Primer Nivel

1 Suponga que se han multiplicado los primeros 2017 números primos en un computador, obteniendo como resultado el número p.

a) Encuentre el dígito de las unidades de p.

b) El dígito de las decenas de p, ¿es par o impar?

Solución

a) p es el producto de los primeros 2017 números primos, es decir:

$$p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot \ldots$$

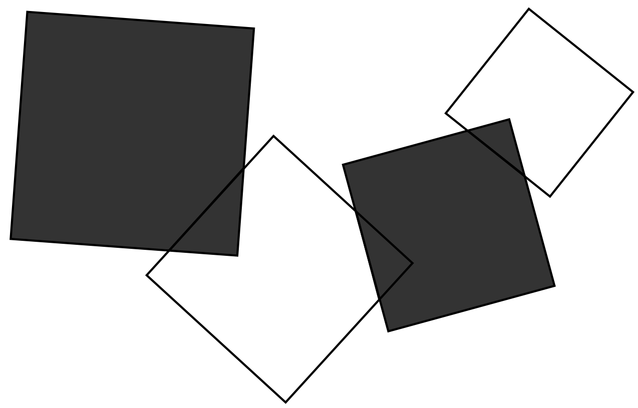
Ordenamos los factores de manera conveniente:

$$p = (2 \cdot 5) \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot \ldots \Rightarrow p = 10 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot \ldots$$

Se define el número $q = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot \ldots$. Entonces $p = 10q$ y, por lo tanto, el dígito de las unidades de p es $\boxed{0}$.

b) El dígito de las decenas de p es el dígito de las unidades del número q definido en la parte anterior. Todos los números primos multiplicados para obtener q son impares, entonces el dígito de las unidades de q (y, por lo tanto, el dígito de las decenas de p) es $\boxed{\text{impar}}$.

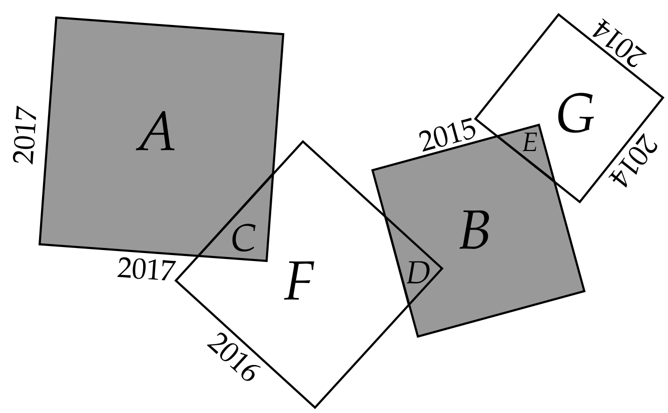
2 En la figura se muestran cuatro cuadrados de lados 2017, 2016, 2015 y 2014, de izquierda a derecha. Observe que los cuadrados son alternadamente blancos y negros y que algunos de ellos se intersectan, determinando regiones blancas y negras, regiones sólo negras (no blancas) y regiones sólo blancas (no negras).



Sean M el área total de las regiones sólo negras (no blancas) y N el área total de las regiones sólo blancas (no negras). Calcule el valor de $M - N$.

Solución

Denotemos con las letras A, B, C, D, E, F y G el área de las regiones indicadas en la figura:



El área de cada cuadrado se puede escribir en términos de A, B, C, D, E, F y G:

(I) $2017^2 = A + C$

(II) $2016^2 = C + F + D$

(III) $2015^2 = D + B + E$

(IV) $2014^2 = E + G$

El área total de las regiones sólo negras (no blancas) es $M = A + B$ y el área total de las regiones sólo negras (no blancas) $N = F + G$. Entonces debemos calcular el valor de

$$M - N = A + B - (F + G) = A + B - F - G$$

Usamos las igualdades (I), (II), (III) e (IV) para reemplazar A, F, B y G, respectivamente:

$$\begin{aligned}
M - N &= (2017^2 - C) + (2015^2 - D - E) - (2016^2 - C - D) - (2014^2 - E) \\
&= 2017^2 + 2015^2 - 2016^2 - 2014^2 \\
&= (2017^2 - 2016^2) + (2015^2 - 2014^2) \\
&= (\underbrace{2017 + 2016}_{4033})(\underbrace{2017 - 2016}_{1}) + (\underbrace{2015 + 2014}_{4029})(\underbrace{2015 - 2014}_{1})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\boxed{M - N = 8062}$.

Segundo Nivel

1 Calcule la suma de todos los números (de seis dígitos) que se pueden obtener permutando los seis dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Solución

Observamos que los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden agrupar en pares: $(1,6)$, $(2,5)$ y $(3,4)$ de manera tal que $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7$. Por lo tanto, los números (de seis dígitos) que se pueden obtener permutando 1, 2, 3, 4, 5 y 6 también se pueden agrupar en pares de la siguiente manera: n se agrupa con el número m obtenido a partir de n intercambiando 1 con 6, 2 con 5 y 3 con 4. Por ejemplo: 123456 se agrupa con 654321; 142536 se agrupa con 635241; 235146 se agrupa con 542631; etc.. Observe que la suma de los dos números de cada par es 777777: $123456 + 654321 = 777777$; $142536 + 635241 = 777777$; $235146 + 542631 = 777777$; etc.
Dado que existen $6! = 720$ números (de seis dígitos) que se pueden obtener permutando 1, 2, 3, 4, 5 y 6, con ellos se pueden formar 360 pares. Por lo tanto, la suma pedida es igual a:

$$S = 360 \cdot 777777 = 279999720$$

2 Pruebe que cada número primo distinto de 2 se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos (por ejemplo: $3 = 4 - 1$, $5 = 9 - 4$, $37 = 361 - 324$, etc.). En particular, encuentre números enteros N y M tales que $101 = N^2 - M^2$.

Solución

Como todo número impar es la diferencia de dos cuadrados perfectos: $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$ y cada número primo distinto de 2 es impar, entonces cada número primo distinto de 2 es la diferencia de dos cuadrados perfectos. En particular, para $101 = 2 \cdot 50 + 1$ tenemos $\boxed{N = 51}$ y $\boxed{M = 50}$.

Tercer Nivel

1 Sean $a, b, c \in [0, 2]$ números tales que $a + b + c = 2$. Encuentre el mayor valor posible de $ab + ac$

Solución

Observe que:

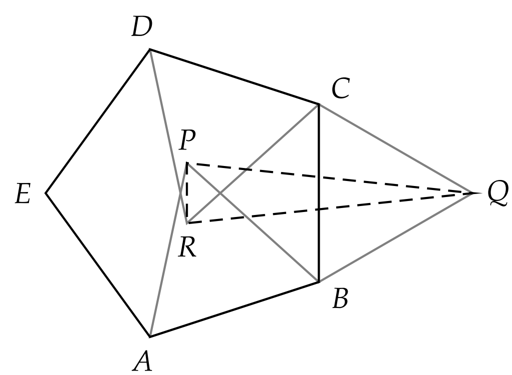
$$ab + ac = a(b + c) = a(2 - a) = 2a - a^2 = 1 - (1 - 2a + a^2) = 1 - (1 - a)^2,$$

entonces $ab + ac \leq 1$, con igualdad si y si $a = 1$. Así el mayor valor posible de $ab + bc$ sujeto a $a + b + c = 2$ es 1.

2 Sea $ABCDE$ un pentágono regular. P, Q y R son puntos tales que los triángulos $\triangle ABP$, $\triangle BCQ$ y $\triangle CDR$ son equiláteros, con P y R interiores al pentágono y Q exterior al pentágono. Determine los ángulos del triángulo $\triangle PQR$.

Solución

El triángulo $\triangle PBQ$ es obtenido a partir del triángulo $\triangle ABC$ por una rotación de $60°$ con centro B, entonces $PQ = AC$ y $\measuredangle BQP = 36°$. Análogamente, $RQ = DB$ y $\measuredangle CQR = 36°$, entonces $\measuredangle PQR = 12°$. Como $PQ = AC = DB = RQ$, entonces $\measuredangle QPR = \measuredangle QRP = 84°$.



Existe una segunda solución, "moviendo ángulos" y usando una simetría (con respecto a la mediatriz del segmento $\overline{BC}$) o el criterio LAL de congruencia para concluir que $\triangle PBQ \cong \triangle RCQ$.

Cuarto Nivel

1 Considere un tablero cuadriculado de 7×7^7 casillas (7 filas y 7^7 columnas). Cada casilla se colorea con uno de tres colores disponibles: rojo, amarillo o verde, y en cada casilla se coloca una araña (que puede ser macho o hembra). Demuestre que existen cuatro casillas distintas que son los vértices de un rectángulo, que tienen el mismo color y arañas del mismo sexo.

Solución

A cada casilla se le asigna el par (c,s), donde c es su color y s es el sexo de la araña sobre ella. Por el principio multiplicativo, existen 6 maneras de asignar un par (c,s) a cada casilla, entonces existen 6^7 maneras de asignar un par (c,s) a las siete casillas de cada columna.
Por el principio del palomar, como $7^7 > 6^7$, entonces existen dos columnas iguales, es decir, con los mismos pares (c,s) asignados a sus casillas y en el mismo orden. Sean C_1 y C_2 estas columnas. Por el principio del palomar, como $7 > 6$, entonces existen dos casillas de C_1 con el mismo par (c,s) asignado. Sean F_1 y F_2 las filas donde están dichas casillas y (c_0,s_0) el par asignado a dichas casillas. Como C_1 y C_2 son iguales, entonces las casillas de intersección de C_2 con F_1 y F_2 también tienen asignado el par (c_0,s_0). Por lo tanto, las cuatro casillas de intersección de C_1 y C_2 con F_1 y F_2 son los vértices de un rectángulo y tienen mismo par (c_0,s_0) asignado, es decir, tienen el mismo color y arañas del mismo sexo.

2 Encuentre todos los números enteros n (si existen) tales que $n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18$ es un cuadrado perfecto.

Solución

Observe que:

$$\begin{aligned}
S &= n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18 \\
S &= n^4 - 4n^3 + 4n^2 + 18n^2 - 36n + 18 \\
S &= (n^2 - 2n)^2 + 18(n^2 - 2n) + 18 \\
S &= (n^2 - 2n)^2 + 18(n^2 - 2n) + 81 - 63 \\
S &= (n^2 - 2n + 9)^2 - 63
\end{aligned}$$

Sea $x = n^2 - 2n + 9$. Como $x = (n-1)^2 + 8$, entonces $x \geq 8$ es un número entero. Si S es un cuadrado perfecto, entonces existe un número entero $y \geq 0$ tal que $S = y^2$. Entonces:

$$\begin{aligned}
y^2 &= x^2 - 63 \\
63 &= x^2 - y^2 \\
63 &= (x+y)(x-y)
\end{aligned}$$

Sean $a = x + y$ y $b = x - y$. Como $a > 0$, entonces $b > 0$, luego $0 < b \leq a$ son números enteros tales que $ab = 63$, luego $(a,b) \in \{(63,1),(21,3),(9,7)\}$, entonces $(x,y) \in \{(32,31),(12,9),(8,1)\}$. Como $x = (n-1)^2 + 8 \in \{32,12,8\}$, entonces $(n-1)^2 \in \{24,4,0\}$, luego $n \in \{-1,1,3\}$. Por lo tanto, S es un cuadrado perfecto si y sólo si $\boxed{n \in \{-1,1,3\}}$.