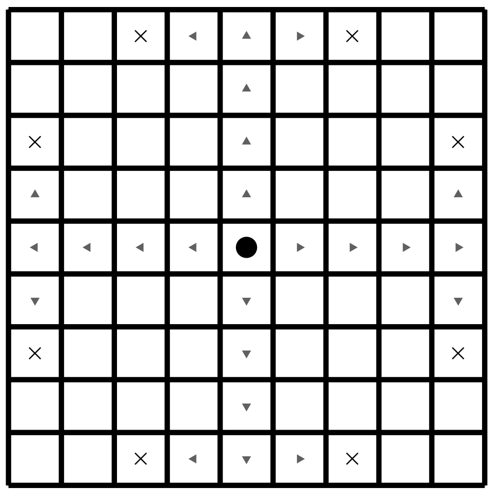
Campeonato Escolar de Matemáticas

XVI

Segunda Fecha
12 de Mayo de 2018
Soluciones
Individual

Primer Nivel

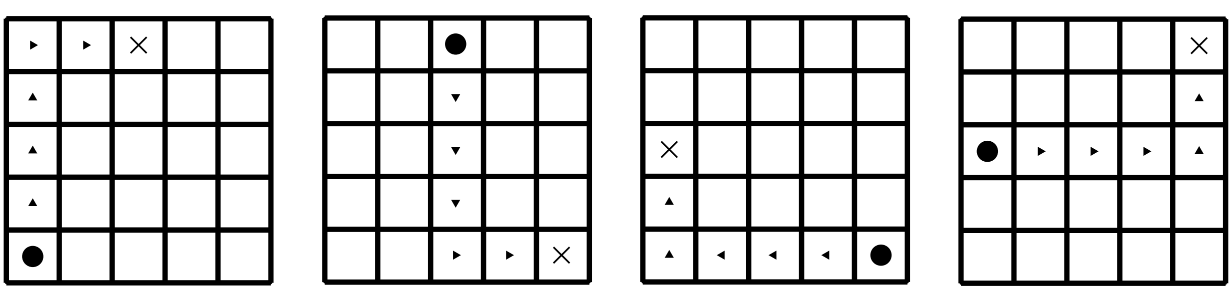
1 Se tiene un tablero de $n \times n$ con $n \geq 2$ natural. En una esquina del tablero se encuentra una pieza (en negro) que se mueve de la siguiente manera: 4 casillas en una dirección y 2 casillas en una dirección perpendicular. En el ejemplo, si la pieza se ubica en el centro (en un tablero de 9×9) podemos mover hacía las casillas con una X.



1. ¿Es posible para la pieza, llegar a la esquina opuesta si $n = 2017$?
2. ¿Es posible para la pieza, llegar a la esquina opuesta si $n = 2018$?

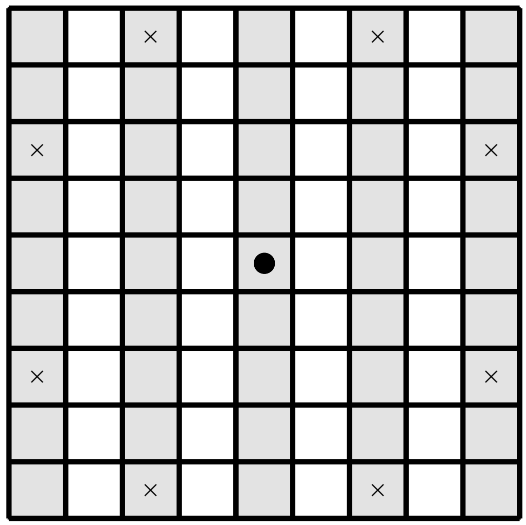
Solución

1. Notamos que podemos avanzar 4 casillas diagonalmente con los siguientes pasos:



Además, el tablero es de 2017×2017, así tenemos que avanzar 2016 casillas diagonalmente. Llamando movida a los 4 pasos anteriores, basta realizar $2016/4 = 504$ movidas para llegar a la esquina opuesta.

2. No se puede, ya que si coloreamos alternadamente las columnas del tablero de blanco y negro tenemos que desde una casilla negra, solo se puede llegar a otra negra. Análogo cuando se parte de una casilla blanca, como se muestra en la imagen.



Luego si el tablero es de 2018×2018 tenemos que una esquina es blanca y la opuesta es negra.

2 En el Campeonato Escolar de Matemáticas de Pelotillehue participan 450 entusiastas escolares, de los cuales 250 son hombres. El presidente del comité organizador, *Garganta de Lata*, da los siguientes resultados:

- 300 escolares alcanzaron notas *Muy Bueno*.
- De los anteriores, 160 son hombres.
- 280 escolares participan además en el Campeonato de Rayuela, de los cuales 180 son hombres y 170 (entre hombres y mujeres) alcanzaron notas *Muy Bueno*.
- Entre los que participan en rayuela y tienen notas *Muy Bueno*, 150 son hombres.

Apenas termina el discurso de Garganta de Lata, el Organizador Nacional del Campeonato exclama *¡Otra vez los datos de Garganta son erróneos!*. Indique por qué los datos de Garganta de Lata tienen fallas.

Solución

El número de estudiantes que no son hombres, no tienen nota *Muy bueno* y no participan en el campeonato de rayuela es, según los datos, -20, lo que no puede ser.

Segundo Nivel

1 Se tiene en un pizarra la suma

$$\begin{array}{rccccc} & & C & M & A & T \\ + & & M & A & T & E \\ \hline & M & E & D & I & A \end{array}$$

donde cada letra representa un dígito y, cada una de estas, no puede ser 0. ¿Cuál es la suma?

Solución

Notar que la máxima suma es $9999 + 9999 = 19998$. Luego, M es a lo más 1 y, como no puede ser 0, M debe ser 1.

$$\begin{array}{rccccc} & & C & 1 & A & T \\ + & & 1 & A & T & E \\ \hline & 1 & E & D & I & A \end{array}$$

Como $C + 1$ debe ser mayor o igual a 10 y E no puede ser 0, se concluye que $C = 9$, $E = 1$ y $1 + A \geq 10$. Análogamente, $D = 1$, $A = 9$ y $A + T \geq 10$.

$$\begin{array}{rccccc} & & 9 & 1 & 9 & T \\ + & & 1 & 9 & T & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & I & 9 \end{array}$$

Finalmente, como $T + 1 = 9$ (no es posible tener 19), $T = 8$. Con esto, $I = 7$ y la suma queda:

$$\begin{array}{rccccc} & & 9 & 1 & 9 & 8 \\ + & & 1 & 9 & 8 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 7 & 9 \end{array}$$

2 En un torneo de fútbol participan 4 equipos. Cada par de equipos distintos se enfrentan dos veces, una vez en el estadio de cada uno. Cada equipo recibe 3 puntos por partido ganado, 1 punto por partido empatado y 0 puntos por partido perdido.
Pruebe que la suma de los puntajes de los cuatro equipos es igual a 24 más el número de partidos que no terminaron empatados.

Solución

Sean S la suma de los puntajes de los cuatro equipos, N la cantidad de partidos que no terminaron empatados y E la cantidad de partidos que terminaron empatados. Cada partido que no terminó empatado aporta con tres unidades al valor de S, y cada partido que terminó empatado aporta con dos unidades al valor de S. Es decir, $S = 3N + 2E$. Por otra parte, fueron disputados 12 partidos, entonces $N + E = 12$. Reemplazando $E = 12 - N$ en la igualdad anterior, se tiene $S = 3N + 2(12 - N) = 24 + N$.

Tercer Nivel

1 Determine la cantidad de ternas (d, d', n), donde d y d' son dígitos y $n \geq 10$ es un número entero positivo, tales que existe un triángulo cuyos lados miden d, d' y n.

Solución

Claramente $n > \text{máx}\{d, d'\}$, entonces la existencia del triángulo es equivalente a la desigualdad triangular:

$$d + d' > n$$

Vamos a contar las ternas (d, d', n) para cada valor posible de $d + d'$. Como:

$$10 \leq n < d + d' \leq 18,$$

entonces $11 \leq d + d' \leq 18$.

- Si $d + d' = 18$, entonces existe 1 opción para (d, d') y 8 para n, luego existen $1 \cdot 8 = 8$ ternas.
- Si $d + d' = 17$, entonces existe 2 opciones para (d, d') y 7 para n, luego existen $2 \cdot 7 = 14$ ternas.
- Si $d + d' = 16$, entonces existe 3 opciones para (d, d') y 6 para n, luego existen $3 \cdot 6 = 18$ ternas.
- Si $d + d' = 15$, entonces existe 4 opciones para (d, d') y 5 para n, luego existen $4 \cdot 5 = 20$ ternas.
- Si $d + d' = 14$, entonces existe 5 opciones para (d, d') y 4 para n, luego existen $5 \cdot 4 = 20$ ternas.
- Si $d + d' = 13$, entonces existe 6 opciones para (d, d') y 3 para n, luego existen $6 \cdot 3 = 18$ ternas.
- Si $d + d' = 12$, entonces existe 7 opciones para (d, d') y 2 para n, luego existen $7 \cdot 2 = 14$ ternas.
- Si $d + d' = 11$, entonces existe 8 opciones para (d, d') y 1 para n, luego existen $8 \cdot 1 = 8$ ternas.

Sumando los resultados parciales, se tiene que existen 120 ternas (d, d', n).

2 ¿Cuántos divisores positivos de 18^{2017} no dividen a 24^{2017} ?

Solución

Escribamos los números en su descomposición prima:

$$18^{2017} = (2 \cdot 3^2)^{2017} = 2^{2017} \cdot 3^{4034}$$
$$24^{2017} = (2^3 \cdot 3)^{2017} = 2^{6051} \cdot 3^{2017}$$

Así, un divisor de 18^{2017} es de la forma:

$$2^a \cdot 3^b \quad \text{con} \quad 0 \leq a \leq 2017 \quad \text{y} \quad 0 \leq b \leq 4034$$

Y un divisor de 24^{2017} es de la forma:

$$2^p \cdot 3^q \quad \text{con} \quad 0 \le p \le 6051 \quad \text{y} \quad 0 \le q \le 2017$$

Así, para que no divida a 24^{2017} necesitamos que $b > 2017$. Luego, los divisores que buscamos son:

$$2^a \cdot 3^b \quad \text{con} \quad \underbrace{0 \le a \le 2017}_{2018\ op.} \quad \text{y} \quad \underbrace{2018 \le b \le 4034}_{2017\ op.}$$

Es decir, tenemos a $2017 \times 2018 = 4070306$ números que cumplen lo pedido.

Cuarto Nivel

1 Dado un número A de dos dígitos, ambos distintos de 0, se define B como el número obtenido al escribir los dígitos de A en orden inverso. Encuentre el mayor valor posible de

$$\left| \frac{A}{B} - 1 \right|$$

Solución

Solución 1

Por simplicidad, vamos a escribir $E = \left| \frac{A}{B} - 1 \right|$.

Si $A \le B$, entonces $0 < \frac{A}{B} \le 1$, entonces $-1 < \frac{A}{B} - 1 \le 0$. Podemos concluir que $E = 1 - \frac{A}{B}$, entonces $E < 1$. De esta manera no se maximiza E porque, por ejemplo, si $A = 31$, entonces $E > 1$. Por lo tanto, para maximizar E debemos exigir $A > B$ y, con esta desigualdad, tenemos $\frac{A}{B} > 1$, entonces $E = \frac{A}{B} - 1$.

Observemos que maximizar E es equivalente a maximizar $F = E + 1 = \frac{A}{B}$.

Sean d y u los dígitos de las decenas y unidades, respectivamente, de A. Entonces $A = 10d + u$ y $B = 10u + d$. Si $A = 91$, entonces $F = \frac{91}{19}$. Vamos a considerar la siguiente desigualdad (para la cual ya tenemos una solución con $(d, u) = (9, 1)$):

$$\begin{aligned} F &\ge \frac{91}{19} \\ \frac{10d + u}{10u + d} &\ge \frac{91}{19} \\ 19(10d + u) &\ge 91(10u + d) \\ 190d + 19u &\ge 910u + 91d \\ 99d &\ge 891u \\ d &\ge 9u \end{aligned}$$

Esto sólo se cumple si $(d, u) = (9, 1)$. entonces la desigualdad $F \ge \frac{91}{19}$ sólo se cumple para $A = 91$. Por lo tanto, el mayor valor posible para F es $\frac{91}{19}$ y el mayor valor posible para E es $\frac{91}{19} - 1 = \frac{72}{19}$.

Solución 2

Se definen E, F, d y u como en la solución anterior. De la misma manera, observamos que debemos exigir $A > B$ (lo que es equivalente con $d > u$) y que maximizar E es equivalente a maximizar F.
Si (d, u) y (d', u') son dos pares de dígitos no nulos, entonces las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$\begin{aligned}
F(d,u) &> F(d',u') \\
\frac{10d+u}{10u+d} &> \frac{10d'+u'}{10u'+d'} \\
(10d+u)(10u'+d') &> (10d'+u')(10u+d) \\
100du' + 10dd' + 10uu' + ud' &> 100ud' + 10dd' + 10uu' + du' \\
99du' &> 99ud' \\
\frac{d}{u} &> \frac{d'}{u'}
\end{aligned}$$

Es decir, mientras mayor sea la razón $\frac{d}{u}$, mayor será F (esto se ve reflejado también en la igualdad:

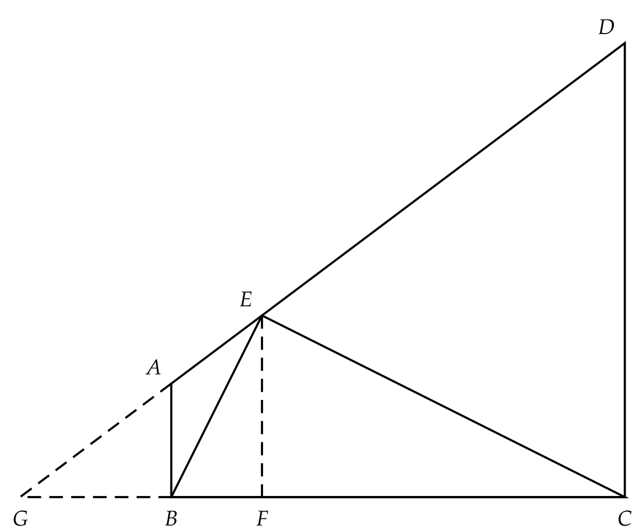
$$F(d,u) = \frac{10d+u}{10u+d} = \frac{10 \cdot \frac{d}{u} + 1}{10 + \frac{d}{u}} = 10 - \frac{99}{10 + \frac{d}{u}}$$

porque, al aumentar $\frac{d}{u}$, también aumenta F). Por lo tanto, el mayor valor posible para F (y también para E) se alcanza cuando $(d, u) = (9, 1)$ y, en este caso, $E = \frac{72}{19}$.

2 Sea $ABCD$ un cuadrilátero con $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y $\overline{BC} \perp \overline{CD}$. Sea $E \in \overline{AD}$ un punto tal que $\overline{BE} \perp \overline{CE}$. Si $AB = 5$ y $BC = CD = 20$, encuentre el área del triángulo $\triangle BCE$.

Solución

Sea $F \in \overline{BC}$ un punto tal que $\overline{EF} \perp \overline{BC}$. Sea G el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Sean $BF = x$ y $BG = y$, entonces $CF = 20 - x$.



Por la semejanza de triángulos $\triangle GBA \sim \triangle GCD$, se tiene:

$$\frac{y}{5} = \frac{y+20}{20} \Rightarrow 20y = 5(y+20) \Rightarrow 4y = y+20 \Rightarrow 3y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{3}$$

Por la semejanza de triángulos $\triangle GBA \sim \triangle GFE$, se tiene

$$\frac{20/3}{5} = \frac{\frac{20}{3}+x}{EF} \Rightarrow 4 = \frac{20}{5} = \frac{20+3x}{EF} \Rightarrow EF = \frac{20+3x}{4}$$

Por el Teorema de Euclides en el triángulo rectángulo $\triangle BCE$: $EF^2 = BF \cdot CF$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{(20+3x)^2}{16} &= x(20-x) \\
(20+3x)^2 &= 16x(20-x) \\
400+120x+9x^2 &= 320x-16x^2 \\
400-200x+25x^2 &= 0 \\
16-8x+x^2 &= 0 \\
(4-x)^2 &= 0,
\end{aligned}$$

entonces $x = 4$, luego $EF = \dfrac{20+3\cdot 4}{4} = 8$ y, por lo tanto: Área$(\triangle BCE) = \dfrac{BC \cdot EF}{2} = \dfrac{20 \cdot 8}{2} = 80$.