XV

Tercera Fecha
17 de Junio de 2017
Soluciones
Grupal

Triángulos y Regularidades Numéricas

En general, una regularidad numérica se refiere a una sucesión de números definidos por ciertas propiedades. Por ejemplo, la sucesión $1, 2, 3, 4, 5, ...$ es una regularidad numérica en donde el siguiente número se obtiene del anterior sumandole uno. Otra regularidad numérica es la sucesión $3, 6, 9, 12, 15, ...$ obtenida de la sucesión anterior multiplicando cada número por tres. Por tanto, hay muchas regularidades numéricas.

En esta prueba empezaremos a construir una regularidad numérica más compleja que las anteriores. Para ello se da la siguiente sucesión de triángulos

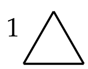

Figura 1: T_1

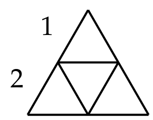

Figura 2: T_2

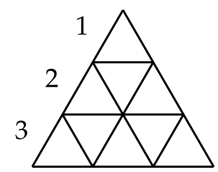

Figura 3: T_3

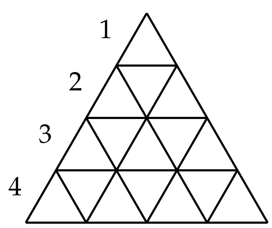

Figura 4: T_4

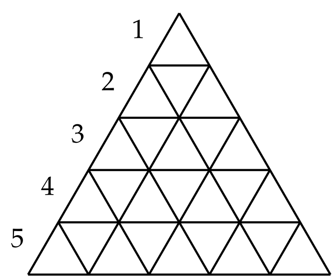

Figura 5: T_5

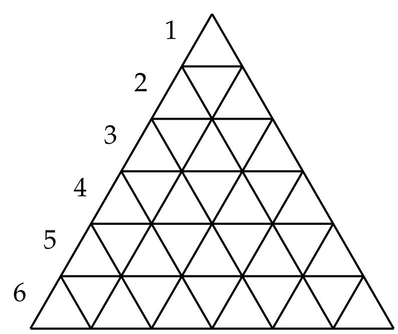

Figura 6: T_6

Se pide completar cada triángulo con números naturales distintos de tal manera que:

1. usen la mayor cantidad posible de números consecutivos, partiendo desde 1 y
2. en cada fila la suma es la menor posible e igual para todas ellas.

En esta prueba siempre primará primero aplicar el criterio I.- y luego el criterio II.

Por ejemplo, para el caso de T_1 la solución es:

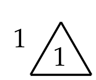

Figura 7: T_1

En efecto, debemos partir con 1 y usar la mayor cantidad de números consecutivos. Como sólo hay un espacio, lo completamos con 1. Así usamos un número y la menor suma es uno.

Para el caso de T_2 la solución es la que sigue:

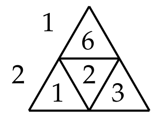

Figura 8: T_2

En efecto, ya que la segunda fila tiene tres espacios que completar con números naturales y los menores son $1, 2$ y 3, los cuales son consecutivos, usamos estos tres números en la segunda fila y eso dice que su suma es 6. Colocamos 6 en el espacio de la primera fila y hemos completado T_2 con la mayor cantidad de números consecutivos, partiendo de 1, y con la menor suma posible que, en este caso es 6.

En lo que sigue denotaremos:

- por $c(n)$ la cantidad de casillas del triángulo T_n (por ejemplo $c(1) = 1, c(2) = 4$);
- por $ns(n)$ la cantidad de números consecutivos, partiendo desde 1, que se usan para completar T_n (por ejemplo $ns(1) = 1, ns(2) = 3$);
- por S_n la suma de cada fila de T_n que resuelve el problema (por ejemplo $S_1 = 1, S_2 = 6$).

En esta prueba el equipo académico del CMAT desafiará a los equipos participantes en la tercera fecha de 2017, a encontrar los valores de $c(n)$, $ns(n)$ y S_n para valores pequeños de n. Señalamos que $c(n)$ es fácil de determinar para todo n pero no pasa lo mismo con $ns(n)$ y S_n, como verán, a lo largo de la prueba.

Problema 1. Completar T_3, con números distintos, señalando la menor suma posible e indicar la mayor cantidad de números consecutivos (partiendo desde uno) que se puede usar (esto es se pide determinar los valores de $ns(3)$ y S_3).

Solución:

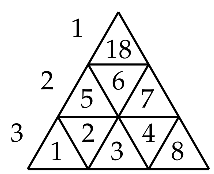

Figura 9: T_3

Ésta es la configuración pedida ya que

a) ocupa 8 números consecutivos parra completar las 8 casillas de la fila 2 y 3

b) la suma de los ocho primeros números es $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$. La suma de las filas 2 y 3 es, también, 36. Por tanto, la menor suma en cada fila debe ser $\frac{36}{2} = 18$, que es el valor obtenido.

Por tanto $ns(3) = 8$ y $S_3 = 18$.

■

Problema 2. Completar T_4, con números distintos, usando la mayor cantidad de números consecutivos, partiendo desde 1, y de tal forma que la suma en cada fila sea igual en todas y la menor posible (esto es se pide determinar los valores de $ns(4)$ y S_4).

Solución:

Notamos que en la fila 2, 3 y 4 debemos usar 15 números. Los primeros 15 suman $\frac{15 \cdot 16}{2} = 120$. Dividido en 3 nos da 40.

La siguiente figura muestra una manera de completar T_4 usando los 15 números consecutivos $1, 2, 3, \ldots, 15$

Ésta es la configuración buscada ya que cualquier otra usará números mayores que la que tenemos y, por tanto, la suma será mayor. Por tanto $ns(4) = 15$ y $S_4 = 40$.

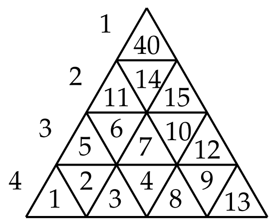

Figura 10: T_4

■

Problema 3. Completar T_5, con números distintos, señalando la mayor cantidad de números consecutivos, partiendo desde 1, y de tal forma que la suma de números en cada fila sea la misma en todas ellas y la menor posible (esto es se pide determinar $ns(5)$ y S_5).*Indicación: Vean el valor que tiene $c(5)$. Verifiquen que $ns(5) \neq 24$ y prueben que necesariamente $S_5 > 75$ y $S_5 \neq 76$.*

Solución:

Para responder esta pregunta iremos por partes.

a) Observamos que $c(5) = 25$ y que el número de la primera fila, denotado S_5, debe ser igual a $N_1 + N_2 + N_3$, donde N_1, N_2, N_3 son los números en la segunda fila. O sea, $S_5 = N_1 + N_2 + N_3$. Si E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 son los números en la tercera fila, $F_1, F_2, \ldots, F_7$ los números en la cuarta fila y $G_1, G_2, \ldots, G_9$ los números en la quinta fila. Entonces,

$$S_5 = N_1 + N_2 + N_3 = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = F_1 + F_2 + \ldots + F_7 = G_1 + G_2 + \ldots + G_9$$

Luego,

$$4S_5 = (N_1 + N_2 + N_3) + (E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5) + (F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_7) + (G_1 + G_2 + \ldots + G_9)$$

Ahora los números deben ser distintos, S_5 debe ser el menor posible y entre los números debe estar la mayor cantidad de números consecutivos posibles, partiendo desde 1.

Probamos que $S_5 > 75$.

Solución:

T_5 tiene 25 casillas en total y la casilla de la primera fila debe ser S_5.

Las filas 2, 3, 4, 5 contienen 24 números. Supongamos que ellos son $1, 2, 3 \ldots, 24$. En este caso, $4S_5 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 24 = \frac{24 \cdot 25}{2} = 12 \cdot 25 = 300$ De forma, usando estos 24 números, S_5 debe ser 75.

Ahora, en la segunda fila debe haber tres números N_1, N_2, N_3, entre $\{1, 2, \ldots, 24\}$ tales que $N_1 + N_2 + N_3 = 75$. Pero los tres números mayores que tenemos son 22, 23, 24, y $22 + 23 + 24 = 69$. Por tanto, no puede ocurrir que $S_5 = 75$ y que los números sean $1, 2, \ldots 24$

Ahora si cambiamos uno de ellos por otro número P distinto de $1, 2, \ldots, 24$, entonces P es mayor que 24 y la suma de los 24 números que permanecen será mayor que 300 y, por tanto, $4S_5 > 300$ ó $S_5 > 75$.

■

b) Pruebe que $S_5 \neq 76$

Solución:

Ya sabemos que los números en las casillas restantes no pueden ser $1, 2, \ldots, 24$. Supongamos que son $1, 2, 3, \ldots, 23, N$ y que $S_5 = 76$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} 4 \cdot 76 &= 1 + 2 + \ldots + 23 + N \\ 304 &= \frac{23 \cdot 24}{2} + N \\ &= 276 + N \end{aligned}$$

Por lo que $N = 304 - 276 = 28$

En la segunda fila podemos poner 22, 23 y 28. Su suma será $22 + 23 + 24 = 73$ y $73 \neq 76$

Por lo tanto, si hay 23 números consecutivos $S_5 \neq 76$

■

c) Pruebe que con 23 números consecutivos se obtiene $S_5 = 77$. Al igual que antes suponemos que hemos escrito los números $1, 2, 2, 3, \ldots, 23, N$. Se tiene que

$$4 \cdot 77 = 308 = 276 + N$$

Por lo tanto, $N = 32$.

Si colocamos en la segunda fila a 22, 23, y 32 tenemos $22 + 23 + 32 = 77$. Y, podemos completar T_5 de la siguiente forma

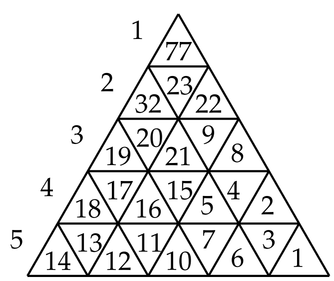

Figura 11: T_5

En particular $ns(5) = 23$ y $S_5 = 77$.

■

Problema 4. Completar T_6, con números distintos, señalando la mayor cantidad de números consecutivos, partiendo desde 1, y de tal forma que la suma de números en cada fila sea la misma en todas ellas y la menor posible (esto es se pide determinar $ns(6)$ y S_6).*Indicación: Vean el valor que tiene $c(6)$. Verifiquen que $ns(6) \neq 35$ y prueben que no puede ser que* $126 \leq S_6 \leq 131$.

a) Prueben que $S_6 > 126$.

Solución:

T_6 contiene 36 casillas que completar. Suponemos que $S_6 = 126$ y que usamos los números $1, 2, 3, \ldots, 35$. Entonces $5S_6 = \frac{35 \cdot 36}{2} = 630$ y $S_6 = 126$. Ahora en la segunda fila sólo pueden estar 33, 34 y 35 que suman 102. Por tanto, si $S_6 = 126$ no pueden usarse los números $1, 2, 3, \ldots, 35$ en la fila 2 hasta la 6.

Ahora si cambiamos un número de ellos por otro mayor tendremos que la suma de ellos

$$5S_6 = \text{ suma de los 35 números} > 1 + 2 + \ldots + 35 = 630$$

Por tanto, $S_6 > 126$

■

b) Prueben que $S_6 \geq 132$

Solución:

Ya sabemos que con 35 números consecutivos no se resuelve el problema. Por tanto, vamos a pensar en ocupar 34 números consecutivos 1, 2, 3 ... 34. Sea N el número 35. Se tiene que

$$5S_6 = N + \sum_{i=1}^{34} i = N + \frac{34 \cdot 35}{2} = N + 595$$

Por lo tanto, $5S_6 = N + 595$ y $S_6 = \frac{N}{5} + 119$, sabiendo que $N > 35$.

Si $N = 40$, $S_6 = 127$. Pero, $40 + 34 + 33 = 107 \neq S_6$ y toda otra suma de otros dos números y 40 es menor.

Si $N = 45$, $S_6 = 128$ y $45 + 34 + 33 = 112 \neq S_6$.

Si $N = 50$, $S_6 = 129$ y $50 + 34 + 33 = 117 \neq S_6$.

Si $N = 55$, $S_6 = 130$ y $55 + 34 + 33 = 122 \neq S_6$.

Si $N = 60$, $S_6 = 131$ y $60 + 34 + 33 = 127 \neq S_6$.

Si $N = 65$, $S_6 = 132$ y $65 + 34 + 33 = 132 = S_6$.

Por lo tanto, si S_6 es la suma debe ocurrir que $S_6 \geq 132$

■

c) Pruebe que existe una solución con 34 números consecutivos, partiendo desde 1, para $S_6 = 132$.

Solución:

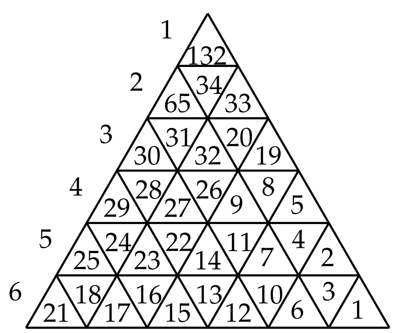

Figura 12: T_6

Por tanto $ns(6) = 34$ y $S_6 = 132$.

■

Problema 5. Completar T_7 usando números distintos y satisfaciendo los siguientes criterios:

I. usar la mayor cantidad consecutiva de números partiendo de 1

II. Los números un una fila tengan la menor suma posible, y que esa suma sea la misma en todas ellas

Indicación: Vean el valor que tiene $c(7)$. Verifiquen que $ns(7) \neq 48$ y prueben que que no puede ser que $S_7 < 207$.

Solución:

En este caso, el número de casillas es

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$$

a) Pruebe que si S_7 es la suma de una fila, entonces $S_7 > 196$

Solución:

T_7 contiene 49 casillas para completar.

Suponemos que $S_7 = 196$. En este caso los números que se coloquen en las casillas de la fila 2 a la 7 es $\sum N = 6 \cdot 196 = 1176$

Si ocupamos los 48 números 1, 2, 3, ..., 46, 47, 48, tenemos $46 + 47 + 48 = 141 \neq 196$. Por tanto, no podemos ocupar 48 números consecutivos.

■

b) Pruebe que si S_7 es la suma de una fila entonces $S_7 \geq 207$.

Solución:

Ya sabemos que 48 números consecutivos no resuelven el problema.
Por tanto, ocuparemos 47 (1, 2, 3, 4, ..., 45, 46, 47)

Sea N el número en la segunda fila, tal que $N + 93 = S$. La suma de los números que están en las filas dos hasta 7 sería $N + \frac{47 \cdot 48}{2} = 6S_7$. Por lo tanto,

$$\frac{N}{6} + 188 = S_7$$

Si igualamos las informaciones anteriores,

$$\frac{N}{6} + 188 = N + 96$$

De forma que $\frac{5}{6}N = 95$, por lo que $N = 114$. En este caso, $S_7 = 207$.

Por lo tanto, $S \geq 207$

■

c) Pruebe que existe una solución en 47 números consecutivos, partiendo desde 1, para $S_7 = 207$.

Solución:

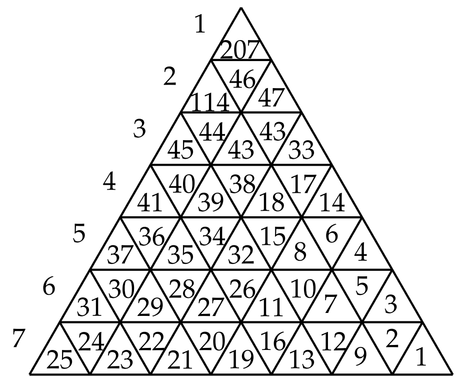

Figura 13: T_7

$\blacksquare$

$\blacksquare$

Problema 6. Completar T_8 usando números distintos y satisfaciendo los siguientes criterios:

I. usar la mayor cantidad consecutiva de números partiendo de 1

II. Los números un una fila tengan la menor suma posible, y que esa suma sea la misma en todas ellas

Solución:

En este caso la cantidad de casillas es $64 = 8^2$ y la mayor cantidad posible de números consecutivos es 63.

a) Pruebe que si S_8 es la suma de una fila entonces $S_8 > 288$

Solución:

Suponemos que usamos $1, 2, \ldots, 63$ para las casillas de la fila 1 a la 7 entonces si $S = 288$, $7S_8 = \sum_{i=1}^{63} i = \frac{63 \cdot 64}{2}$. Por tanto, $S_8 = 32 \cdot 9 = 288$

En la segunda fila tendríamos 61, 62 y 63, cuya suma es $186 < 288$, por lo tanto, no podemos ocupar $1, 2, \ldots, 63$

$\blacksquare$

b) Pruebe que si S_8 es la suma de una fila entonces $S_8 \geq 305$

Solución:

Ya sabemos que no podemos ocupar 63 números consecutivos. Suponemos que ocupamos 8 números $1, 2, 3, \ldots, 61, 62, N$.

Tenemos $61 + 62 + N = S_8$, entonces $123 + N = S_8$

$$\frac{62 \cdot 63}{2} + N = 7S_8$$
$$279 + \frac{N}{7} = S_8$$

Uniendo la información anterior, tenemos que $123 + N = \frac{N}{7} + 279$ o, lo que es igual, $\frac{6}{7}N = 152$. Entonces, $N = 26 \cdot 7 = 182$

Por tanto, $182 + 123 = 305 = S$. Así, $S_8 \geq 305$.

■

c) Pruebe que no existe una solución en 62 números consecutivos para $305 \leq S_8 \leq 307$.

Solución:

Suponemos que existe. Dibujamos los tres primeros niveles del triángulo: en la primera fila tenemos 305, en la segunda tenemos $182 + 62 + 61 = 305$. Si en la tercera fila colocamos 60, 59, 68, 57, 56 tenemos $60 + 59 + 58 + 57 + 56 = 290$, que no es igual a 305.

Un argumento similar se ocupa para probar que $305 < S_8 \leq 307$, no es posible.

■

d) Pruebe que existe una solución con 61 números consecutivos para $S_8 = 308$.

Solución:

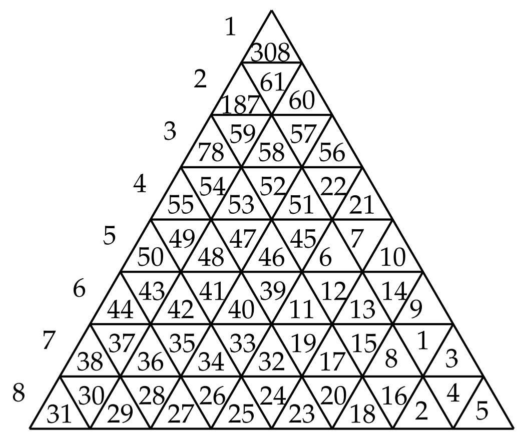

Figura 14: T_8

■

■

Problema 7. Completar T_9 usando números distintos y satisfaciendo los siguientes criterios:

I. usar la mayor cantidad consecutiva de números partiendo de 1

II. Los números un una fila tengan la menor suma posible, y que esa suma sea la misma en todas ellas

Solución:

En este caso el número posible de casillas es $81 = 9^2$ y la mayor cantidad posibles de números consecutivos es 80.

a) Prueben que no hay solución con 80 números consecutivos.

Solución:

Suponemos que hay. En este caso tenemos $8S_9 = \frac{80 \cdot 81}{2}$ y, entonces, $S_9 = 81 \cdot 5 = 405$. Pero, en este caso, en la segunda fila sólo podemos poner 78,79 y 80 que no suman 405.

■

b) Prueben que no hay solución en 79 números consecutivos.

Solución:

Suponemos que hay una solución en 79 números consecutivos. EN este caso, colocamos N, 78 y 79 en la segunda fila. Tenemos $N + 157 = S_9$ los restantes 77 números se colocan en dos filas 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9; luego, $7S_9 = \frac{77 \cdot 78}{2}$. Así, $S_9 = 39 \cdot 11 = 429$. Por lo tanto, $N + 157 = 429$ y $N = 272$.

En la tercera línea solo podemos colocar 77, 76, 75, 74, y 73 que suman 376. Lo que no puede ser.

■

c) Consideramos ahora 78 números consecutivos. Pruebe que $S_9 = 438$ y encuentren una solución.

Solución:

Sean N_1 y N_2 los dos números auxiliares. Vamos a suponer que N_1 en la segunda fila y N_2 en la tercera fila.

$$\begin{aligned} N_1 + 78 + 77 &= S_9 \\ &= N_2 + 76 + 75 + 74 + 73 \\ N_1 + 155 &= N_2 + 298 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $N_1 = 143 + N_2$

Ahora, $6S_9 = \frac{72 \cdot 73}{2}$, $S_9 = 73\dot{6} = 438$

Una solución es la siguiente:

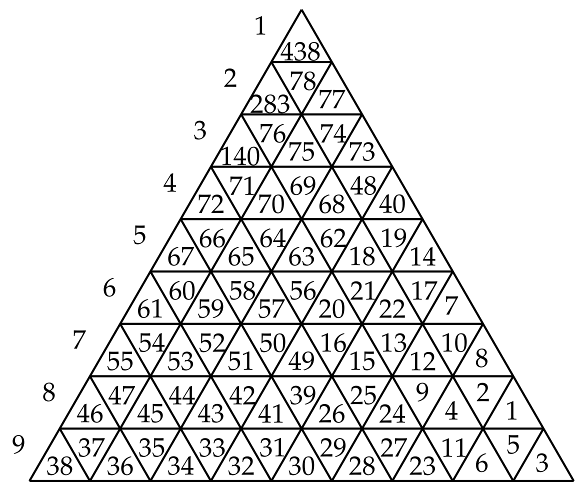

Figura 15: T_9

■

■

A continuación se muestra la distribución de preguntas por nivel y el puntaje que obtendrá la resolución completa y correcta de la pregunta.

Nivel\Pregunta	1	2	3	4	5	6	7
Básica	3	4	5	8			
Menor	2	3	4	5	6		
Mayor		2	3	3	3	4	5