CMAT Campeonato Escolar de Matemáticas

XV

Tercera Fecha
17 de Junio de 2017
Soluciones
Individual

Primer Nivel

1 En el Club de Tenis *La Raqueta* hay n tenistas zurdos y $2n$ tenistas diestros. En el último campeonato interno, cada tenista enfrentó a cada uno de los otros tenistas del Club una vez, se jugaron menos de 120 partidos y la razón entre la cantidad de victorias de los tenistas zurdos y la cantidad de victorias de los tenistas diestros fue $3:4$. Encuentre el valor de n y la cantidad de victorias de los tenistas zurdos.

Solución

Primero será encontrada la cantidad de partidos jugados en función de n. Cada tenista jugó $3n-1$ partidos (contra los otros jugadores del Club de Tenis), pero de esta manera se ha contado dos veces cada partido (el partido de A con B se cuenta a considerar el tenista A y el tenista B). Entonces la cantidad de partidos es:

$$\frac{3n(3n-1)}{2} < 120$$

La cantidad de partidos crece con n. Como $\frac{3\cdot 6(3\cdot 6-1)}{2} = 153 > 120$, entonces $n \leq 5$.
Sean x la cantidad de victorias de los tenistas zurdos e y la cantidad de victorias de los tenistas diestros. Como cada partido tiene un ganador, entonces:

$$\frac{3n(3n-1)}{2} = x + y$$

Además, $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, entonces $y = \frac{4x}{3}$, luego $x+y = \frac{7x}{3}$ y tenemos:

$$\frac{3n(3n-1)}{2} = \frac{7x}{3}$$
$$9n(3n-1) = 14x$$

n y x son números naturales y $14x$ es divisible por 7, entonces $9n(3n-1)$ es divisible por 7. Como 7 es un número primo, entonces uno de los factores: 9, n, $3n-1$ es divisible por 7. Como 9 no es divisible por 7 y $n \in \{1,2,3,4,5\}$ tampoco, entonces $3n-1$ es divisible por 7. Nuevamente, como $n \in \{1,2,3,4,5\}$, concluímos que $\boxed{n=5}$.
Finalmente, $9\cdot 5(3\cdot 5-1) = 14x$, entonces $x = 45$. Por lo tanto, la cantidad de victorias de los tenistas zurdos es $\boxed{45}$.

2 ¿Cuántos números desde 1 hasta 2017 tienen una cantidad impar de dígitos impares?

Solución

Primera Solución
Los números con esta propiedad: tener una cantidad impar de dígitos impares, serán contados según la cantidad de dígitos:

- *Desde 1 hasta 9:* 5 números tienen la propiedad.
- *Desde 10 hasta 99:* Los números con esta propiedad, tienen la forma IP o PI (I corresponde a un dígito impar y P corresponde a un dígito par). Como el primer dígito es distinto de 0, se tienen $5^2 = 25$ números de la forma IP y $4 \cdot 5 = 20$ de la forma PI; en total, son 45 números.
- *Desde 100 hasta 999:* Los números con esta propiedad, tienen la forma IPP, PIP, PPI o III. La cantidad de números de cada forma es 125, 100, 100 y 125, respectivamente; en total, son 450 números.
- *Desde 1000 hasta 1999:* Los números con esta propiedad, tienen la forma 1PPP, 1IIP, 1IPI o 1PII. La cantidad de números de cada forma es 125; en total, son 45 números.
- *Desde 2000 hasta 2017:* 9 números tienen la propiedad.

Como $5 + 45 + 450 + 500 + 9 = 1009$, entonces $\boxed{1009}$ números desde 1 hasta 2017 tienen una cantidad impar de dígitos impares.
Segunda solución
Los números con esta propiedad: tener una cantidad impar de dígitos impares, serán contados de la siguiente manera:

- *Desde 1 hasta 9:* 5 números tienen la propiedad.
- *Desde 10 hasta 2017:* Los números son agrupados en 1002 pares:

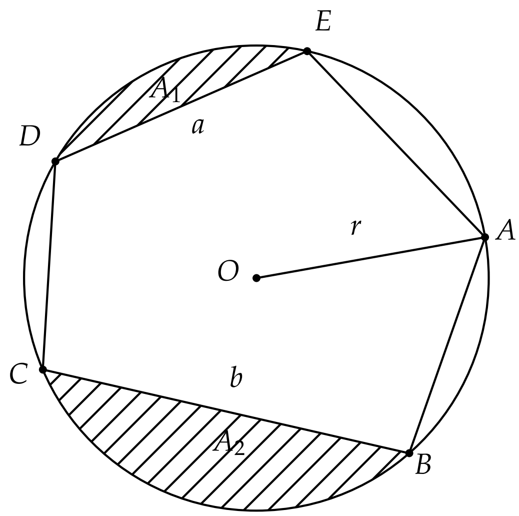
$$(10, 11), (12, 13), (14, 15), \ldots, (2012, 2013), (2014, 2015), (2016, 2017)$$

  Los números de cada par sólo difieren en el dígito de las unidades, los que son consecutivos, entonces uno es par y el otro es impar. En particular, en cada par hay un número con la propiedad y uno sin la propiedad. Por lo tanto, desde 10 hasta 2017, 1004 números tienen la propiedad.

Por lo tanto, $\boxed{1009}$ números entre 1 y 2017 tienen una cantidad impar de dígitos impares.

Segundo Nivel

1 Considere el pentágono $ABCDE$ inscrito en la circunferencia de centro O y radio $r = 1$. Se sabe que $a = \sqrt{(2-b)(2+b)}$ y que $A_1 : A_2 = 1 : 3$.
Determine el área A_1 en términos del lado a.

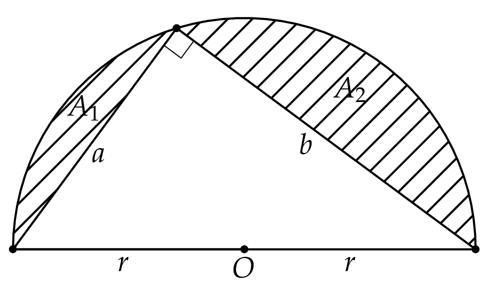


Solución

De la relación entre los lados a y b tenemos que

$$a^2 + b^2 = 4$$

es decir a y b son catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 2, que corresponde al diámetro de la circunferencia de centro O. La situación entonces es la siguiente



De aquí, notamos que $A_1 + A_2 + \dfrac{ab}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.
De la relación entre A_1 y A_2, tenemos que $A_2 = 3A_1$ mientras que de la relación entre a y b tenemos que $b = \sqrt{4 - a^2}$.
Así, podemos entonces escribir A_1 en términos de a como

$$A_1 = \frac{\pi - a\sqrt{4 - a^2}}{8}$$

2 Sean a, b y c números primos tales que:

$$ab + bc = 189$$
$$ab + ac = 128$$

Encuentre el valor de $a^b + c$.

Solución

Primera solución:
Escribamos las igualdades de la siguiente forma:

$$b(a + c) = 189$$
$$a(b + c) = 128$$

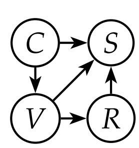
En la segunda igualdad tenemos $128 = 2^7$; como a es primo, entonces $a = 2$. En la primera igualdad tenemos $189 = 3^3 \cdot 7$; como b es primo, entonces $b \in \{3, 7\}$, luego $a + c = c + 2 \in \{63, 27\}$, entonces $c \in \{61, 25\}$. Como c es primo, entonces $c = 61$, luego $b = 3$. Por lo tanto: $a^b + c = 2^3 + 61 = 69$.
Segunda solución
Restando la primera con la segunda ecuación, obtenemos:

$$c(b - a) = 61$$

Como c es primo, entonces $c = 61$ y $b - a = 1$, luego $b = 3$ y $a = 2$. Por lo tanto, $a^b + c = 69$.

Tercer Nivel

1 En la figura se muestra una red de suministro eléctrico: los puntos C, R, S y V representan la central (que genera electricidad) y las ciudades de Rancagua, Santiago y Valparaíso, respectivamente. La electricidad transita por cables representados por flechas, sólo en la dirección indicada por ellas. Después de una tormenta, cada cable tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de haberse cortado (estas probabilidades son independientes de cable en cable). Determine la probabilidad que Santiago no reciba electricidad.

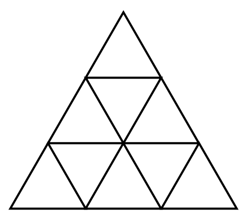


Solución

Sea x la probabilidad que Santiago no reciba electricidad. Es obligatorio que el cable $\overrightarrow{CS}$ se haya cortado, entonces $x = \frac{1}{3} \cdot p$, donde p es la probabilidad que Santiago no reciba electricidad, sabiendo que el cable $\overrightarrow{CS}$ está cortado. Si el cable $\overrightarrow{CV}$ está cortado, sabemos que Santiago no recibirá electricidad, entonces $p = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot q$, donde q es la probabilidad que Santiago no reciba electricidad, sabiendo que el cable $\overrightarrow{CS}$ está cortado y que el cable $\overrightarrow{CV}$ está funcionando. En esta situación, el cable $\overrightarrow{VS}$ debe estar cortado, entonces $q = \frac{1}{3} \cdot r$, donde r es la probabilidad que Santiago no reciba electricidad, sabiendo que los cables $\overrightarrow{CS}$ y $\overrightarrow{VS}$ están cortados y que el cable $\overrightarrow{CV}$ está funcionando. En esta situación, para que Santiago reciba electricidad, los cables $\overrightarrow{VR}$ y $\overrightarrow{RS}$ deben estar funcionando, entonces $1 - r = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, luego $r = \frac{5}{9}$. Ahora podemos calcular:

$$\begin{aligned}
q &= \frac{1}{3} \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{27} \\
p &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot q = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{27} = \frac{27}{81} + \frac{10}{81} = \frac{37}{81} \\
x &= \frac{1}{3} \cdot p = \frac{1}{3} \cdot \frac{37}{81} = \frac{37}{243}
\end{aligned}$$

2 Un tablero tiene la forma de un triángulo equilátero de lado n, dividido en n^2 triángulos equiláteros de lado 1 como se muestra en la figura para $n = 3$.



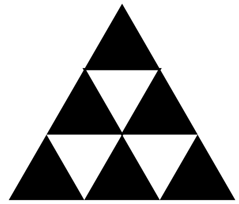
Una moneda está inicialmente en cualquier casilla del tablero. Esta moneda se puede mover desde cualquier casilla A hasta cualquier otra casilla B: si A y B tienen un lado común, entonces el movimiento se llama un *paso*; en caso contrario, se llama un *salto*.

Para $n \geq 2$, determine la menor cantidad de saltos necesaria para que la moneda pase por todas las casillas del tablero.

Aquí, por ejemplo, si denotamos las casillas del triángulo para $n = 3$ como $(1,1)$(primera fila, casilla 1), $(2,1)$(segunda fila, casilla 1), $(2,2)$(segunda fila, casilla 2) y, sucesivamente, $(2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5)$, entonces si la moneda salta de la casilla $(1,1)$ a la casilla $(3,5)$ pasó por las casillas $(1,1), (2,2), (2,3), (3,4)$ y $(3,5)$.

Solución

Las casillas del tablero son coloreadas de la siguiente manera:



Observe que el tablero tiene $\dfrac{n(n-1)}{2}$ casillas blancas y $\dfrac{n(n+1)}{2}$ casillas negras; la diferencia entre estas cantidades (casillas negras menos casillas blancas) es:

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$$

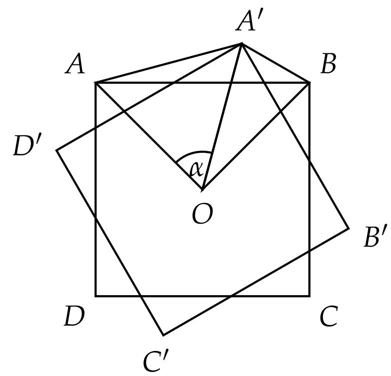
Ademas, en cada paso, la moneda se mueve desde una casilla blanca hasta una negra o viceversa.
Suponga que la moneda ha pasado por todas las casillas del tablero, usando s saltos. La moneda está colocada en una casilla e inicia su movimiento pasando a otra casilla. Su primer salto lo da desde la casilla en que estaba hacia otra casilla y, en el transcurso, recorrio varias casillas. Esto divide el tablero en s caminos, donde un *camino* es el conjunto de todas las casillas que recorre la moneda, incluida la inicial y la final. Observe que, en un camino, la diferencia entre la cantidad de casillas negras y blancas es igual a 1, 0 ó -1. Como la diferencia entre la cantidad de casillas negras y blancas del tablero es igual a n, entonces $s \geq n$, luego $s \geq n$.
El caso $s = n$ es posible de la siguiente manera: parta de la casilla superior, salte hasta la casilla ubicada e el extremo derecho de la última fila, luego salte hasta la casilla ubicada en el extremo izquierdo de la última fila. En el primer salto recorrimos todas las casillas ubicadas en el extremo derecho del triángulo. Si sacamos todas las casillas que recorrimos con este salto nos quedará un triángulo con $n-1$ filas. El segundo salto correspondería al primer salto del procedimiento para completar el triángulo de $n-1$ filas. Por tanto asumiendo que allí usamos $n-1$ saltos tenemos que para recorrer el triángulo de n filas necesitaremos un salto más.

Cuarto Nivel

1 Considere un cuadrado $ABCD$ (con sus vértices en sentido de las agujas del reloj) y sea O el punto de intersección de sus diagonales. Sea $0 < \alpha < 90°$. Este cuadrado se rota con centro O, en un ángulo α y en sentido de las agujas del reloj, obteniendo un nuevo cuadrado $A'B'C'D'$ (con sus vértices en sentido de las agujas del reloj y con A' en el interior del ángulo $\angle AOB$). Si los triángulos $\triangle AOA'$ y $\triangle BOA'$ tienen la misma área, demuestre que $\alpha = 45°$.

Solución

En la figura se muestran los dos cuadrados y los triángulos $\triangle AOA'$ y $\triangle BOA'$, además del ángulo α:



Sean h_1 y h_2 la distancia desde A' hasta los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, respectivamente. Los triángulos $\triangle AOA'$ y $\triangle BOA'$ tienen la misma área y $OA = OB$, entonces $h_1 = h_2$, luego A' está en la bisectriz del ángulo $\angle AOB$. Por lo tanto, $\alpha = 45°$.

2 Sean p, q, r, s números primos y n un número entero positivo, tales que $r \leq s$ y

$$p^n - rs = rs - pq = 1$$

Determine todos los valores posibles de p, q, r, s y n.

Solución

Sumando las igualdades $p^n - rs = 1$ y $rs - pq = 1$, se tiene $p^n - pq = 2$. Como $n \geq 1$, es posible factorizar el lado izquierdo de la igualdad por p: $p(p^{n-1} - q) = 2$. p es primo, entonces $\boxed{\text{p=2}}$.
Por otro lado, los números $pq = 2q$, rs y $p^n = 2^n$ son (en este orden) consecutivos, entonces uno de ellos es divisible por 3. Claramente 2^n no lo es, entonces hay dos casos posibles:

- Si 3 divide a $2q$, entonces $q = 3$, luego $pq = 6$ y también $rs = 7$, lo que no es posible porque r, s son números primos. En este caso no hay solución.

- Si 3 divide a rs, entonces $\boxed{\text{r=3}}$ (sabemos que rs es impar, entonces r, s son impares. Además, $r \leq s$), luego $2q$, $3s$ y 2^n son (en este orden) consecutivos. Como 2^n es de la forma $3k + 1$, entonces n es par y podemos escribir $n = 2m$ (con m entero positivo). En particular,

  $$3s = 2^n - 1 = 2^{2m} - 1 = (2^m - 1)(2^m + 1)$$

  Existen dos formas de escribir $3s$ como producto de números enteros positivos, entonces se tienen dos posibilidades:

  - $2^m - 1 = 1$, $2^m + 1 = 3s$, entonces $3s = 3$, luego $s = 1$, imposible porque s es primo. En este caso no hay solución.
  - $2^m - 1 = 3$, $2^m + 1 = s$, entonces $\boxed{\text{s=5}}$. También $2^m = 4$, entonces $m = 2$ y $\boxed{\text{n=4}}$. Finalmente, $2q = 14$, entonces $\boxed{\text{q=7}}$.