CMAT Campeonato Escolar de Matemáticas XV

Cuarta Fecha
29 de Julio de 2017
Soluciones
Individual

Primer Nivel

1 Decimos que una palabra de tres letras (con o sin sentido) es *ordenada* si sus letras son distintas y están en orden alfabético. Por ejemplo, ADK y KMN son ordenadas, pero DCA y LAN no lo son. ¿Cuántas palabras ordenadas de 3 letras hay? (no es necesario encontrar el valor explícito, por ejemplo, una expresión como $2+4+6+\ldots+100$ es una respuesta válida)

Solución

Primero vamos a contar las palabras ordenadas que comienzan con A:

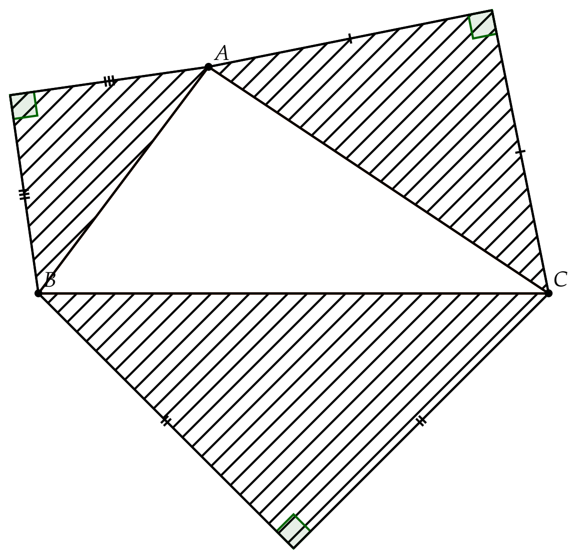
2da letra	3ra letra	Cantidad de palabras
B	$C, D, E, \ldots, Z$	25 opciones
C	$D, E, F, \ldots, Z$	24 opciones
D	$E, F, G, \ldots, Z$	23 opciones
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y	Z	1 opción

Por lo tanto, hay $1+2+3+\ldots+25$ palabras ordenadas que empiezan con A.
Análogamente, hay:

- $1+2+3+\ldots+24$ palabras ordenadas que comienzan con B.
- $1+2+3+\ldots+23$ palabras ordenadas que comienzan con C.
- $1+2+3+\ldots+22$ palabras ordenadas que comienzan con D.
- $\vdots$
- 1 palabra ordenada que comienza con X.

Por lo tanto, hay $1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+25) = 2925$ palabras ordenadas de tres letras.
Otra manera de contar las palabras ordenadas es eligiendo tres letras distintas entre las 27 letras del alfabeto. Por lo tanto, hay $\binom{27}{3} = 2925$ palabras ordenadas de tres letras.

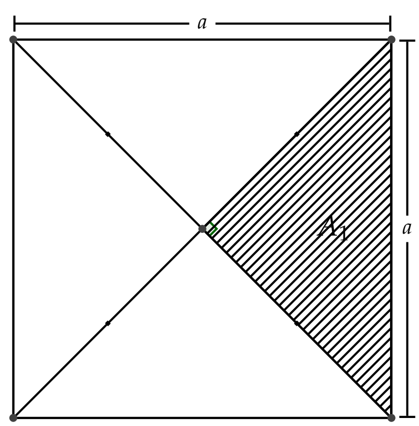
2 Se tiene un triángulo $\triangle ABC$, con lados $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$ tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 30$. Cada uno de los lados del triángulo $\triangle ABC$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, como se muestra en la figura. El área de estos triángulos rectágulos isósceles es A_1, A_2 y A_3:



Calcular $A_1 + A_2 + A_3$.

Solución

Calculemos primero el área de A_1 en función de a:

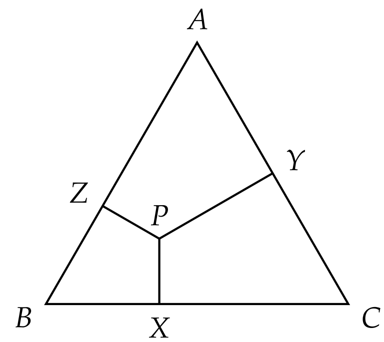


A_1 es un cuarto de un cuadrado de lado a, entonces $A_1 = \dfrac{a^2}{4}$. Análogamente, $A_2 = \dfrac{b^2}{4}$ y $A_3 = \dfrac{c^2}{4}$. Así:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

Segundo Nivel

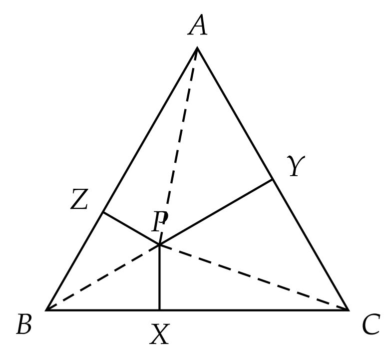
1 Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero de perímetro 2 unidades. Sea P un punto en el interior del triángulo. Se trazan las perpendiculares $\overline{PX}$, $\overline{PY}$ y $\overline{PZ}$ a los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente:



Demuestre que la suma $S = PX + PY + PZ$ no depende de la posición del punto P. Además, encuentre el valor de S.

Solución

Se une el punto interior P con los vértices A, B y C del triángulo equilátero:

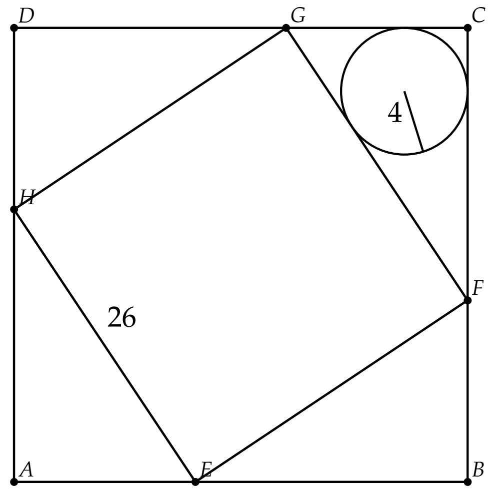


Los lados del triángulo equilátero $\triangle ABC$ miden $\frac{2}{3}$ y su altura mide $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Además, su área es igual a la suma de las áreas de los triángulos $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ y $\triangle PAB$, entonces:

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot PX}{2} + \frac{\frac{2}{3} \cdot PY}{2} + \frac{\frac{2}{3} \cdot PZ}{2}$$

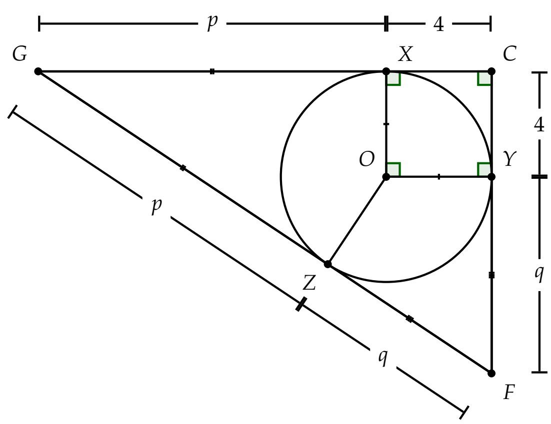
Por lo tanto, $S = PX + PY + PZ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, independiente de la posición del punto P.

2 En la figura, los cuadriláteros $ABCD$ y $EFGH$ son cuadrados, $EH = 26$ y la circunferencia inscrita del triángulo $\triangle CFG$ tiene radio 4. Suponga, además, que $GC > CF$. Calcule GC y CF.



Solución

Sean $GC = a$ y $CF = b$. $EFGH$ es un cuadrado, entonces $FG = 26$. Además, tenemos la siguiente figura:



El cuadrilátero $CXOY$ es un cuadrado, debido a que $\angle OXC = \angle XCY = \angle CYO = 90°$ y $OX = OY = 4$ (por ser radios), entonces $CX = CY = 4$. Además:

$$a + b = p + q + 8 = 26 + 8 = 34$$

Por el teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = 26^2$ y reemplazando en lo anterior:

$$\begin{aligned} a^2 + (34 - a)^2 &= 26^2 \\ 2a^2 - 68a + 1156 &= 676 \\ 2a^2 - 68a + 480 &= 0 \\ a^2 - 34a + 240 &= 0 \\ (a - 24)(a - 10) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $a = 24$ o $a = 10$. Por el enunciado, $a + b = 34$ y $a > b$, entonces $GC = a = 24$ y $CF = b = 10$.

Tercer Nivel

1 Los 12 números de un reloj se desprendieron. Al colocarlos de nuevo se cometen algunos errores. Demuestre que, independiente del error, en la nueva colección hay un trío de números consecutivos que al sumarlos se obtiene un resultado mayor o igual a 20.

Solución

Llamaremos a los números $a_1, a_2, ..., a_{12}$. Notemos que:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_2 = a_2 + a_3 + a_4$$

$$\vdots$$

$$S_{12} = a_{12} + a_1 + a_2$$

Resulta fácil darse cuenta que cada número aparece en tres sumas distintas. Por ejemplo, a_1 aparece en S_1, S_{11} y S_{12}. Si sumamos todas las sumas S_n:

$$S_1 + S_2 + ... + S_{12} = 3(1 + 2 + ... + 12) = \frac{3 \cdot 12 \cdot 13}{2} = 234$$

Como son 12 sumas, dividiremos el resultado por 12, obteniendo cuociente 19 y resto 6. Luego, por **Principio del Palomar** ocurrirá que alguno de los sumandos será mayor o igual a 20, que es lo que se quería demostrar.

2 En un país, hay un sistema ferroviario formado por 45 ciudades y algunas líneas de tren. Cada línea de tren conecta dos ciudades. Este sistema ferroviario satisface que:

- Dos ciudades cualesquiera están conectadas, a lo más, por una línea de tren.
- No necesariamente están conectadas todas las ciudades.
- Si se toman 6 ciudades cualesquiera, hay exactamente 4 líneas de tren que conectan dos de estas ciudades.

¿Cuántas líneas de tren hay en total?

Solución

Vamos a contar las parejas de la forma (A, l), donde A es un conjunto de 6 ciudades y l es una línea que conecta dos ciudades de A.
Sean $\mathcal{L}$ la cantidad de parejas (A, l) y x la cantidad de líneas de tren. Contaremos $\mathcal{L}$ de dos maneras.

- Podemos elegir A primero, de $\binom{45}{6}$ maneras, y luego l, de 4 maneras (por la tercera propiedad). Entonces $\mathcal{L} = \binom{45}{6} \cdot 4$.
- Podemos elegir l primero, de x maneras, y luego A (los dos extremos de l deben pertenecer a A, entonces falta elegir 4 ciudades entre 43; esto se puede hacer de $\binom{43}{4}$ maneras). Entonces $\mathcal{L} = \binom{43}{4} \cdot x$.

Como $\mathcal{L} = \binom{45}{6} \cdot 4$ y $\mathcal{L} = \binom{43}{4} \cdot x$, entonces:

$$\binom{45}{6} \cdot 4 = \binom{43}{4} \cdot x$$
$$\frac{45!}{6! \cdot 9!} \cdot 4 = \frac{43!}{4! \cdot 9!} \cdot x$$

Entonces:

$$x = \frac{4! \cdot 9!}{43!} \cdot \frac{45!}{6! \cdot 9!} \cdot 4 = \frac{45 \cdot 44}{6 \cdot 5} \cdot 4 = 264$$

Por lo tanto, hay 264 líneas de tren en total.

Cuarto Nivel

1 Sean $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ distintos, tales que $a^2 - b = b^2 - c$, $b^2 - c = c^2 - a$ y $c^2 - a = a^2 - b$. Pruebe que $(a+b)(b+c)(a+c) = 1$

Solución

De la primera igualdad se tiene:

$$\begin{aligned} a^2 - b &= b^2 - c \\ a^2 - b^2 &= b - c \\ (a+b)(a-b) &= b - c \\ a + b &= \frac{b-c}{a-b} \end{aligned}$$

Trabajando de la misma forma con las otras dos igualdades, se tiene $b + c = \dfrac{c-a}{b-c}$ y $c + a = \dfrac{a-b}{c-a}$. Por lo tanto:

$$(a+b)(b+c)(a+c) = \frac{b-c}{a-b} \cdot \frac{c-a}{b-c} \cdot \frac{a-b}{c-a} = 1$$

2 Sea $\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los números enteros no negativos. Sea $f : \mathbb{Z}_0^+ \to \mathbb{Z}_0^+$ una función tal que $f(n+1) > f(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, y $f(n + f(m)) = f(n) + m + 1$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}_0^+$. Encuentre $f(2017)$.

Solución

Si $m = 0$, entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$:

$$f(n + f(0)) = f(n) + 1 \qquad (\star)$$

Sea $k = f(0)$ y supongamos que $k \geq 2$. Entonces $f(n) < f(n+1) < f(n+k) = f(n) + 1$, lo cual es una contradicción porque $f(n)$ y $f(n) + 1$ son números enteros consecutivos. Por lo tanto, $k \in \{0, 1\}$.
Si $k = 0$, entonces $f(n) = f(n) + 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $k = 1$, entonces $f(0) = 1$, la propiedad $(\star)$ es $f(n+1) = f(n) + 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$ y aplicándola sucesivamente se tiene:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + 1 = 1 + 1 = 2 \\ f(2) &= f(1) + 1 = 2 + 1 = 3 \\ f(3) &= f(2) + 1 = 3 + 1 = 4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

es decir, $f(x) = x + 1$. Esta función cumple las propiedades dadas en el enunciado y, finalmente, $f(2017) = 2018$.