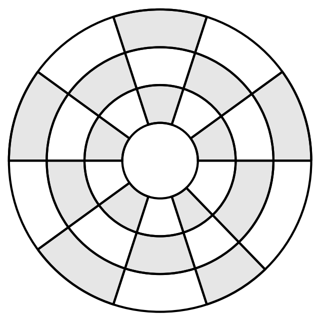
Primer Nivel

1 Un juego para dos jugadores incluye una mesa redonda formada por 31 casillas, coloreadas de blanco y negro, tal y como se muestra en la figura

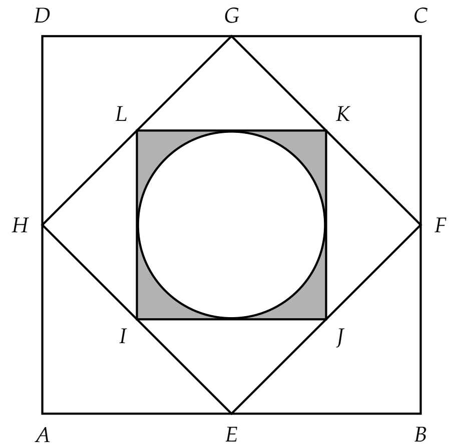


Cada jugador, en su turno, debe colocar una o dos monedas en casillas del tablero de igual color, que no hayan sido llenadas antes. Gana el jugador que coloca la última moneda. Muestre una estrategia ganadora para el primer jugador.

Solución

Una estrategia para el primer jugador comienza con él colocando una moneda en el centro. Así, cuando el segundo jugador va a jugar, se encuentra con 15 casillas blancas y 15 casillas negras. Una vez que el segundo jugador realiza su movimiento, el primero realiza la misma jugada pero cambiando los colores. Por ejemplo, si el segundo jugador colocó dos monedas en casillas negras, entonces el primero colocará dos monedas en casillas blancas.
De esta manera, el segundo jugador siempre se encontrará con la misma cantidad de casillas blancas y negras antes de realizar su movimiento. Así, es imposible que gane, ya que debería eliminar al menos dos casillas de distinto color, lo que no está permitido. Esto demuestra que el primer jugador gana, independiente de lo que haga el segundo.

2 En la figura se muestra un cuadrado $ABCD$. Si E, F, G, H, I, J, K, L son puntos medios de los lados respectivos, la circunferencia está inscrita en el cuadrado $IJKL$ y el área pintada es $(64 - 16\pi)[u^2]$, calcule la longitud de la diagonal del cuadrado $ABCD$.



Solución

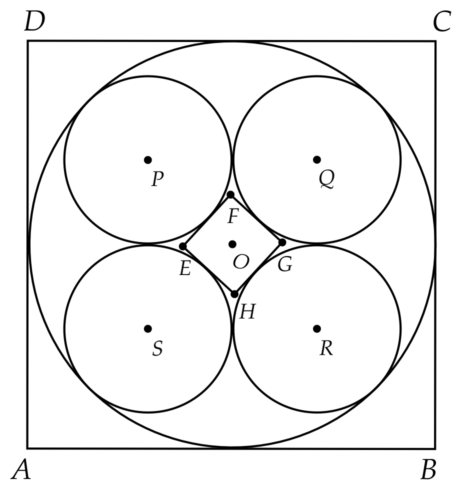
Sea r el radio de la circunferencia. El área achurada es:

$$4r^2 - \pi r^2 = (64 - 16\pi)[u^2]$$
$$(4 - \pi)r^2 = 16(4 - \pi)[u^2],$$

entonces $r^2 = 16[u^2]$, luego $r = 4[u]$. Se tiene $IJ = 8[u]$, $EF = IK = 8\sqrt{2}[u]$. Como el triángulo EBF es rectángulo isósceles, debe ser que $EB = 8[u]$. Por tanto $AB = 16[u]$ y $AC = 16\sqrt{2}[u]$. Por lo tanto, la diagonal del cuadrado $ABCD$ mide $16\sqrt{2}[u]$.

Segundo Nivel

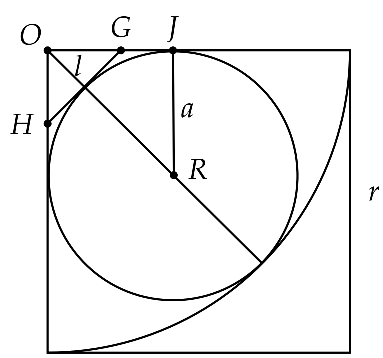
1 Se tiene la siguiente figura



en donde $ABCD$ y $EFHG$ son cuadrados, la circunferencia de centro O está inscrita en $ABCD$. Las circunferencias de centros P, Q, S y R tienen el mismo radio y cada una es tangente a otras dos y a la circunferencia de centro O.
El cuadrado $EFGH$ es tangente en los puntos medios de sus lados respectivamente a la circunferencia de centros P, Q, S y R. Calcule la razón entre el lado del cuadrado $EFGH$ y el lado del cuadrado $ABCD$.

Solución

Dado que las dimensiones de los cuadrados no varían en dependencia de la ubicación de las circunferencias, podemos trabajar sobre la siguiente figura. Llamemos r y a al radio de la circunferencia mayor y menor respectivamente, y l a la altura del triángulo OHG.



Tenemos el triángulo ORJ es isósceles de lado a, por tanto su hipotenusa es $a\sqrt{2}$, luego

$$a + l = a\sqrt{2} \Longrightarrow l = a(\sqrt{2} - 1)$$

y así el lado del cuadrado $EFGH$ es $2l$.

Además el radio de la circunferencia mayor corresponde a:

$$r = a + a\sqrt{2} = a(1+\sqrt{2})$$

Entonces la razón entre el lado del cuadrado $EFGH$ y el lado del cuadrado $ABCD$ es:

$$\frac{2l}{2r} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$$

2 ¿Cuántos números hay entre 1 y 2018 que tengan una cantidad par de dígitos impares? Por ejemplo, 13 es un número con 2 dígitos impares, por lo tanto, cumple la propiedad; 131 tiene 3 dígitos impares, por lo tanto, no cumple la propiedad.

Solución

Contaremos los números que cumplen la propiedad, dependiendo de la cantidad de dígitos del número. Sean P un dígito par e I un dígito impar.

- Desde 1 hasta 9: son sólo los que tienen 0 dígitos impares, o sea, de la forma P, que son 4.
- Desde 10 hasta 99: son los que tienen 0 dígitos impares o 2 dígitos impares, o sea, de la forma PP o II, que son 4×5 y 5^2, respectivamente. En total, son $20 + 25 = 45$.
- Desde 100 hasta 999: son los que tienen 0 dígitos impares o 2 dígitos impares, o sea, de la forma PPP, IIP, IPI, PII, que son 4×5^2, 5^3, 5^3, 4×5^2, respectivamente. En total, son $100 + 125 + 125 + 100 = 450$.
- Desde 1000 hasta 1999: son los que tienen 0 dígitos impares, 2 dígitos impares o 4 dígitos impares, o sea, de la forma PPPP, 1IPP, 1PIP, 1PPI, 1III, que son 0, 5^3, 5^3, 5^3, 5^3, respectivamente. En total, son $125 + 125 + 125 + 125 = 500$
- Desde 2000 hasta 2018: son sólo 2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2011, 2013, 2015 y 2017, que son 9.

Sumando los resultados parciales: $4 + 45 + 450 + 500 + 9 = 1008$.

Tercer Nivel

1 En algunas fórmulas matemáticas aparece un signo de exclamación, el cual no se trata de expresiones de sorpresa, sino que se utiliza para simbolizar al factorial de un número. El factorial de un número natural n es el producto de todos los números naturales consecutivos de 1 hasta n, y se denota por $n!$. Por ejemplo, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
Existen cosas particulares, en que los números son iguales a la suma del factorial de sus dígitos, como el 1! y el 2!. Un caso mucho más interesante fue encontrado en el año 1964 usando un computador, se tiene que $40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$ (por definición, $0! = 1$).
Encuentre todos los números de tres dígitos que cumpla esta particularidad.

Solución

Si los dígitos del número n son x, y, z (de izquierda a derecha), entonces:

$$n = 100x + 10y + z = x! + y! + z!$$

Si uno de los dígitos es mayor que 6, entonces $n = x! + y! + z! > 7! = 5040$, contradicción. Entonces los dígitos x, y, z son menores o iguales que 6.
Si uno de los dígitos es 6, entonces $n = x! + y! + z! > 6! = 720$ y así el dígito de las centenas de n es mayor que 6, contradicción (por lo indicado en el párrafo anterior). Entonces los dígitos x, y, z son menores o iguales que 5. Se tiene $n = x! + y! + z! \leq 360$, entonces $x \leq 3$, luego $n = x! + y! + z! \leq 246$, entonces $x \leq 2$.
Al menos uno de los dígitos y, z debe ser igual a 5, de lo contrario $n = x! + y! + z! \leq 72$, contradicción. Si $y = z = 5$, entonces $n! = x! + 5! + 5! > 240$, luego $x = 2$, entonces $100x + 10y + z = 255$ y $2! + 5! + 5! = 242$ son distintos, contradicción. Por tanto, exactamente uno de los dígitos y, z debe ser igual a 5. Además, $x = 1$.
Si $y = 5$, entonces $n = 150 + z = 1! + 5! + z! = 121 + z!$. Claramente z no puede ser 0, 1, 2, 3 ó 4. Por lo tanto, $z = 5$. Entonces $n = 105 + 10y = 121 + y!$. Podemos comprobar que $y = 4$. Por lo tanto, el único que cumple la propiedad es el $145 = 1! + 4! + 5!$.

2 Se tiene el siguiente número:

$$N = 1212412461246812468012468021246802 4...$$

¿Cuál es el dígito en la posición 2018?

Solución

Si agrupamos los dos primeros dígitos(12); luego los segundos tres dígitos(124); luego los terceros cuatro dígitos (1246), y así sucesivamente, tenemos:

$$\underbrace{12}_{2}\,\underbrace{124}_{3}\,\underbrace{1246}_{4}\,\underbrace{12468}_{5}\ldots\underbrace{12468024\ldots}_{n}.$$

Se puede ver fácilmente que el último dígito del grupo p es la cifra de las unidades del resultado de multiplicar 2 por $p - 1$. Así, y para encontrar el dígito en la posición 2018, debemos primero saber en qué grupo está, esto es, encontrar el número n correspondiente al grupo que contiene a dicho dígito. Para ello nos valemos de la expresión de la suma de los naturales de 1 hasta n.

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1 = 2018 \Rightarrow \frac{n^2 + n}{2} = 2019 \Rightarrow n^2 + n = 4038$$

Resultando así que $n = 63$ (Como nos interesa que el número sea natural, aproximamos la raíz de la ecuación de manera que no nos pasemos de 2018). Cómo $\dfrac{63 \cdot 64}{2} - 1 = 63 \cdot 32 - 1 = 2015$, tenemos que el dígito 2018 corresponde al tercer dígito del grupo 64, por lo que dicho dígito es 4.

Cuarto Nivel

1 Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo tal que $\measuredangle A = 60^\circ$ y $AB \neq AC$. Sean H, O y Γ el ortocentro, el circuncentro y la circunferencia circunscrita del triángulo $\triangle ABC$, respectivamente. Sea E el punto medio del arco BC de Γ que pasa por A. Pruebe que $AEOH$ es un paralelogramo.

Solución

Como $\measuredangle BAC = 60^\circ$, entonces $\measuredangle BOC = 120^\circ$. Por la definición de E, se tiene $\measuredangle BOE = \measuredangle COE = 120^\circ$. Como $OB = OC = OE$, entonces el triángulo $\triangle BCE$ es equilátero. Si M es el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{OE}$, entonces M es el punto medio del segmento $\overline{BC}$ y $2 \cdot OM = OE$.
Como $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ y $\overline{OE} \perp \overline{BC}$, entonces los lados $\overline{AH}$ y $\overline{OE}$ son paralelos. Además, $AH = 2 \cdot OM = OE$, entonces los lados $\overline{AH}$ y $\overline{OE}$ son paralelos y congruentes, luego $AEOH$ es un paralelogramo.

2 Demuestre que $24n + 5$ nunca será un cuadrado perfecto para cada n, un entero no negativo.

Solución

Primero notemos que cualquier número natural tiene la forma $4x + y$ con $x \in \mathbb{N}_0$, donde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$, e $y \in \{0, 1, 2, 3\}$, entonces cualquier cuadrado perfecto tendrá la forma:

$$(4x + y)^2 = 16x^2 + 8xy + y^2, \quad x \in \mathbb{N}_0 \text{ y } y \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Ahora, observemos que un cuadrado perfecto al ser dividido por ocho, tendrá el mismo resto que $\frac{y^2}{8}$ con $y \in \{0, 1, 2, 3\}$, ya que $\frac{(4x+y)^2}{8} = 2x^2 + xy + \frac{y^2}{8}$. El resto que deja $\frac{y^2}{8}$ con $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ es 0, 1 ó 4.
Supongamos que $24n + 5$ es un cuadrado perfecto para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{24n+5}{8}$ debe tener resto 0, 1 ó 4, pero $\frac{24n+5}{8} = 3n + \frac{5}{8}$ y $\frac{5}{8}$ tiene resto 5, contradicción. Por lo tanto, $24n + 5$ nunca será un cuadrado perfecto para algún $n \in \mathbb{N}$.