XVI

Segunda Fecha
12 de Mayo de 2018
Soluciones
Grupal

Construcciones con triángulos y varas...

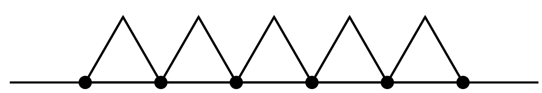
Nicolás estaba de viaje en Cmatlandia, una tierra de grandes riquezas, pero que no tiene las mismas herramientas que el resto del mundo. En Cmatlandia, no existe regla ni compás, al menos no como los conocemos. Lo más utilizado para poder dibujar es un triángulo equilátero de lado $1\,cm$ y una vara de madera que tiene un lado recto que no tiene marca alguna sobre ella (que cumple el rol de nuestra regla, pero no para medir, solo para hacer líneas rectas y unir puntos). Además, existen penas criminales por marcar la vara que se ocupa para dibujar, por tanto, nadie si quiera lo intenta.

Como al buen Nicolás le gusta aprender nuevas técnicas, encontró un experto en dibujar con las herramientas de Cmatlandia: el gurú Guwu. El gurú Guwu le enseñó a dibujar algunas figuras con esas herramientas, las cuales el buen Nicolás escribió en su bitácora como sigue.

Ej 1. Construya un segmento de largo $5\,cm$.

Solución:

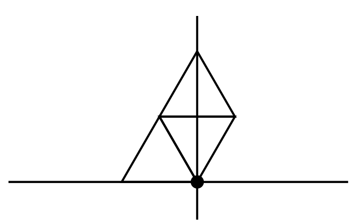
Primero, dibuje una recta con la vara. En la recta marque un punto (que será uno de los extremos del segmento) y ubique el triángulo como en la figura. Luego, marque el otro de los vértice que toca la recta y nuevamente coloque el triángulo utilizando el punto como uno de los vértices del triángulo. Si continua este proceso 3 veces más, logrará haber marcado 5 segmentos de largo $1\,cm$ uno al lado del otro; los que forman un gran segmento de largo $5\,cm$.



■

Ej 2. Construya una perpendicular a una recta que pase por un punto de la recta.

Solución: Marque un triángulo de forma que uno de sus vértices coincida con el punto de la recta y el lado, cuyo extremo es el vértice escogido, coincida con la recta. Luego, marque dos triángulos adyacentes al anterior, como muestra la figura. Y, para finalizar, trazar la recta que pasa por el vértice superior del triángulo construido más arriba y el punto por el que debe pasar la perpendicular.



Ahora, la construcción es correcta. ¿Por qué?

■

El buen Nicolás, no demoró mucho en darse cuenta de la razón, e inmediatamente la anotó en su bitácora.

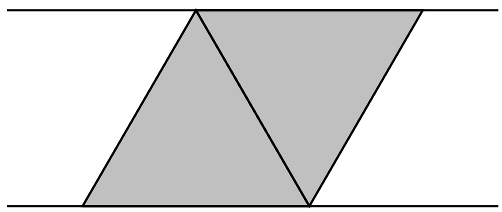
Lamentablemente, de vuelta a Chile, el buen Nicolás perdió su bitácora en la aduana de Cmatlandia. Pero, justo antes de subirse al avión, un policia le devolvió la bitácora; aunque lamentablemente había perdido varias páginas de ella.

Ustedes deben ayudar a reconstruir la bitácora del buen Nicolás, utilizando solo las herramientas de Cmatlandia (un triángulo equilátero de lado $1\,cm$ y una vara que no se puede marcar) y, a medida que avance en la prueba puede ocupar el cómo hacer ciertas construcciones anteriores, incluso si ustedes no han podido justificarlas.

P1. Dada una recta, construya alguna paralela a dicha recta.

Solución:

Apoyamos el triángulo sobre la línea y dibujamos su contorno; luego apoyamos de nuevo el triángulo sobre el trazo de alguno de sus lados. Así, obtenemos un rombo formado por el pegado de ambos triángulos, por lo que el lado opuesto al que está sobre la recta es una paralela a la misma.



■

P2. Indique cómo construir una perpendicular a una recta desde un punto fuera de ella.

Solución:

Si el punto está cerca, colocamos el triángulo como muestra la figura, dos veces; luego, usando las marcas del triángulo sobre la línea podemos "reflejar" la construcción al otro lado, y esencialmente lo que hicimos fue reflejar el punto. Al unirlos obtenemos la perpendicular. Si no estamos cerca, dado que ya sabemos trazar paralelas, podemos hacer tantas como sea necesario para poder acercarnos al punto; y, una vez cerca (a una distancia tal que al colocar un triángulo sobre una de las paralelas el punto queda en uno de sus lados), podemos replica el proceso anterior.

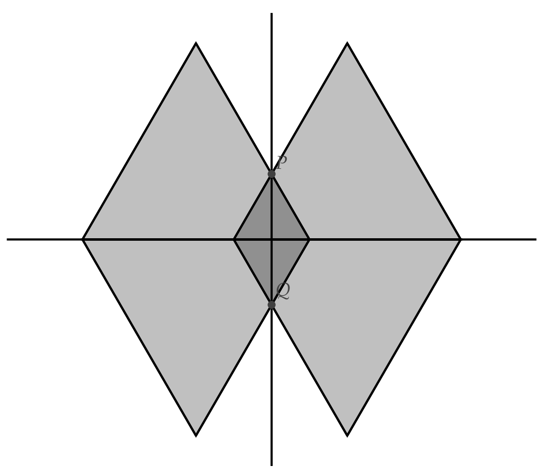


Figura 1: Considere que P es el punto por el cual debe pasar la perpendicular.

■

P3. Sabiendo que se puede construir una perpendicular a una recta desde un punto fuera de ella, indique qué construcción permite crear una paralela a una recta desde un punto fuera de ella.

Solución:

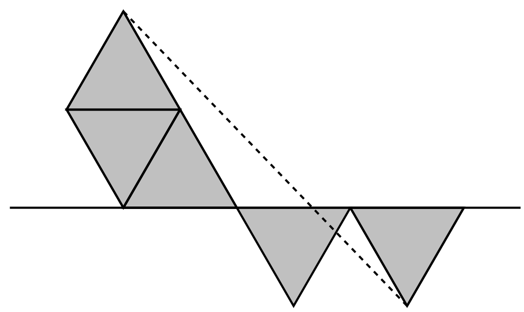
Primero trazamos la perpendicular a dicho punto; luego el ejemplo 2 nos permite construir una perpendicular a dicha perpendicular, por lo que obtenemos una paralela.

■

P4. Indique cómo se debe construir un segmento de largo $\frac{2}{3}\,cm$.

Solución:

Primero construimos un segmento de largo $1\,cm$ utilizando el triangulito; luego, la siguiente construcción nos da un triángulo de lado $\frac{2}{3}\,cm$, por el Teorema de Thales sobre la recta original en la que se colocó el triángulo para medir $1\,cm$.

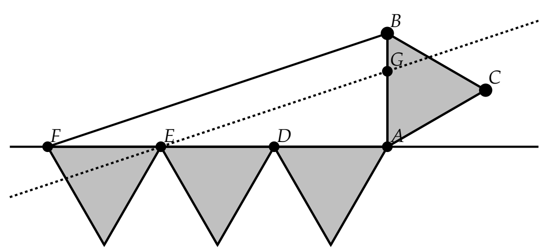


■

P5. Indique cómo se debe construir un segmento de largo $n\,cm$, ($n \in \mathbb{Q}^+$).

Solución:

En general, es repetir la construcción anterior y utilizar nuevamente el Teorema de Thales. O, bien, se puede construir algo como lo siguiente:



En ésta, no importa si los lados de los triángulos equiláteros forman un ángulo recto. Lo que realmente importa es que $\overline{BF}$ es paralela a $\overline{EG}$.

■

P6. Indique un proceso para poder determinar un punto que esté justo en la mitad de un segmento dado.

Solución:

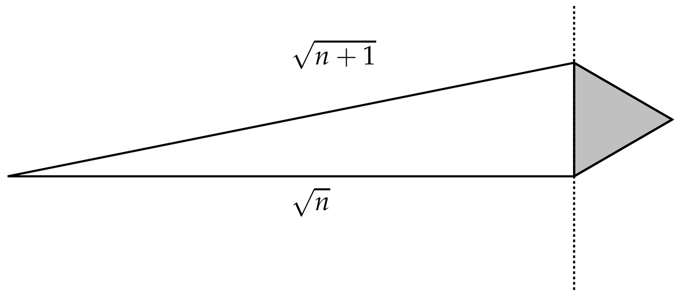
La misma solución de arriba permite bisecar un segmento arbitrario.

■

P7. Si tiene una línea de largo $\sqrt{n}$, describa cómo construir una línea de largo $\sqrt{n+1}$

Solución:

Tomamos la recta de largo $\sqrt{n}$. En uno de sus extremos, trazamos una perpendicular y colocamos una marca de largo 1 utilizando el triangulito. Así se forma un triángulo rectángulo; esto permite por el Teorema de Pitágoras ver que la hipotenusa mide $\sqrt{n+1}$.

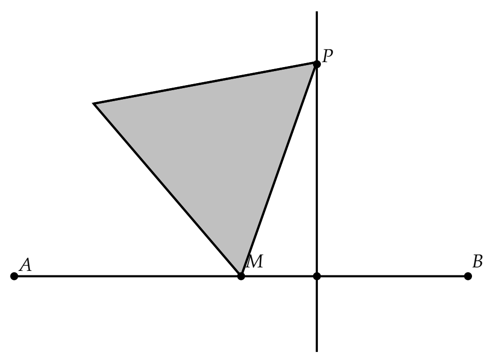


∎

P8. Dadas dos líneas de largo a y b que suman 2, construya una línea de largo $\sqrt{ab}$.

Solución:

Pegamos los dos segmentos (formando AB), y encontramos su punto medio M. Desde el punto de pegado, trazamos la perpendicular, y colocamos el triángulo equilátero con un vértice en M, y otro sobre la perpendicular, P. Acá es claro que $AM = MB = MP = 1$ por construcción; así, el ABP está inscrito en una semicircunferencia, y por tanto el Teorema de Euclides nos da que la perpendicular mide $\sqrt{ab}$.

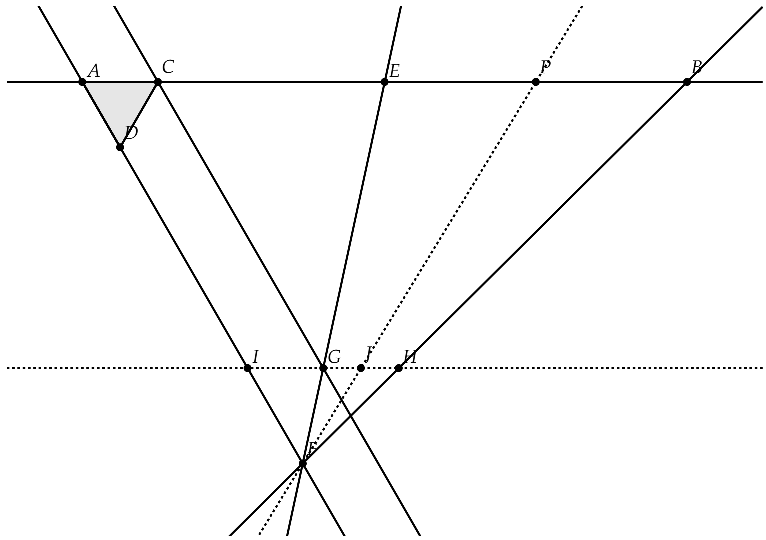


∎

P9. Dadas dos líneas de largos a y b, construya una línea de largo $\sqrt{ab}$.

Solución:

La idea acá es utilizar Thales para transformar el problema en el anterior.



Para realizar la construcción, se realizó:

- Se inicia con el segmento $\overline{AB}$ de largo $a+b$, donde P es el punto que divide a ambos segmentos (el de medida a y b)
- Se marca el punto medio de $\overline{AB}$, al que llamaremos E
- Se traza una línea en $60°$ a partir de A (para lo que se puede ocupar el triángulo)
- Se elige un punto en la línea de $60°$, al que llamaremos F, y se une con el punto medio (E). Además, se traza la línea que une F con B.
- Se traza una paralela a $\overline{AB}$ que pasa por C (que es otro de los vértices del triángulo utilizado antes). Se marca el punto G, que es la intersección de la línea del punto medio(E) y ésta paralela (que pasa por C);
- Se traza una paralela por G, las que determinan los punto I, J y H como intersección con las otras rectas que pasan F. Ahora bien, $\overline{IH}$ tiene largo $2\,cm$.

Por tanto, podemos ocupar la construcción de la media geométrica en este segmento considerando J como el punto que divide a los segmentos. Luego, obtendremos la media geométrica entre $\overline{IJ}$ y $\overline{JH}$, que son segmentos proporcionales a los que se definen sobre $\overline{AB}$ (por Thales). Intencionamos que la construcción de la media geométrica sea hacia el interior del triángulo ABF. Luego, trazamos una recta por el punto I y el extremo que no está en $\overline{IH}$ de la media geométrica(a ese punto llamaremos L). Y se traza una paralela a $\overline{HL}$ que pase por P. Luego, el punto de intersección entre la recta que pasa por L y la paralela define la media geométrica buscada.

■

P10. Dada una línea de largo $a\,cm$, indique cómo se puede construir una línea de largo $\sqrt{a^2+1}\,cm$.

Solución:

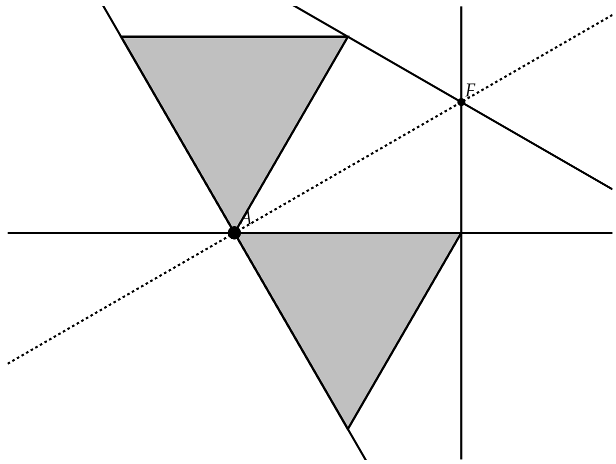
Es esencialmente la misma construcción del segmento de longitud $\sqrt{n+1}$.

■

P11. Indique una forma de conseguir bisecar (dividir a la mitad) un ángulo $0° < x < 180°$.

Solución:

Colocamos un segmento de lado 1 en cada uno de los rayos (desde el vértice del ángulo), y trazamos perpendiculares desde ahí. Así, al unir la intersección de dichas perpendiculares obtenemos una bisectriz.

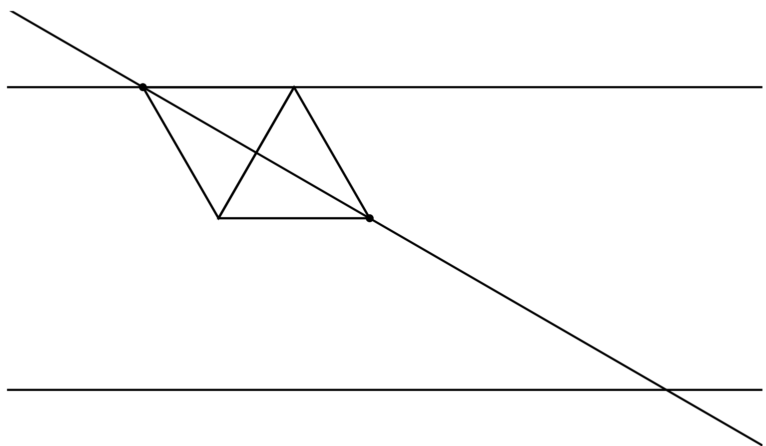


■

P12. Dadas una recta y un punto afuera, indique cómo construir una línea que pase por el punto y forme un ángulo de 30° con respecto a la recta.

Solución:

Una opción es trazar una paralela por dicho punto. Luego, pegamos dos copias del triangulito como muestra la figura; uniendo los puntos marcados obtenemos una recta que cumple lo pedido.



■

P13. Dados los 2 extremos de un segmento, indique cómo se puede dividir el segmento en tres trozos de la misma medida.

Solución:

Esencialmente lo mismo de antes para obtener segmentos de largo $n \in \mathbb{Q}$.

■

P14. Dados los 2 extremos de un segmento, indique cómo se puede dividir el segmento en n partes de la misma medida ($n \in \mathbb{N}$).

Solución:

Trazar el segmento $\overline{AB}$; por el punto B trazar una perpendicular al segmento. A partir de ese punto colocar n triángulos de lado 1; por el punto extremo del último triangulo (en la parpendicular) que llamaremos C

trazar una recta que lo una con A; por cada vértice de los triángulos usados pasar una paralela a $\overline{AC}$ que corte al segmento $\overline{AB}$. De esta forma hemos dividido el segmento en n segmentos de igual longitud.

$\blacksquare$

P15. Indique cómo construir un segmento de largo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solución:

Tomamos uno de largo $\sqrt{5}$ (se puede armar un triángulo rectángulo de catetos 2 y 1; Pitágoras da hipotenusa que mide $\sqrt{5}$). Luego, le agregamos un segmento de largo 1 al final y tomamos el punto medio. Así, obtenemos lo pedido.

$\blacksquare$

P16. Indique cómo construir un cuadrado de lado 1.

Solución:

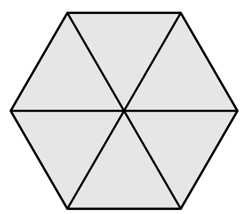
Construimos un segmento de largo 1 con el triángulito. En sus dos extremos, trazamos perpendiculares. Marcamos un largo 1 en cada uno, y luego unimos todo.

$\blacksquare$

P17. Indique cómo construir hexágono de lado 1 cm.

Solución:

Pegamos seis triangulitos como muestra la figura.



$\blacksquare$

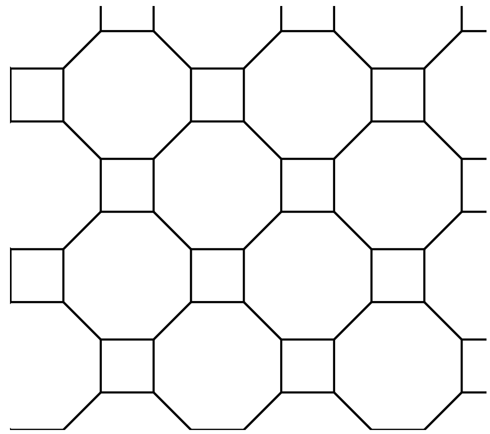
P18. Indique cómo construir un octágono regular de lado 1 cm.

Solución:

Trazamos una recta y tomamos AB de largo uno en ella. Trazamos las perpendiculares desde A y B, y bisectamos dichos ángulos; así, obtenemos rectas que forman ángulos de 135° con respecto a AB. Marcamos segmentos de largo 1 en ellos, y así llevamos 3 de los lados. Repetimos posteriormente hasta hacer los 8.

$\blacksquare$

P19. ¿Es posible construir el siguiente teselado?



Solución:

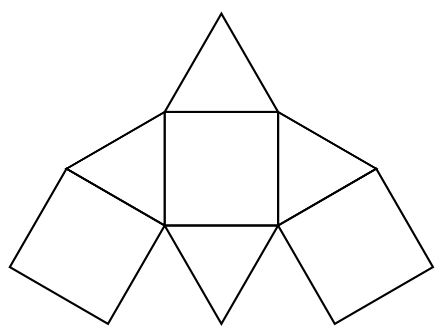
Sí, podemos construir octágonos y cuadrados utilizando nuestras herramientas.

■

P20. Indique cómo construir un dodecágono de lado 1 cm.

Solución:

Una opción es la siguiente figura.

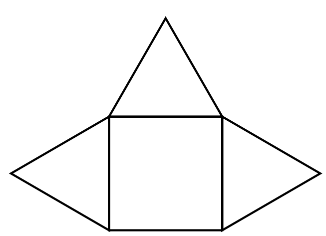


■

P21. Indique cómo construir un polígono de 7 lados con todos sus lados del mismo largo.

Solución:

Una opción es la siguiente figura.



■

P22. Indique cómo construir un polígono regular de 24 lados.

Solución:

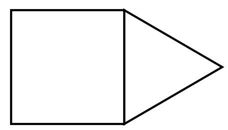
Por algún problema anterior, sabemos construir un hexágono regular de lado 1 cm, y sea O su centro. Por la construcción es claro que tiene radio 1 cm. En cada lado, trazamos la perpendicular desde O, y marcamos una distancia de lado 1 cm desde O. Así, obtenemos seis vértices nuevos, y obtenemos un polígono de 12 lados regular. Repitiendo, obtenemos uno de 24 lados regular.

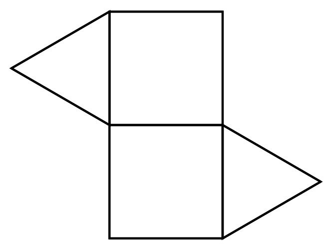
■

P23. Indique cómo se debe construir un polígono de n lados con todos sus lados del mismo largo.

Solución:

Basta considerar los siguientes polígonos; estos van dando familias que cumplen lo pedido





■

P24. Dadas dos rectas que pasan por un punto A, y un punto C que no pertenece a ninguna de las rectas, indique cómo construir un paralelogramo $ABCD$, de manera que dos de los lados del mismo estén sobre las dos rectas.

Solución:

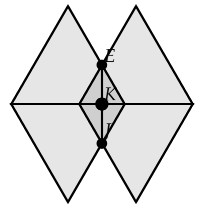
Trazamos desde C, rectas paralelas a las rectas dadas; esto forma un paralelogramo.

■

P25. Dado un segmento de largo $a < \frac{\sqrt{3}}{2}\,cm$, indique cómo construir un segmento de largo $2a\,cm$.

Solución:

Se traza una perpendicular en un extremo del segmento. Luego, se pone un triángulo con un lado en la perpendicular y que otra arista toque el otro extremo del segmento original. Lo que tiene sentido, ya que el segmento mide menos que la altura del triángulo que ocupamos para dibujar. Se repite lo mismo pero hacia el otro lado. Y, utilizando los vértices de los triángulos que se dibujaron, se refleja la figura.

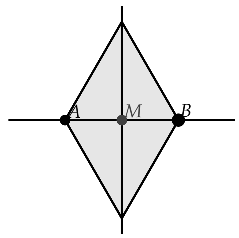


■

P26. Indique cómo se puede dibujar un segmento de largo $\frac{1}{2}\,cm$.

Solución:

Podemos marcar un segmento de largo $1\,cm$ con el lado de un triángulo. Luego, podemos colocar el triángulo como si estuviese reflejado. Unimos los vértices superior e inferior, de forma que el punto que se consigue en la recta original determina un segmento que mide $\frac{1}{2}\,cm$.



■

P27. Indique cómo se puede dibujar un segmento de largo $\frac{3}{4}\,cm$.

Solución:

Si se ocupa la construcción que permite dividir un trazo a la mitad en un trozo que ya mide $\frac{1}{2}\,cm$, se puede conseguir $\frac{1}{4}\,cm$. Lo que unido a un segmento que mida $\frac{1}{2}\,cm$, se tiene un segmento que mide $\frac{3}{4}\,cm$.

■

Preguntas por nivel

Pregunta	Básica	Menor	Mayor
1	4	2	2
2	2	2	4
3	2	2	3
4	2	2	3
5	3	2	4
6	2	3	4
7	2	3	
8	3	4	
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			