus materias (algo que es normal para el equipo, pero esta vez eran más recurrentes). Uno de los integrantes, a quien llamaremos Mr. V (para proteger su identidad), un día despertó con una idea un tanto desquiciada; pero, para estándares CMAT, muy normal: ¡¡¡quiso hacer una prueba con lo que estaba revisando en sus cursos universitarios!!! Cuando Mr. V le contó su idea al Sr. S y al gran M, estos últimos lograron contener las ansias de Mr. V y acordaron que trabajarían en un mundo donde *sólo existirá un plano cudriculado, en el cual los únicos puntos de interés serán los vértices de tales cuadrados*.

Mr. V, por tanto, se puso a escribir, junto al Sr. S, una prueba en la que sólo importarán los vértices de la cuadrícula y los lados de los cuadrados que la conforman. Para ello, han definido unas líneas que servirán de referencia y un punto $(0,0)$. Así, por ejemplo, tendremos los puntos $(3,4)$, $(-2,2)$ y $(6,-4)$ dibujados en la cudrícula, donde el punto $(3,4)$ corresponde a contar 3 segmentos hacia la derecha y 4 hacia arriba, y el punto $(-2,2)$, a contar 2 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia arriba. Por lo que el primer número indicará cuanto se mueve horizontalmente, siendo positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda y, el segundo número, cuánto se mueve verticalmente, donde hacia arriba será positivo y hacia abajo negativo.

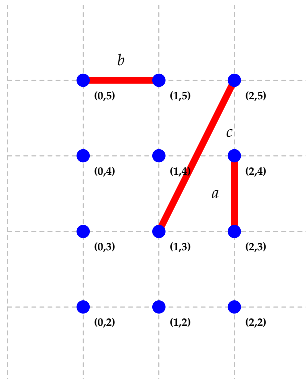


Para los que están en cursos superiores: *Efectivamente es lo que conocen como Plano Cartesiano, solo que se ocuparán los puntos con coordenadas enteras*. Y, por tanto, nuestro lugar de trabajo se verá como

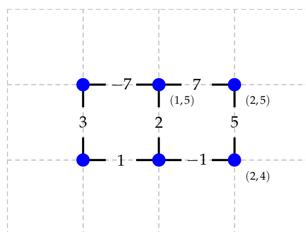


Luego de varias discusiones entre Mr. V, el Sr. S y el gran M, se pusieron de acuerdo sobre las palabras que ocuparían en esta prueba, de forma que la mayoría (o eso esperaban) entienda la prueba. Las palabras tienen, practicamente, la misma definición que conocen de ella o que es intuitivo pensar.

A cada segmento horizontal o vertical que une dos puntos consecutivos (que están a distancia 1) lo llamaremos una ***arista***. Por ejemplo, abajo hemos marcado dos aristas: la que une $(2,3)$ y $(2,4)$ (llamada a), y la que une $(1,5)$ y $(0,5)$ (llamada b). Por otro lado, la línea c que une $(1,3)$ y $(2,5)$ no es una arista en este mundo.

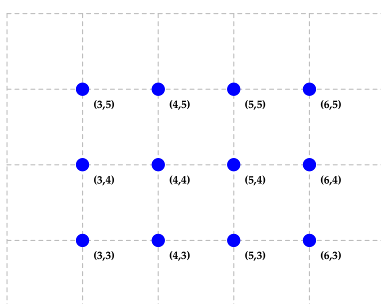


Podemos asignar un ***peso*** (un valor numérico) a cada una de las aristas. Por ejemplo, una posible ***asignación de pesos*** a las aristas es la que se presenta a continuación, donde la arista entre $(2,4)$ y $(2,5)$ pesa 5 y la que está entre $(1,5)$ y $(2,5)$ pesa 7.



Definimos un ***sector*** como una región rectangular de la cuadrícula. Por ejemplo, al final de la plana inicial se mostró el sector entre los puntos $(-1,-1)$ y $(3,2)$ y el dibujo anterior muestra el sector entre $(0,4)$ y $(2,5)$.

1. A partir del sector mostrado a continuación:

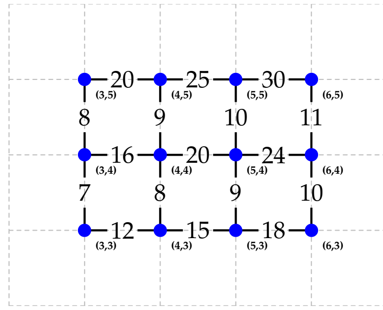


   a) Den a cada una de las aristas su peso, que se asigna de la siguiente manera :

      - Si la arista es horizontal, su peso es la multiplicación de las coordenadas del extremo de la derecha de esta arista
      - Si la arista es vertical, su peso es la suma de las coordenadas del extremo superior de esta arista

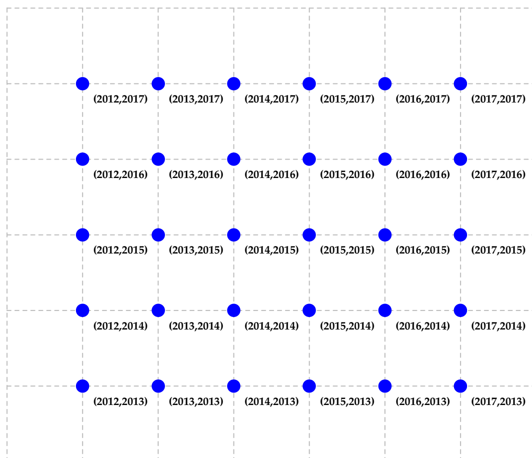
Solución:

a) Los pesos de las aristas son los presentados en cada una de ellas a continuación.



■

2. A partir del sector mostrado a continuación:



determine las suma de los pesos de las aristas del borde de éste sector, considerando que el peso de cada arista cumple que:

- Si la arista es horizontal, su peso será el doble de la segunda coordenada de sus extremos.
- Si la arista es vertical, su valor será el triple de la primera coordenada de sus extremos.

Solución:

Notemos que las aristas horizontales del borde inferior y del borde superior, de la figura, tienen la misma segunda coordenada. Por lo que el peso de cada arista horizontal del borde inferior de la figura es $2 \cdot 2013 = 4026$; mientras que el peso de cada arista horizontal del borde superior de la figura es es $2 \cdot 2017 = 4034$. Como son 6 aristas horizontales inferiores y 6 superiores, tenemos que la suma de sus pesos es

$$6 \cdot 4026 + 6 \cdot 4034 = 48360$$

Para las aristas verticales, por un argumento similar, se tiene que el peso asignado a aquellas que están en la misma vertical es el mismo. En el caso de la vertical de la izquierda del sector, cada una de las aristas tendrá un peso de $3 \cdot 2012 = 6036$; mientras que en la vertical de la derecha del sector , cada arista tendrá un peso de $3 \cdot 2017 = 6051$. Por lo que la suma de los pesos de las dos verticales, al ser 4 aristas por cada lado, será:

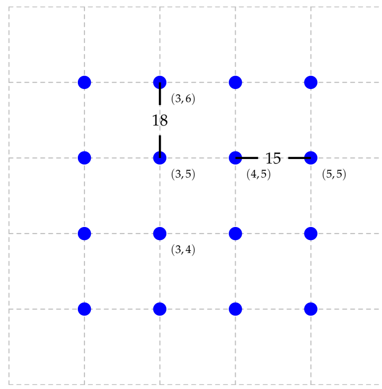
$$4 \cdot 6036 + 4 \cdot 6051 = 48348$$

Así, la suma de los pesos de las todas aristas del borde del sector será 96708.

■

3. A continuación se presentan las preguntas para los respectivos niveles.

7mo-8vo Decimos que una asignación de pesos de aristas es (m, n)-perfecta si el peso asignado a una arista horizontal es m veces el valor de la segunda coordenada de sus extremos, y el peso asignado a una arista vertical es n veces el valor de la primera coordenada de sus extremos. Supongan que la asignación de pesos de la siguiente figura es (m, n)-perfecta. Determinen m, n y completen los pesos que se deben asignar a las aristas faltantes.



Solución:

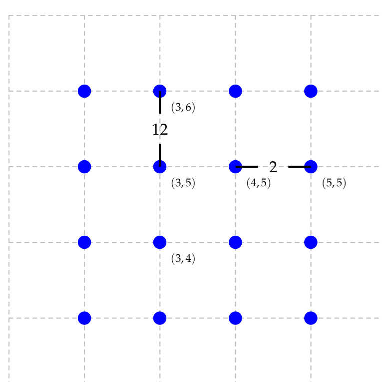
Hemos de notar que el valor de la arista horizontal es 15, y la segunda coordenada de sus extremos es 5. Por lo que quedaría $5m = 15$, para que se cumpliese la cualidad de ser perfecto. Por lo que $m = \frac{15}{5} = 3$.

De forma similar, la arista vertical es 18, y la primera coordenada de sus extremos es 3. Por tanto, la condición quedaría $3n = 18$. Lo que da que $n = 6$.

Luego, con esta información se puede completar la asignación de pesos a las aristas del tablero.

■

Menor-Mayor Sean a y b números racionales positivos. Decimos que una asignación de pesos de aristas es (a, b)-perfecta si el peso asignado a una arista horizontal es a veces el valor de la segunda coordenada de sus extremos, y el peso asignado a una arista vertical es b veces el valor de la primera coordenada de sus extremos. Supongan que la asignación de pesos de la siguiente figura es (a, b)-perfecta. Determinen a, b y completen los pesos que se deben asignar a las aristas faltantes.



Solución:

Hemos de notar que el valor de la arista horizontal es 2, y la segunda coordenada de sus extremos es 5. Por lo que quedaría $5a = 2$, para que se cumpliese la cualidad de ser perfecto. Por lo que $a = \frac{2}{5}$.

De forma similar, la arista vertical es 12, y la primera coordenada de sus extremos es 3. Por tanto, la condición quedaría $3b = 12$. Lo que da que $b = 4$.

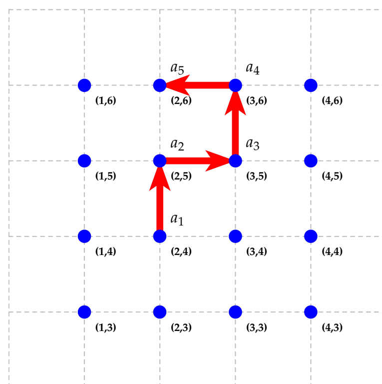
Luego, con esta información se puede completar la asignación de pesos a las aristas del tablero.

■

Definiremos un ***camino*** como una secuencia ordenada de aristas. Y para representar un camino, lo haremos de dos formas: a través de flechas sobre las aristas, de forma de marcar la dirección del mismo; o bien, a través de una secuencia de puntos. Por ejemplo, la asignación

$$(2,4) \to (2,5) \to (3,5) \to (3,6) \to (2,6)$$

es el mismo camino que está abajo.



4. Verifiquen cuál(es) de las siguientes asignaciones son caminos, y grafiquen aquellas que lo sean.

   a) $(3,4) \to (3,5) \to (2,5) \to (1,6) \to (2,6) \to (3,6)$

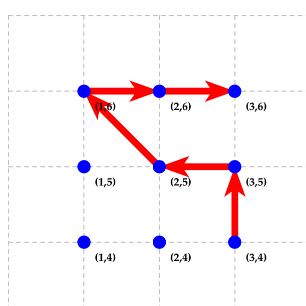
   b) $(2,4) \to (2,5) \to (1,5) \to (0,5) \to (0,4) \to (1,4)$

   c) $(5,5) \to (5,3) \to (4,3) \to (4,4) \to (3,4) \to (3,5)$

   d) $(5,5) \to (5,4) \to (4,4) \to (3,4) \to (3,5) \to (3,6)$

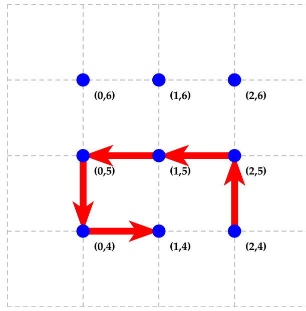
   Solución:

   a) En este caso tenemos:



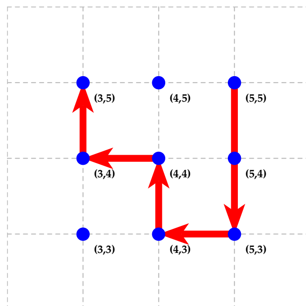
   Lo que no cumple con las condiciones indicadas para ser un camino, pues utiliza una diagonal.

   b) En este caso tenemos:



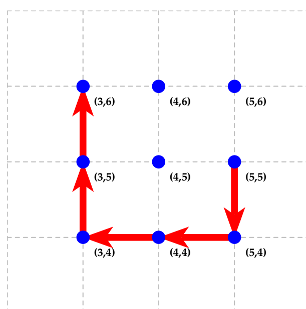
Lo cual cumple con todas las condiciones para ser un camino.

c) En este caso tenemos:



El cual no es un camino pues no une dos puntos consecutivos (salta de $(5,5)$ a $(5,3)$ sin pasar por el punto intermedio.

d) En este caso tenemos:



Lo cual es un camino que cumple todas las condiciones.

■

5. Creen tres caminos con punto inicial $(1,3)$ y final $(5,2)$, escriban los puntos por los que pasa cada uno y grafíquenlos.

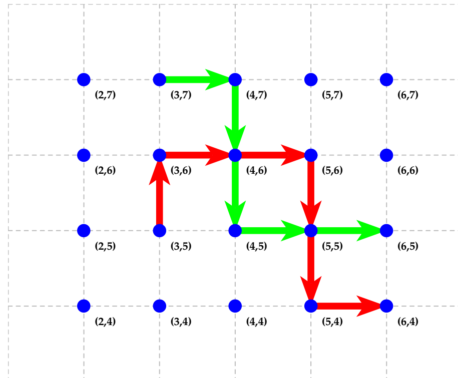
Solución:

Hay muchos caminos que satisfacen lo requerido. Por ejemplo:

- $(1,3) \to (1,2) \to (2,2) \to (3,2) \to (4,2) \to (5,2)$
- $(1,3) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,2) \to (4,2) \to (5,2)$
- $(1,3) \to (2,3) \to (3,3) \to (4,3) \to (5,3) \to (5,2)$

■

6. Escriban la secuencia de puntos por lo que pasa cada uno de los caminos dibujados abajo



Solución:

El camino claro (Verde) sigue la asignación de puntos:

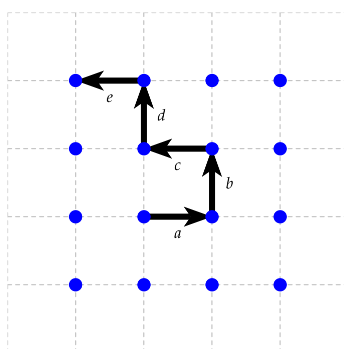
$$(3,7) \rightarrow (4,7) \rightarrow (4,6) \rightarrow (4,5) \rightarrow (5,5) \rightarrow (6,5)$$

El camino obscuro (Rojo) es el que está definido por:

$$(3,5) \rightarrow (3,6) \rightarrow (4,6) \rightarrow (5,6) \rightarrow (5,5) \rightarrow (5,4) \rightarrow (6,4)$$

■

Ahora agregaremos una nueva propiedad sobre los caminos. Diremos que una arista de un camino se recorre en el ***sentido usual*** si la punta de la flecha apunta hacia arriba o hacia la derecha, y en el ***sentido opuesto*** si la flecha apunta para otro lado. Por ejemplo, en el dibujo de abajo las aristas a, b y d están en sentido usual, y las c y e en sentido opuesto.



7. En los caminos de Pregunta la 4, ¿qué aristas se recorren en sentido usual, y qué aristas en sentido opuesto?

Solución:

Notemos que como los únicos que son caminos son el $4b$ y $4d$, son los únicos que debemos analizar. Y en el caso del $4b$ tenemos que todos salvo la primera y la última aristas están en sentido opuesto, ya que van hacia abajo o a la izquierda. Mientras que en el $4d$, los únicos que están en sentido usual son los dos últimos, ya que los otros tres van hacia abajo o hacia la izquierda.

■

Siguiendo con nuestro estudio de caminos, agregaremos un número que nos permitirá tener noción de cuál es la diferencia entre lo que pesan los caminos en el sentido usual y en el sentido opuesto. Para eso, sumaremos el peso de las aristas que van en sentido usual y restaremos aquellas que van en sentido opuesto. A este número lo llamaremos "***Suma en línea***".

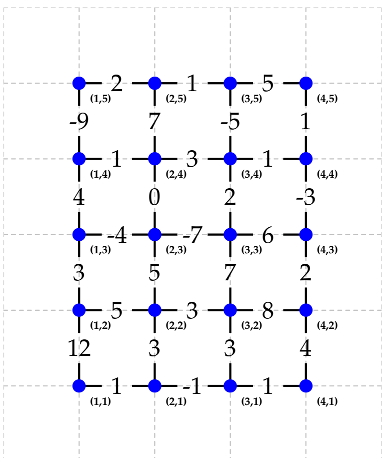
Por ejemplo, supongamos que tenemos un sector como el que está más abajo con la asignación de pesos mostrada a la izquierda, mientras que a la derecha se muestra el camino:

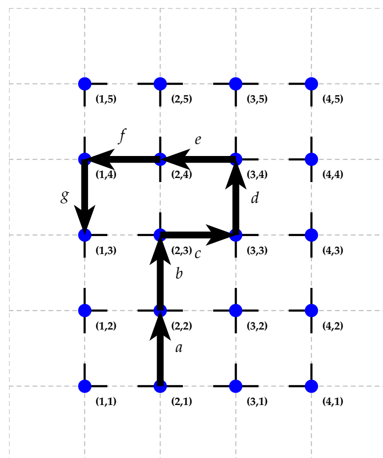
$$(2,1) \to (2,2) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,4) \to (2,4) \to (1,4) \to (1,3)$$

En este camino, las aristas a, b, c, d se recorren en sentido usual, mientras que e, f, g se recorren en sentido opuesto. Por ello, utilizando la asignación dada tenemos que su *suma en línea* está dada por

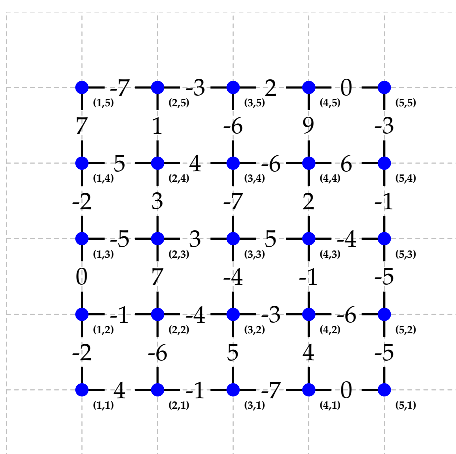
$$3 + 5 + (-7) + 2 - 3 - 1 - 4 = -5$$

Por lo que decimos que su *suma en linea* (bajo la asignación de aristas de la izquierda) es -5.





8. Calcular las *sumas en línea* de los siguientes caminos, usando la asignación de aristas dada a continuación.



a) $(1,1) \to (2,1) \to (3,1) \to (3,2) \to (2,2) \to (2,3) \to (3,3) \to (4,3)$

b) $(1,4) \to (1,3) \to (2,3) \to (2,4) \to (3,4) \to (3,5) \to (4,5) \to (4,4) \to (5,4) \to (5,3) \to (5,2) \to (4,2) \to (4,3) \to (3,3) \to (3,2) \to (3,1)$

Solución:

a)

$$4 + (-1) + 5 - (-4) + 7 + 3 + 5 = 27$$

b)

$$-(-2) + (-5) + 3 + 4 + (-6) + 2 - 9 + 6 - (-1) - (-5) - (-6) + (-1) - 5 - (-4) - 5 = 2$$

■

9. Elija dos caminos considerando que trabaja en el mismo sector de la Pregunta 8. Cada uno de los caminos debe terminar en el punto en el que comienza, no necesariamente debe ser el mismo punto, y tener largo al menos 8. Calculen la *suma en línea* de cada uno de estos caminos.

   Solución:

   Hay muchas soluciones. Por ejemplo, si tomamos el camino

$$(1,1) \to (2,1) \to (3,1) \to (4,1) \to (4,2) \to (3,2) \to (2,2) \to (1,2) \to (1,1)$$

   tendrá como *suma en línea*:

$$4 + (-1) + (-7) + 4 - (-3) - (-4) - (-1) - (-2) = 10$$

   Y, por otro lado,el camino

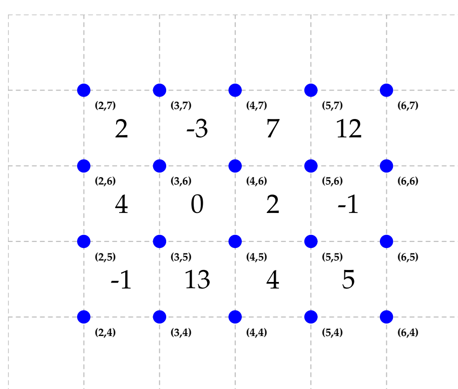
$$(1,1) \to (2,1) \to (3,1) \to (3,2) \to (3,3) \to (2,3) \to (1,3) \to (1,2) \to (1,1)$$

   tendrá como *suma en línea*:

$$4 + (-1) + 5 + (-4) - 3 - (-5) - 0 - (-2) = 8$$

■

Además de darle un peso a cada arista, podemos asignar un peso a cada cuadrado de la cudrícula, a esto lo conoceremos como ***asignación de centros***. Por ejemplo, en el siguiente sector se ha asignado a cada cuadrado de la cuadrícula un peso, el cual ha sido puesto justo en el centro de cada uno de ellos.

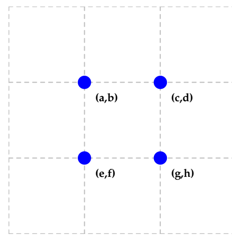


10. Al igual que lo hemos mostrado antes, ahora usted deberá asignar un peso a cada centro del sector que está entre el punto $(1,1)$ y $(3,3)$ según la siguiente regla:

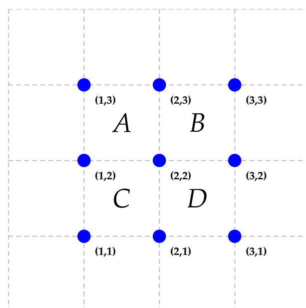
A cada cuadrado se le asignará como valor el cuociente entre el producto de la primera coordenada de la esquina superior izquierda elevada a la segunda coordenada de la misma esquina, con la suma de las coordenadas de las coordenadas de la esquina superior derecha, y el producto entre la suma de las coordenadas de la esquina inferior izquierda y la suma de las coordenadas de la esquina inferior derecha.

Solución:

Considerar que se está pidiendo que cada centro del cuadrado mostrado abajo esté regido por $\frac{a^b(c+d)}{(e+f)(g+h)}$



Lo que se traduce en la cuadrícula entregada a que $A = \frac{5}{12}$, $B = \frac{12}{5}$, $C = \frac{2}{3}$ y $D = \frac{5}{3}$



■

A partir de ahora, la asignación de centro solo tendrá una única forma de realizarse:

> *"A cada cuadrado le asignaremos la suma del peso de las aristas de abajo y de la derecha, y a esto le restaremos la suma de los pesos las dos restantes."*

Por lo que a cada cuadrado se le asignará la *suma en línea* del camino que va por el borde del cuadrado recorrido en sentido antihorario, partiendo en el vértice inferior izquierdo y terminando en el mismo.

11. *a*) Construyan una asignación de pesos de aristas, y una asignación de centros, que no sean todos ceros, en el sector que va desde el punto $(2,3)$ hasta el punto $(6,7)$.

    b) ¿Es posible construir en una asignación de arista en el mismo sector de la pregunta anterior de forma que la asignación de centros considere asignar a cada centro un 0? Si es posible muestre tal asignación; en caso contrario, justifique porque no se puede.

Solución:

a) Hay muchas soluciones. Basta tomar, por ejemplo, la asignación de la Pregunta 1 ó 2.

b) Hay muchas soluciones. Basta tomar la asignación que da a las aristas horizontales el valor de su primera coordenada del extremo izquierdo (de esta forna todos los de esa fila tienen igual peso), mientras que cada vertical debería tener el valor de la segunda coordenada del extremo superior.Al ocupar esta asignación anterior, cada cuadrado tendrá asignado un 0.

■

12. Si se tiene una *asignación de pesos* que es (m, n)-perfecta.

Variación 7mo-8vo

a) Construyan tres caminos en una configuración (m, n)-perfecta, que tengan el mismo inicio y final.

b) Calculen la suma en línea de cada uno de los caminos de la parte anterior.

c) ¿Qué propiedad cumplen los pesos de los centros cuando $m = n$ (por tanto, ambos números son iguales)?

Solución:

a) Hay muchas configuraciones (m, n)-perfectas y dentro de ellas muchos caminos con igual inicio y final.

b) Hay que corregir caso a caso.

c) En general en una configuración (m, n) perfecta vale que el peso del centro es $n - m$, por tanto si $m = n$ el valor del centro es 0.

■

Variación Menor

a) Calculen la suma en línea de tres caminos que partan en $(0, 0)$ y lleguen a $(4, 4)$, utilizando solo movimientos hacia "arriba" seguido de un movimiento hacia la "derecha".

b) Justifiquen porqué siempre da la misma suma en línea cuando $m = n$ de los caminos que van de $(0, 0)$ hasta $(4, 4)$ si sólo utilizan movimientos hacia "arriba" y hacia la"derecha".

Solución:

a) En una configuración (m, n)-perfecta que den se debe verificar que la suma en línea pedida es $10m + 6n$.

b) En este caso la cantidad anterior es $16m = 16n$.

■

Variación Mayor

a) Calculen la suma en línea del camino que va de $(0, 0)$ y llega a $(17, 17)$,utilizando solo movimientos hacia "arriba" seguido de un movimiento hacia la "derecha".

b) Justifiquen porqué siempre da la misma suma en línea cuando $m = n$ de los caminos de $(0, 0)$ hasta $(17, 17)$, si sólo utilizan movimientos hacia "arriba" y hacia la"derecha".

Solución:

a) se verifica que la suma en línea es $153m + 136n$

b) en este caso la suma anterior es de $289m = 289n$,

■

13. Demuestren que si tiene una figura cerrada cuyas aristas coinciden con los bordes de la cuadrícula, entonces independiente de la asignación de pesos que se le dé a las aristas de la cuadrícula, la *suma en línea* del borde de la figura (en sentido antihorario) es igual a la suma de las asignaciones de centros para los cuadrados que la figura encierra.

Ayuda: Puede ser de ayuda primero verificar qué es lo que pasa si se suman dos *sumas en líneas* de cuadrados adyacentes.

Solución:

Hemos de notar que al tener dos cuadrados adyacentes, por tanto, compartiendo un lado, al sumar los pesos asignados a los centros de cada cuadrado, éste se eliminará de la suma. Esto pasa porque al tener dos cuadrados adyacentes en uno de los cuadrados el lado debe ser sumado y en el otro, se debe restar éste valor.

Si este proceso se revisa cuidadosamente para cada uno de los cuadrados que están al interior de ésta figura, todos los lados que son compartidos se eliminarán. Por tanto, todos los lados del interior de la figura no se considerarán, y sólo quedará el borde.

■