Cuarta Fecha

29 de Agosto de 2017

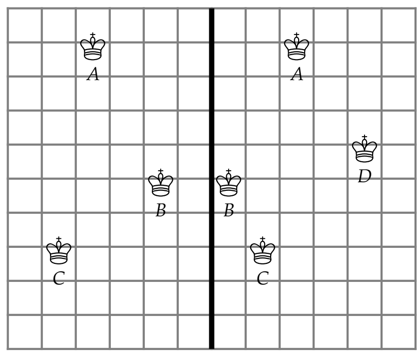
Soluciones

Grupal

Reyes y reinos

Preguntas en la Cuadrícula

En una hoja de cuaderno muy grande se colocan algunos *reyes*, que simbolizaremos por una letra mayúscula con una corona arriba. Cada uno es puesto en el centro de uno de los cuadrados. Por ejemplo, dos situaciones posibles son las siguientes:

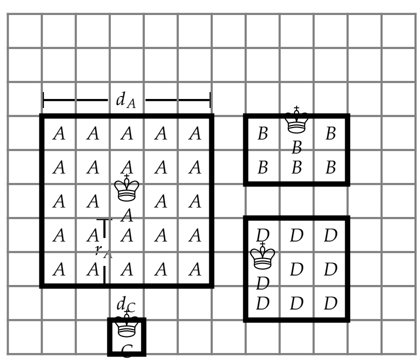


Posteriormente, a cada rey se le asigna un *reino*: un grupo de casillas, con forma de cuadrado, de manera que

- El rey quede al centro
- Una casilla no pertenezca a dos reinos distintos
- Sólo puede estar adentro del reino su rey correspondiente

Bajo las reglas anteriores, se puede considerar que hayan reinos en los que sólo esté el el rey, o sea, sea un reino de una casilla.

Para marcar las casillas correspondientes a un reino se utiliza la misma letra del rey, pero sin la corona. En la imagen de abajo se pueden ver cuatro posibles reinos: sólo el reino de A y el de C corresponden a reinos bien hechos.

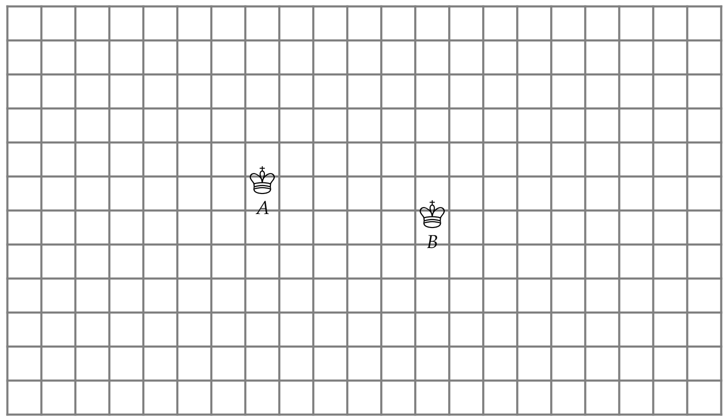


Para cada rey A, denotaremos por d_A el largo de su reino, y r_A la cantidad de cuadritos entre el rey y el borde de su reino. Por ejemplo, en el ejemplo de arriba tenemos $r_A = 2, d_A = 5, r_C = 0, d_C = 1$ (que están marcados en la figura).

Problema 1. En las siguientes figuras se han colocado sólo los reyes, y no se han puesto los reinos.

a) ¿Cuál es el valor más grande que pueden tomar r_A y r_B, cada uno por separado?

b) Realice un dibujo en el que se alcance el máximo de r_A y otro donde se alcance el máximo de r_B.

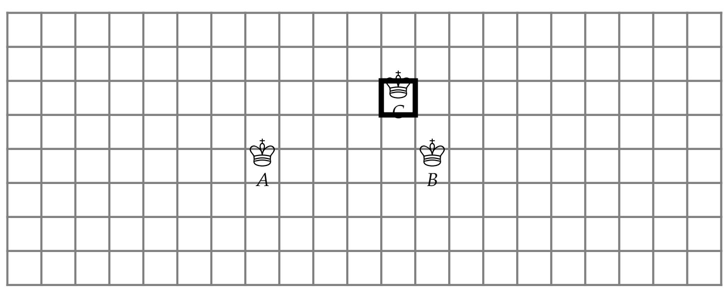


Solución:

Dado que la distancia horizontal es 4 y la distancia vertical es 1, tenemos que ambos números son restricciones en nuestro plano. Así, podemos notar que lo más grande que se puede lograr es de radio 4 en ambos casos.

■

Problema 2. Encuentre todos los valores posibles para r_A y r_B, cada uno por separado, en la siguiente figura.

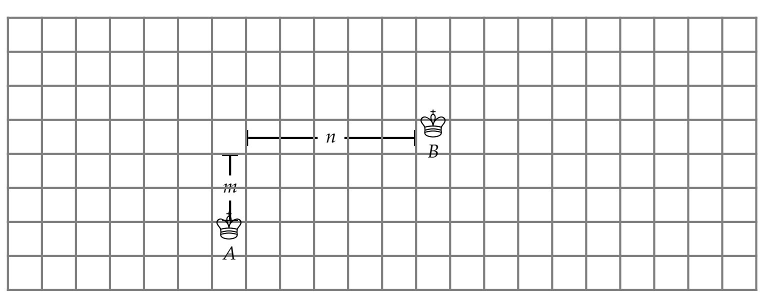


Solución:

En este caso al notar las distancias de A y B hacia C, es fácil notar que r_A puede ser 0, 1, 2, ó 3; mientras que, r_B puede ser 0, 1 ó 2.

■

Problema 3. Si se tienen solamente dos reyes, separados como indica la figura, pruebe que $r_A + r_B$ es menor o igual al mayor entre m y n.

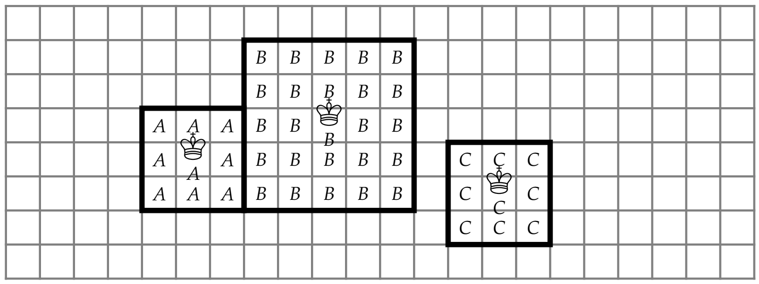


Solución:

Notemos que analizar el problema verticalmente u horizontalmente es similar. Suponiendo que $n > m$, tenemos que el más grande reino que puede tener B tiene radio n, en cuyo caso A tendría $r_A = 0$. Y, si r_A va creciendo en 1, r_B va disminuyendo en 1. Notemos entonces que la suma de los radios debe ser menor o igual a n.

■

Diremos que una configuración es *ineficiente* si es posible agrandar algún radio, sin cambiar el resto. Por ejemplo, la configuración de abajo es ineficiente: el radio r_C se puede aumentar



Si en una configuración no se puede aumentar algún radio sin cambiar el resto, diremos que es *eficiente*.

Problema 4. De las configuraciones de la pregunta 2, ¿cuáles son eficientes?

Solución:

En este caso, basta tomar $r_A = 3$ y $r_B = 1$.

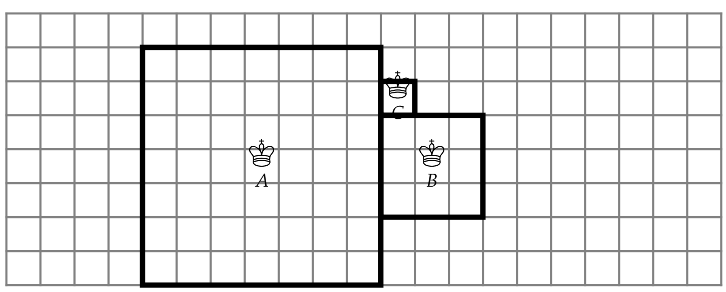
■

Para cada rey A, denotaremos por a_A el *área* de su reino, esto es, la cantidad de cuadraditos que cubre (contando el que él tiene). Claramente, $a_A = d_A^2$

Problema 5. En la figura de la pregunta 2, ¿cuál es la configuración que tiene mayor a_A? ¿Cuál tiene mayor a_B? Y, ¿cuál tiene mayor $a_A + a_B$?

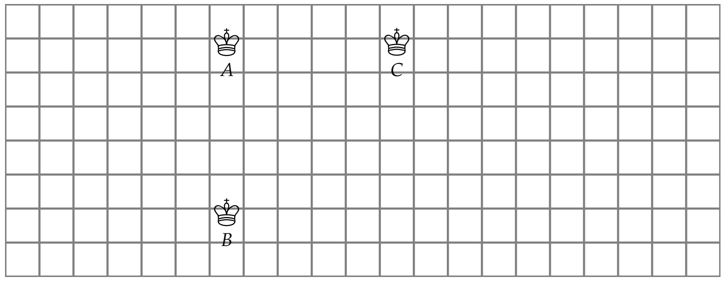
Solución:

La siguiente configuración tienen mayor a_A, mayor a_B y mayor $a_A + a_b$.



■

Problema 6. En la siguiente configuración encuentre todas las configuraciones eficientes; y, además, ¿entre ellas cuál tiene mayor $a_A + a_B + a_C$?

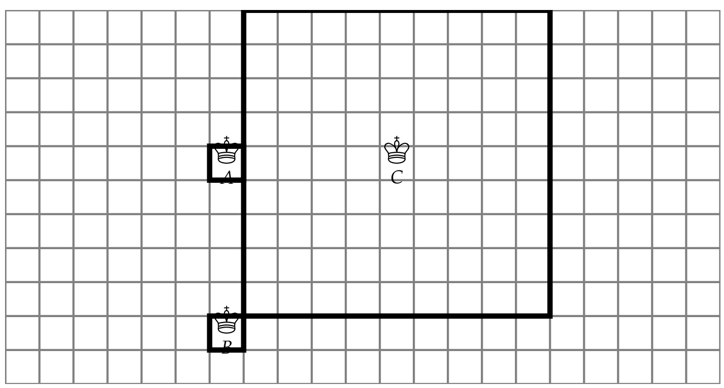


Solución:

Las configuraciones posibles involucran considerar $r_A \leq 4$, $r_B \leq 4$ y $r_C \leq 4$. Así, las configuraciones posibles son:

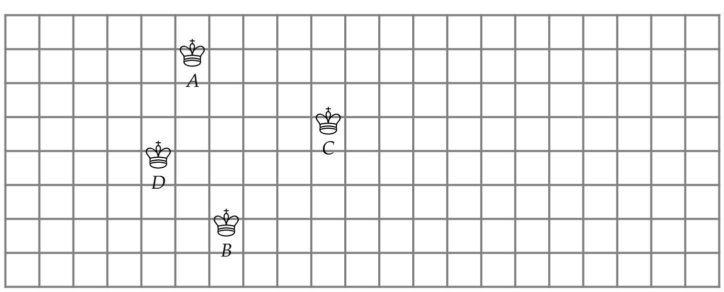
r_A	r_B	r_C	$a_A + a_B + a_C$
0	4	0	83
4	0	0	83
0	0	4	83
1	3	1	67
1	1	3	67
3	1	1	67
2	2	2	75

En la figura se muestra el caso donde $r_A = 0$, $r_B = 0$ y $r_C = 4$, y la suma de las áreas es $1 + 1 + 81 = 83$, que es la mayor suma. La configuración que maximiza no es única por simetría.



■

Problema 7. En la siguiente configuración encuentre todas las configuraciones eficientes; y, además, ¿entre ellas cuál tiene mayor $a_A + a_B + a_C$?



Solución:

Haciendo la prueba caso a caso, considerando que $r_A + r_D = 2$, $r_B + r_D = 1$, $r_C + r_B = 2$ y $r_A + r_C = 3$, se puede conseguir que las únicas dos configuraciones que cumplen lo pedido son $r_A = 1$, $r_B = 0$, $r_C = 2$ y $r_D = 1$; o bien, $r_A = 2$, $r_B = 1$, $r_C = 1$ y $r_D = 0$. Ambas tienen la misma suma de áreas, 44.Entre ellas la que tiene mayor $a_A + a_B + a_C$? es $r_A = 2$, $r_B = 1$, $r_C = 1$ y $r_D = 0$.

■

Problema 8. Un rey muy anciano, está a punto de morir y decide repartir su reino entre sus cinco hijos. Su reino tiene largo $d = 11$, sus cinco hijos deben formar sus nuevos reinos de forma que sean lo más grande posible en este terreno y cada nuevo reino no puede tener la misma dimensión que la de otro reino.

a) Argumenten porqué no se puede hacer la repartición pedida.

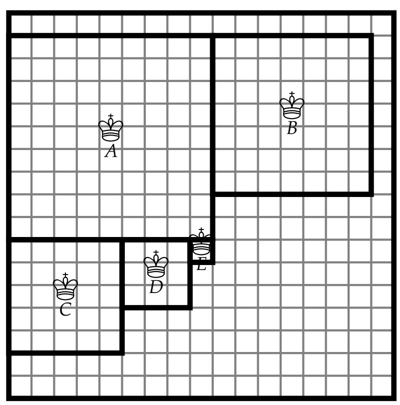
b) Determinen cuál debería haber sido la dimensión del reino del anciano para que se pueda repartir de la manera pedida. Entreguen la dimensión más pequeña que cumpla lo anterior.

Solución:

a) Hemos de notar que si se quiere que los reinos sean de diferentes tamaños debe pasar que cada uno de los largos de los reinos deben ser impar (por condición inicial del problema) y debe ser menor a 11 (ya que ese es el largo del reino del anciano). Así, primero notamos que los únicos impares menores a 11 son 9, 7, 5, 3, y 1. Resulta entonces solo 5 posibilidades, y son 5 hijos. Luego, solo pueden ser estos valores las dimensiones de los reinos de los hijos. Además, la suma de las áreas de sus reinos debería ser menor a 121, que es el área del reino del anciano, per eso no ocurre. De forma que es imposible que se les pueda repartir el terreno con esa distribución a los hijos.

b) Para poder cumplir lo pedido se debe tener un reino de largo 17, ya que debe poder contener a los reinos de largo 9, 7, 5, 3, y 1; además, de cumplir con ser un impar. Por tanto, debe ser mayor a $9 + 7 = 16$, ya que no importa como se coloquen siempre agregarán horizontalmente o verticalmente esa cota los dos reinos más grandes.

Una posible configuración mínima es la siguiente, pero no es la única.

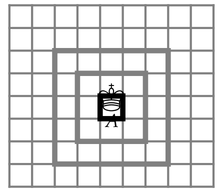


■

Agregaremos nuevas reglas a los reinos y permitiremos, mediante la compra, la expansión de un reino:

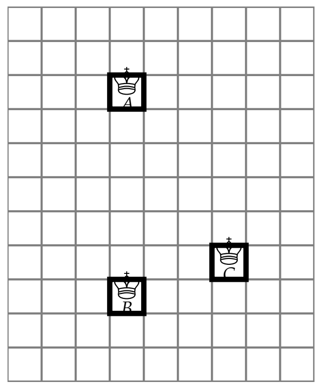
- Por cada casilla en la que no está el rey, tiene un precio igual al mínimo radio (la cantidad de cuadrados al rey, en una versión análoga a la dada inicialmente) en el que se encuentra.
- A cada rey se le asignará una cantidad fija de dinero.
- Si un rey quiere expandir su terreno, debe comprar toda el área dentro del radio expandido.

Así, por ejemplo,



Si el reino A tiene \$20 y ocupa sólo el cuadrado dónde está su corona (o sea $r_A = 0$), le cuesta \$8 expandirse a el cuadrado para el que $r_A = 1$, y otros \$32 adicionales para expandirse a $r_A = 2$. Por tanto, por el dinero que tiene, su máxima expansión sólo puede ser a radio 1.

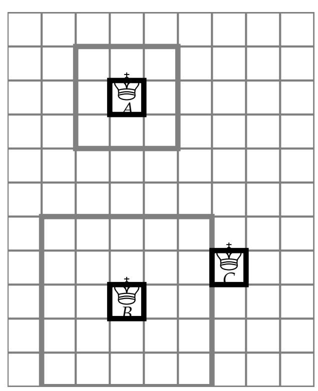
Problema 9. Considere la siguiente configuración de reinos:



El reino A, cuyo monarca es Rodrigus II, tiene \$20. El reino B, cuyo monarca es Lucas Mauricius, posee \$60. Finalmente el reino C, cuyo monarca es Pinipius el Grande, posee \$120. ¿Cual es valor más grande que puede tomar la suma $a_A + a_B + a_C$ si se quieren expandir lo más posible?

Solución:

Tanto Lucas Mauricius cómo Pinipius el grande puede expandir su reino para tener $r = 2$. En tanto Rodrigus II sólo puede expandirse a $r = 1$. La siguiente figura muestra una solución.



Una solución análoga se obtiene si C es el que aumenta su reino hasta B.

■

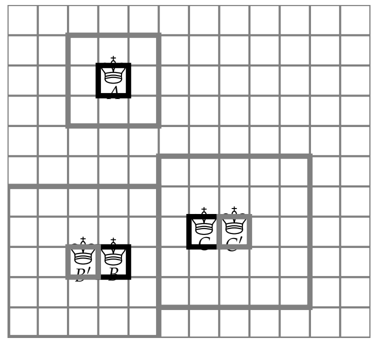
Como los reyes anteriores son malos vecinos, decidieron que querían moverse y alejar sus reinos, por eso agregaremos una nueva regla:

- Para mover su centro, antes de expandirse, debe pagar \$20 por casilla que se desplace.

Problema 10. Utilizando la misma configuración del problema anterior(y la misma cantidad de dinero para cada reino), encuentre el valor mas grande que puede tomar la suma $a_A + a_B + a_C$ una vez que se hayan expandido y movido todo lo que hayan querido.

Solución:

Marcaremos con $'$ aquellos reinos que han sido desplazados.



No es la única solución, pero la suma de las áreas en todas, incluida la anterior, es 59. Notamos que ni B ni C tienen dinero para extenderse a $r = 3$.

■

Ahora, incluiremos la posibilidad de que un reino mayor absorva a un reino menor.
Diremos que el reino A *absorbe* al reino B si y solo sí se cumplen las siguientes condiciones:

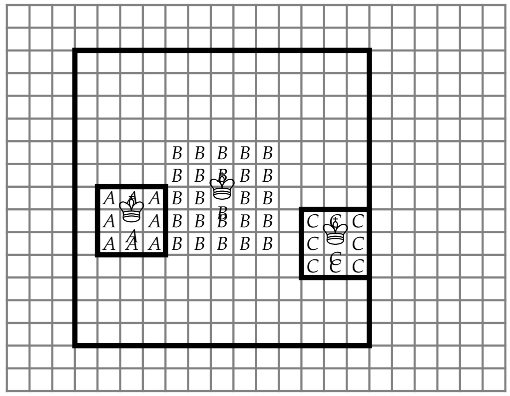
- $r_A \geq r_B$
- Se puede agrandar r_A de modo que, al final, el reino de A contenga al reino de B;
- El reino de A tiene el dinero suficiente para hacer las absorciones;
- Todos los movimientos de expansión son movimientos permitidos *en* el rectángulo cuadriculado dado y
- La Absorción se debe hacer, siempre, al menor costo para el reino que absorbe.

Observación: Un reino A puede absorber a más de un reino simultaneamente, mientras los radios de los reinos absorbidos sean menores o iguales al radio de A.

Problema 11. En el ejemplo de configuración ineficiente, mostrar la configuración después de que el reino B absorba a los otros 2. Señalen, además, el costo que pagó B por la absorción de los reinos de A y B.Supongan, además, que el cuadrículado es tan grande cuanto sea necesario.

Solución:

Aquí no es necesario que el reino B se desplace. Necesitará llegar a $r_B = 5$ para absorver al reino A y a $r_B = 6$ para absorver el reino C. En este caso el reino B tendrá $r_B = 6$ y, por tanto, $d_B = 13$.



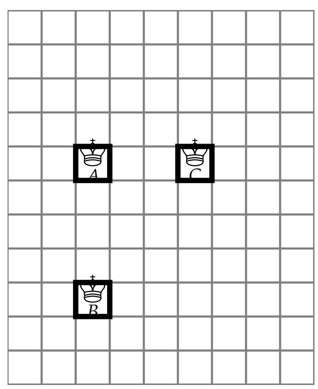
El costo será el siguiente:

- Para pasar de $r_B = 2$ a $r_B = 3$ necesitará $20x\$3 = \$60$;
- Para pasar de $r_B = 3$ a $r_B = 4$ necesitará $32x\$4 = \$128$
- Para pasar de $r_B = 4$ a $r_B = 5$ necesitará $40x\$5 = \$200$. Aquí el reino B absorvió el reino A.
- Para pasar de $r_B = 5$ a $r_B = 6$ necesitará $48x\$6 = \$288$. Aquí el reino B absorvió el reino C.

Por tanto el costo total de la absorción es \$688.

■

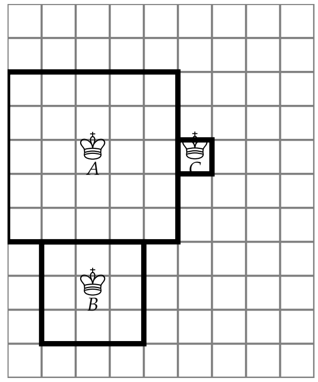
Problema 12. En la distribución siguiente, encontrar a lo menos dos configuraciones eficientes que permitan absorción. Luego hagan la absorción (de menor costo) en cada caso. Pueden agrandarse o trasladarse y agrandarse.



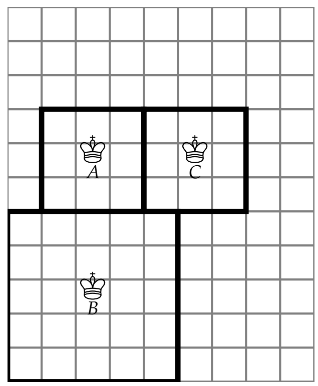
Solución:

A continuación, presentamos las opciones de configuraciones eficientes y las condiciones en las que quedan luego de que uno de los reinos absorba al resto.

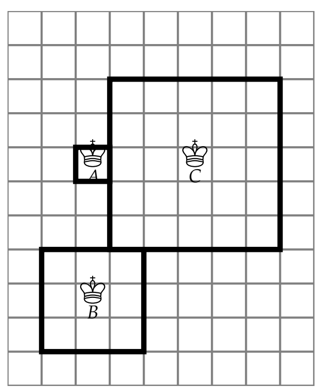
- La siguiente es una configuración eficiente. El área total es 35.en la posición que está, el reino A ($r_A = 2$), no puede expandirse sin salir del tablero.Así que debe desplazarse. Se desplaza uno hacia la derecha(y entonces gasta \$20). Con este deplazamiento ya absorvió el reino en C. Si se agranda en 1, no absorve aún B, así que se desplaza uno hacia abajo(gasta \$20 más). Con este desplazamiento aún absorve C pero no absorve B. Si se expandiera a $r_3 = 3$ absorvería A pero debería pagar $20x\$3 = \$60$. Ahora, se puede desplazar uno más hacia abajo, manteniendo $r_A = 2$ y, en ese caso absorve B. Por tanto es lo que debe hacer: desplazarse uno hacia la derecha y dos hacia abajo, le cuesta \$60.



- La siguiente es otra configuración eficiente. El área total es 53. Cómo en el caso anterior el reino en B debe desplazarse dos hacia arriba y uno hacia la derecha para absorver a A y C. El costo es \$60.



- La siguiente es otra configuración eficiente. El área total es 35. Cómo en el caso anterior el reino en C debe desplazarse dos hacia abajo y uno hacia la izquierda para absorver a A y C. El costo es \$60.



■

Problema 13. Se tienen 3 reinos colineales (en la vertical o en la horizontal) en el orden A, B, C, de radios r_1, r_2 y r_1 respectivamente. La distancia entre el rey A y B es n y la distancia entre el rey B y C es m. Probar que la configuración después de absorber, tiene un reino de área al menos el mayor entre $(n+r_1)^2$ y $(m+r_1)^2$.

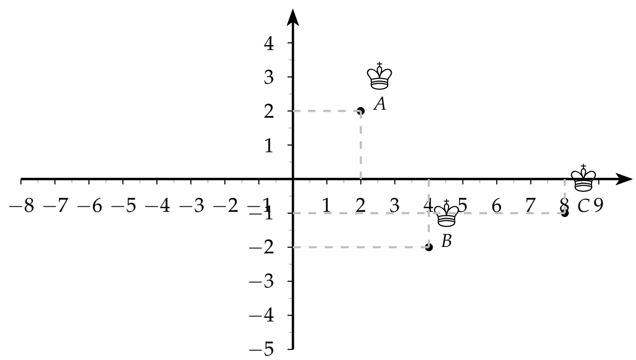
Solución:

Sean los reinos A, B, C. El reino mayor debe ser B ya que $r_A = r_1 = r_C$. Suponemos que $n \geq m$. Para absorber al reino C, la distancia entre B y C es, al menos m, por lo que el área es de al menos $(m+r_1)^2$, lo que es mayor a $(n+r_1)^2$. Al agrandarse el reino en B en m unidades hacia C, absorvió A, que es lo que se quería probar.

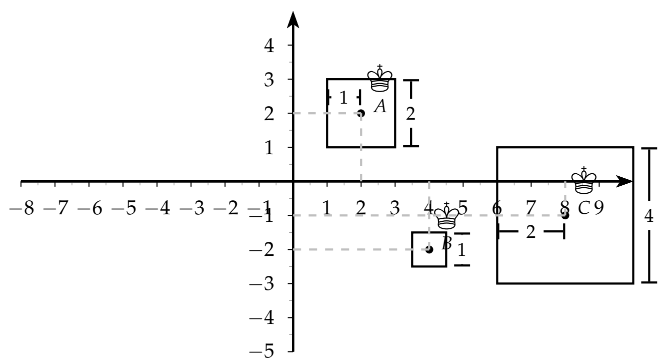
Preguntas en el Plano Cartesiano

Ahora bien, cambiaremos las reglas en las que hemos estudiado nuestros reinos, pasando de una cuadrícula al plano cartesiano. Mantendremos la simbología para los reyes, pero habrán algunos cambios en el estudio de los reinos.

Así, los reyes A, B y C, podrían ser notados como:

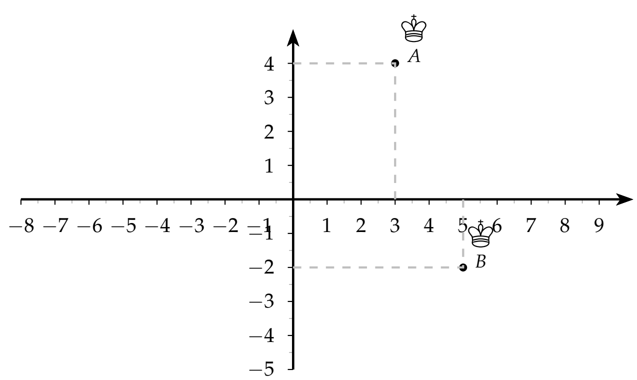


Y sus *reinos* seguirán siendo un cuadrado, centrado en el rey correspondiente, de manera que reinos distintos no se superpongan y que en cada reino haya solo un rey. Por ejemplo, en la figura de abajo se observa una posible asignación de reinos a cada rey.



Para cada rey A, denotaremos por d_A el largo de su reino, y r_A a la mitad de dicho valor (o, equivalentemente, a la distancia del rey al borde de su reino). [1] Por ejemplo, en la figura de arriba tenemos $d_A = 2$, $d_B = 1$, $d_C = 4$, $r_A = 1$, $r_B = \frac{1}{2}$, $r_C = 2$ (que están marcados en la figura). Observación: los reinos tienen que tener radio mayor a cero.

Problema 1. Considere dos reyes colocados como en la siguiente figura. Demuestre que $r_A + r_B \leq 6$.



[1]**Noten que esto es una diferencia con la definición en la cuadrícula, así que tengan cuidado.**

Solución:

Tenemos dos casos dependiendo de si se intersecan o no. Así, en un primer caso, si $r_A = 6 - n$, debe ocurrir que $r_B \leq n$. Al sumar r_A a lo anterior, tenemos $r_A + r_B \leq 6 - n + n = 6$.

Por otro lado, si se intersecan, entonces si $r_A = 6 - n$, $r_B = 6$. De forma que la suma de ambos es 6.

■

Para cada rey A, denotaremos por a_A el área de su reino. Claramente $a_A = d_A^2$.

Problema 2. Suponga que tiene dos números positivos a, b tales que $a + b = k$. Demuestre que $k^2 \geq a^2 + b^2 \geq \frac{k^2}{2}$

Solución:

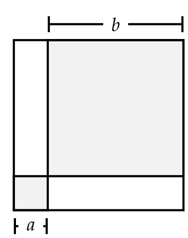
Para comenzar, tomemos k y elevemos al cuadrado: $k^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Como a y b son positivos, es claro que $k^2 \geq a^2 + b^2$.

Si bien a continuación se presenta una forma algebraica de hacer la demostración, también será válida una demostración geométrica, como la mostrada luego.

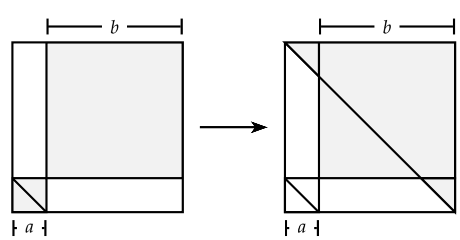
Así, primero, podemos realizar la versión algebraica. Para esto, tomamos $(a-b)^2 \geq 0$ como punto de partida; con lo cual, tenemos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq (a-b)^2 \\
0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\
2ab &\leq a^2 + b^2 \\
a^2 + 2ab + b^2 &\leq 2a^2 + 2b^2 \\
(a+b)^2 &\leq 2a^2 + 2b^2 \\
k^2 &\leq 2a^2 + 2b^2 \\
\frac{k^2}{2} &\leq a^2 + b^2
\end{aligned}$$

O bien, notemos que decir que $k^2 \geq a^2 + b^2$, es simplemente notar que el cuadrado grande de lado $a + b$ tiene más área que la suma de los cuadrados de lados a y b.



Ahora bien, la otra desigualdad sale de notar la siguiente transformación de áreas:



De donde es evidente que el área gris es mayor a la mitad del área del cuadrado grande.

■

Problema 3. En la figura del **Problema 1.**, considere que $r_A + r_B = 6$ y, a partir de esto:

a) Demuestre que $a_A + a_B \leq 144$ y $a_A + a_B \geq 72$.

b) En las desigualdades anteriores, ¿se alcanza la igualdades? ¿En qué casos?

Solución:

Sabemos que $a_A = d_A^2$, pero sabemos que $d_A = 2r_A$, entonces $a_A = 4r_A^2$.

Ahora, ocupamos la desigualdad del **Problema 2.**, considerando que $r_A + r_B = 6$.

$$r_A^2 + r_B^2 \leq 6^2$$
$$4r_A^2 + 4r_B^2 \leq 144$$

Y, dado que $a_A = 4r_A^2$, tenemos que $a_A^2 + a_B^2 \leq 144$.

De forma similar, utilizando la cota inferior se tiene que

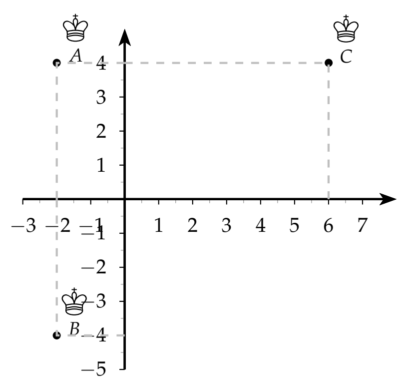
$$r_A^2 + r_B^2 \geq \frac{6^2}{2}$$
$$4r_A^2 + 4r_B^2 \geq 72$$

Y al reemplazar, $a_A + a_B \geq 72$

Si se alcanzan las igualdades, cuando $r_A = r_B = 3$ para 72 y $r_A = 0$y $r_B = 6$ para 144.

■

Problema 4. Considere la siguiente configuración.



a) Demuestre que $r_A + r_B \leq 8$, $r_A + r_C \leq 8$ y $r_B + r_C \leq 8$.

b) Suponga que $r_A \leq 4$, $r_A + r_C = 8$ y $r_B + r_C = 8$ y, con esas condiciones, encuentre el valor mínimo de $a_A + a_B + a_C$.

c) Suponga que $r_A \geq 4$, $r_A + r_C = 8$ y $r_A + r_B = 8$ y, con esas condiciones, encuentre el valor mínimo de $a_A + a_B + a_C$.

d) Encuentre el valor máximo de $a_A + a_B + a_C$.

Solución:

a) Se puede notar que es similar a **Problema 1.**, por lo que los argumentos esgrimidos antes son análogos a los de este caso.

b) Con $r_A = r_B$ y $r_C = 8 - r_A$, se tiene que la suma de las áreas será

$$4(2r_A^2 + (8 - r_A)^2) = 4(3r_A^2 - 16r_A + 64)$$

Lo que se puede minimizar cuando $r_A = \frac{16}{6}$.

c) De la información se tiene que $r_C = r_B$, por lo que la suma de las áreas es

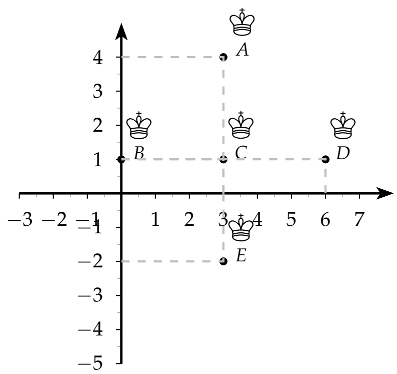
$$4(2r_C^2 + (8 - r_C)^2) = 4(3r_C^2 - 16r_C + 64)$$

Lo que nuevamente es minimizado con $r_C = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$.

d) En este caso, el valor máximo de la suma de las áreas se da cuando $r_A = r_B = r_C = 4$. Por lo que el área máxima es $4 \cdot 16 \cdot 3$.

■

Problema 5. En la siguiente figura, cada reino debe tener al menos radio 0.5. Encuentre el mayor valor posible de $a_A + a_B + a_C + a_D + a_E$, junto a un dibujo en la(s) situación(es) que se alcance el máximo.



Solución:

Claramente la configuración debe ser eficiente (si no, podríamos aumentar la suma de las áreas). Esencialmente tenemos tres situaciones:

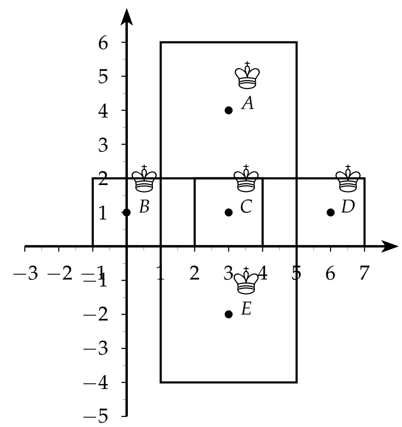
- Cuando $r_C \geq 1{,}5$, tenemos que los reinos de A, B, D, E son tangentes al de C. Así, $r_A + r_C = r_B + r_C = r_D + r_C = r_E + r_C = 3$. Además, como queremos que r_A, r_B, r_D, r_E sean cada uno mayor o igual a 0,5, tenemos que $r_C \geq 2{,}5$. Así, el área en este caso está dada por

$$\begin{aligned} A &= d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 + d_D^2 + d_E^2 \\ &= 4(r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2 + r_E^2) \\ &= 4(4(3 - r_C)^2 + r_C^2) \\ &= 4(5r_C^2 - 24r_C + 36) \end{aligned}$$

  donde $1{,}5 \leq r_C \leq 2{,}5$.

  Lo anterior queda en función de r_C, siendo una función que alcanza su mínimo en 2,4. Así, la función es decreciente en el intervalo $[1{,}5, 2{,}5]$, y por tanto su mayor valor está dado cuando $r_C = 1{,}5$; esto es, $A = 45$.

- Cuando $r_C \leq 1{,}5$, tenemos que algún reino debe tocar al de C. Sin pérdida de generalidad (por la simetría) supongamos que el de A. Así, tenemos que el de B y D tocan (por la esquina) al de A, y el de E toca al de B, C, D, como se muestra en la figura

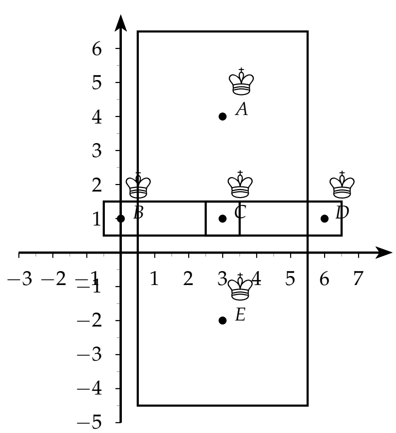


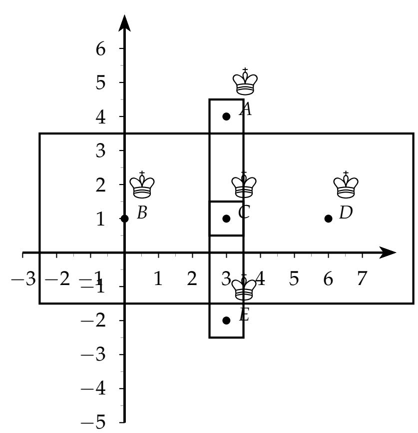
Así, tenemos que $r_B = r_C = r_D$, y $r_A + r_C = r_E + r_C = 3$. Acotando el área, tenemos que

$$\begin{aligned} A &= d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 + d_D^2 + d_E^2 \\ &= 4(r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2 + r_E^2) \\ &= 4(3r_C^2 + 2(3 - r_C)^2) \\ &= 4(5r_C^2 - 12r_C + 18) \end{aligned}$$

considerando que $0{,}5 \leq r_C \leq 1{,}5$. Esta función (de r_C) alcanza su mínimo en 1,2. Así, la función es decreciente en el intervalo $[0{,}5, 1{,}2]$ y creciente en $[1{,}2, 1{,}5]$. Por ello, el máximo estará o en $r_C = 0{,}5$ (donde vale $A = 53$), o en $r_C = 1{,}5$ (donde vale $A = 45$).

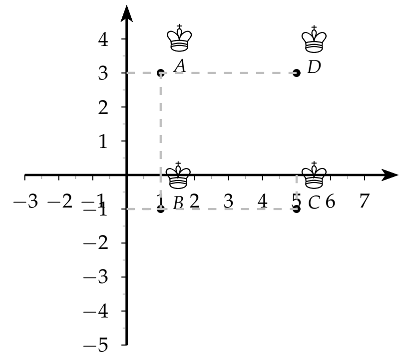
Por el análisis de arriba, tenemos que el máximo se alcanza en el segundo caso, con $A = 53$. Como asumimos que A era tangente, tenemos esencialmente dos casos distintos: cuando el par $A - E$ son tangentes a C, y cuando $B - D$ son tangentes. Estas corresponden a las siguientes configuraciones





■

Problema 6. Encuentre el valor máximo de $a_A + a_B + a_C + a_D$ en la siguiente figura.



Solución:

En este caso, el valor máximo es cuando todos los radios son 2. Por lo que el área máxima debería ser 64.

■

Separación de Pruebas

Sección	Pregunta	7mo-8vo	Menor	Mayor
Cuadrícula	P1	2		
	P2	2	2	1
	P3	2		
	P4	2		
	P5	2		2
	P6	3	2	2
	P7	3	2	
	P8	4		
	P9		2	
	P10		2	
	P11		3	
	P12		3	
	P13		4	
Plano Cartesiano	P1			2
	P2			2
	P3			2
	P4			4
	P5			3
	P6			2