XVI

Cuarta Fecha
4 de Agosto de 2018
Soluciones
Grupal

Reacciones en Cadena

El equipo académico del CMAT se reúne, normalmente, todos los días sábados para crear problemas, corregir pruebas y todo lo relacionado a la labor académica de tan magna competencia. Uno de esos sábados, y ya que había que publicar los resultados de manera urgente, el equipo se quedó trabajando hasta bien adentrada la noche. Resultó que ese día la agencia **CENSURADO** envió al agente **CENSURADO** a las oficinas de Cmat a solicitar apoyo para **CENSURADO**. El agente golpeó la puerta, aunque extrañados- por lo tarde- abrimos resultó ser **CENSURADO**,que venía en representación de la agencia **CENSURADO**. Nos preguntamos qué haría alguien así en nuestras oficinas. Se disculpó de haber llegado tan tarde (eran las 10:40 p.m.), y de haber estacionado mal su auto, un Volksvagen del año 68. Nos comentó que estaban trabajando en un proyecto **CENSURADO**, en colaboración con **CENSURADO**, y que necesitaban ayuda experta matemática. Por supuesto, nosotros ofrecimos nuestra colaboración, bajo el compromiso que nos permitieran incluir parte de la matemática que usemos con ellos para armar una prueba grupal. Accedió, bajo el compromiso de que pudiera censurar lo que apareciera acá. Así, tenemos esta prueba que resutó de la solicitud de la agencia **CENSURADO** y que sirve para estudiar la matemática asociada a la construción de **CENSURADO**.

El proceso de explosión (1ro-4to)

Para entrar a los detalles del proceso de ensamblado **CENSURADO**, debemos entender cómo funciona, a todo detalle, el proceso de reacción o explosión en cadena. Este es un proceso sistemático y detallado, que para entenderlo bien hay que recordar qué elementos componen una **CENSURADO**. Los más utilizados, principalmente, son:

- U, el Uranita.
- Q, la Quirita.
- B, la Bonobonnita.
- K, la Kriptonita.
- W, la uWuita.

Un átomo puede estar **desactivado** o **activado**. Un elemento desactivado se encuentra estable, mientras que uno activado está por estallar. Cuando un elemento estalla, desaparece y activa a algunos elementos a sus alrededores. Para marcar un elemento activado, le pondremos un asterisco.

Específicamente, los átomos al explotar activan las siguientes casillas:

- Una Uranita activa a la casilla que tiene a su derecha y la que tiene a su izquierda.
- Una Quirita activa la que tiene arriba y la que tiene abajo.
- Una Bonobonnita activa a las cuatro casillas que tiene en diagonal.
- Una Kriptonita activa a la casilla que está dos posiciones a la derecha, y la que está dos a la izquierda.
- Una uWuita activa a la casilla que está dos posiciones hacia arriba, y la que está dos posiciones hacia abajo.

Por ejemplo, supongamos que tenemos la configuración de abajo

Q	B	U	B
K	K	K	K
B	$\mathbf{U}^\star$	W	Q
Q	$\mathbf{W}^\star$	W	$\mathbf{U}^\star$

Una vez que estallan las partículas activadas, obtenemos

Q	B	U	B
K	$\mathbf{K}^\star$	K	K
$\mathbf{B}^\star$		$\mathbf{W}^\star$	Q
Q		$\mathbf{W}^\star$	

La siguiente reacción o explosión provoca

Q	B	$\mathbf{U}^\star$	B
K		$\mathbf{K}^\star$	$\mathbf{K}^\star$
			Q
Q			

La próxima queda

Q	$\mathbf{B}^\star$		$\mathbf{B}^\star$
$\mathbf{K}^\star$			
			Q
Q			

Y así obtenemos

Q			
			Q
Q			

Esta configuración es estable, y se requirieron 4 explosiones para estabilizarlo.

Problema 1 Desarrolle el proceso explosivo de la siguiente configuración. ¿Cuántas explosiones se necesitan para estabilizarlo?

B	Q	$\mathbf{B}^\star$	W	U
	$\mathbf{B}^\star$	K	K	$\mathbf{B}^\star$
U	Q		W	K
Q	W	U		B
K	$\mathbf{W}^\star$		$\mathbf{B}^\star$	U

Solución:

Luego de la primera explosión, obtenemos

$\mathbf{B}^\star$	Q		$\mathbf{W}^\star$	U
		K	$\mathbf{K}^\star$	
$\mathbf{U}^\star$	$\mathbf{Q}^\star$		$\mathbf{W}^\star$	K
Q	W	$\mathbf{U}^\star$		$\mathbf{B}^\star$
K				U

En la segunda, resulta

	Q			U
		K		
				K
Q	**W***			
K				U

Por último, explora el **W***, y obtenemos

	Q			U
		K		
				K
Q				
K				U

que es estable, y se demora en total tres explosiones en estabilizarse.

■

Problema 2 En el siguiente tablero, determine cómo queda luego de explotar hasta que queda estable.

B	**B***	K	**U***	W
Q	W	K	K	K
B	U	W	U	W
Q	K	K	W	K
U	B	Q	U	U

Solución:

Hagamos los pasos. Al explotar, obtenemos

B		**K***		**W***
Q*	W	**K***	K	K
B	U	W	U	W
Q	K	K	W	K
U	B	Q	U	U

Luego, desaparecen las estalladas y nos queda

B*				
	W		K	**K***
B*	U	W	U	**W***
Q	K	K	W	K
U	B	Q	U	U

En el turno siguiente nos queda

	W⋆		K	
	U	W	U	
Q	**K**⋆	K	W	K
U	B	Q	U	**U**⋆

Luego, obtenemos

			K	
	U	W	U	
Q		K	**W**⋆	K
U	B	Q	**U**⋆	

Posteriormente, resulta

			K⋆	
	U	W	U	
Q		K		K
U	B	**Q**⋆		

La siguiente resulta

	U	W	U	
Q		**K**⋆		K
U	B			

Ahora explota el K central y obtenemos

	U	W	U	
Q⋆				**K**⋆
U	B			

En el siguiente nos queda

	U	W	U	
U⋆	B			

Ahora el U activado nos da

	U	W	U	
	B*			

Y por último explota el B, resultando

	U	W	U	

lo que concluye lo pedido: uwu; que es estable.

■

Problema 3 Se tiene el siguiente tablero

B	W	W	U	B
U	U	W	B	Q
B	B	B	Q	Q
K	U	K	B	K
U	K	B	K	U

Alguien activó algunas casillas, sin que nostros mirásemos e hizo explotar el tablero dos veces. Al final, llegamos y quedaba lo siguiente:

B	W	W	U	B
U	**U***		**B***	**Q***
B	B		Q	
K*	**U***			**K***
U	K		**K***	

¿Qué casillas fueron activadas al inicio?

Solución:

Nombraremos las casillas como se muestra acá abajo, por comodidad

		(1)		
		(2)		(6)
		(3)	(5)	
		(4)		(7)

Por supuesto, consideramos sólo esas casillas, porque son las únicas que van a estallar en esos dos turnos. Nuestro trabajo es determinar cuáles estallaron en el primer turno y cuáles en el segundo.

Notemos que (2) no puede haber estallado en el primer turno. De haberlo hecho, luego del primer turno la casilla U que está arriba a su izquierda habría estallado, y no estaría activa. De la misma manera, (3), (4), (6) y (7) deben haber estallado en el segundo turno.

Veamos ahora que (5) debe haber estallado en el primer turno. Sabemos que (7) debe haber explotado en el segundo. Por lo tanto, alguna casilla activada al inicio debe haberla encendido. Y sólo (5) apunta hacia ella. De la misma manera, (1) debe haber sido prendida en el primer turno, para que (3) sea activada. Así, el tablero fue, inicialmente, activado de la siguiente forma:

B	W	W	U	B
U	U	**W***	B	Q
B	B	B	Q	Q
K	U	K	**B***	K
U	K	B	K	U

Esto concluye lo pedido.

■

Problema 4 Considere un tablero de 3×3 lleno, y con sólo una casilla activa. ¿Cuál es la menor cantidad de turnos en la que podría ser vaciado completamente? De un ejemplo de un tablero que alcance dicho mínimo.

Solución:

Notemos que luego de un turno, desaparece sólo la casilla original, y a lo más activó a otras cuatro. Así, al segundo turno a lo más han desaparecido cinco casillas. Por ello, necesitamos al menos tres turnos para que explote completamente. Y de hecho, en tres se puede: si consideramos el tablero

Q	B	U
B	**B***	B
U	B	Q

Luego del primer paso, obtenemos

Q*	B	**U***
B		B
U*	B	**Q***

Al finalizar el segundo, alcanzamos

	B*	
B*		**B***
	B*	

Así, luego del tercero el tablero queda vacío. Por ello, el mínimo es tres.

■

Problema 5 Se tiene un tablero de 8×8 lleno sólo con átomos B, K y W, sin casillas vacías, y al inicio hay sólo una casilla activada. Demuestre que no es posible vaciar todo el tablero.

Solución:

Pintemos el tablero de dos colores, como un tablero de ajedrez. Notemos que cuando estalla una B, K o W, activa sólo casillas del mismo color. Así, si partimos sólo con una casilla activada, sólo vamos a poder explotar casillas del mismo color, y por tanto no vamos a poder vaciarlo entero.

■

Problema 6 Se sabe que en el siguiente tablero X, Y, Z son átomos activos

U	W	U	K	**Q***
B	**X***	Q	**W***	K
W	W	Q	U	**K***
U	**B***	K	**Y***	**Z***
Q	U	K	K	**K***

Luego de estallar, se obtiene el siguiente tablero

U*	W	**U***	K	
B		Q		**K***
W*	W	**Q***	**U***	
U		K		
Q*	U	**K***	**K***	

Determine cuál (o cuáles) combinación de átomos X, Y, Z permite obtener este tablero.

Solución:

Notemos que cuando explotan todos los átomos salvo los que desconocemos, el tablero queda como

U	W	U	K	
B	**X***	Q		**K***
W*	W	**Q***	U	
U		K	**Y***	**Z***
Q*	U	**K***	K	

Acá nos falta activar cuatro casillas: la esquina superior izquierda, la central superior, el K de más abajo y el U a la derecha del centro. La única posibilidad para activar la esquina es que el X sea una Bonobonita. Así, obtenemos

U*	W	**U***	K	
B		Q		**K***
W*	W	**Q***	U	
U		K	**Y***	**Z***
Q*	U	**K***	K	

Para activar las dos casillas que faltan, hay dos opciones: o usamos una Quirita en Y, o usamos una Bonobonita en Z. Notemos además que no podemos tener una Kriptonita en Z, o una Uranita en Y, ya que activarían una celda que resulta quedar desactivada. Así, para la terna (X, Y, Z) tenemos las combinaciones:

- (B, Q, U)
- (B, Q, B)
- (B, Q, W)
- (B, Q, Q)
- (B, B, B)
- (B, K, B)
- (B, W, B)

De esta manera, hay 7 combinaciones posibles.

■

Problema 7 Tenemos un tablero de 6×6, en el que sólo la mitad de las casillas tienen B, y la otra mitad está vacía, tal y como se muestra abajo

B		B		B	
	B		B		B
B		B		B	
	B		B		B
B		B		B	
	B		B		B

(I) Suponga que originalmente está activada la siguiente casilla

B		B		**B***	
	B		B		B
B		B		B	
	B		B		B
B		B		B	
	B		B		B

¿En cuántos pasos el tablero queda vacío?

(II) Suponga que le dejan elegir qué casilla parte encendida, pero sólo una. ¿Cuál eligiría, de modo que se demore lo menos posible en quedar vacío.

Solución:

(I) Luego de explotar una vez, resulta

B		B			
	B		**B***		**B***
B		B		B	
	B		B		B
B		B		B	
	B		B		B

A la siguiente, obtenemos

B		**B***			
	B				
B		**B***		**B***	
	B		B		B
B		B		B	
	B		B		B

A la tercera explosión queda

B					
	B*				
B					
	B*		**B***		**B***
B		B		B	
	B		B		B

Luego de la cuarta, obtenemos

B*					
B*					
B*		**B***		**B***	
	B		B		B

A la quinta, obtenemos

	B*		**B***		**B***

Y luego el tablero queda vacío, por lo que son necesarias seis explosiones.

(II) La mejor opción es que alguna de las dos centrales parta activada, como se muestra acá

B		B		B	
	B		B		B
B		B		B	
	B		**B***		B
B		B		B	
	B		B		B

Así, luego de explotar queda

B		B		B	
	B		B		B
B		**B***		**B***	
	B				B
B		**B***		**B***	
	B		B		B

A la segunda queda

B		B		B	
	B*		**B***		**B***
B					
	B*				**B***
B					
	B*		**B***		**B***

A la tercera,

B*		**B***		**B***	
B*					
B*					

De esta manera, en la cuarta explosión queda vacío.

■

Problema 8 En un tablero de 5×5, que comienza completamente lleno, ¿cuál es la **mayor** cantidad de turnos que puede demorarse en explotar? De un ejemplo donde se alcance dicho máximo.

Solución:

El máximo es 25, ya que cada vez que pasa un turno no-trivial debe explotar alguna casilla. Se alcanza, por ejemplo, en

Q	U	U	U	**U***
U	U	U	U	Q
Q	U	U	U	U
U	U	U	U	Q
U	U	U	U	U

■

Problema 9 En un tablero de 2018×2018, relleno completamente por sólo un tipo de átomo, ¿es posible que se vacíe completamente, si originalmente se activa sólo una casilla?

Solución:

No: si el tablero tiene solamente U o K, entonces toda la explosión ocurre adentro de una fila; si el tablero tiene solamente Q o W, la explosión ocurre adentro de una columna. Si el tablero tiene solamente B, es un argumento de coloracion: si pintamos el trablero de blanco y negro, como en ajedrez, una casilla negra sólo activa casillas negras, y lo mismo con las blancas. Así, si se enciende una de un color sólo puede apagar a un color, no al otro.

■

Problema 10 Consideremos el siguiente tablero, con 4000 casillas de largo.

B	B	U	Q	B	B	U	Q	...
Q*	B	K	U	Q	B	K	U	...
B	B	U	Q	B	B	U	Q	...

El bloque de las cuatro primeras columas, se repite 1000 veces. Luego de 2018 explosiones, ¿cuántas casillas hay activadas?

Solución:

Veamos cómo va evolucionando. Cuando explota una vez, queda

B*	B	U	Q	B	B	U	Q	...
	B	K	U	Q	B	K	U	...
B*	B	U	Q	B	B	U	Q	...

A la segunda, obtenemos

	B	U	Q	B	B	U	Q	...
	B*	K	U	Q	B	K	U	...
	B	U	Q	B	B	U	Q	...

En la tercera queda

	B	**U***	Q	B	B	U	Q	...
		K	U	Q	B	K	U	...
	B	**U***	Q	B	B	U	Q	...

En la cuarta,

	B*		**Q***	B	B	U	Q	...
		K	U	Q	B	K	U	...
	B*		**Q***	B	B	U	Q	...

Luego de la quinta, tenemos

				B	B	U	Q	...
		K*	**U***	Q	B	K	U	...
				B	B	U	Q	...

Finalmente, luego de la sexta explosión resulta

				B	B	U	Q	...
				Q*	B	K	U	...
				B	B	U	Q	...

Así, luego de seis explosiones volvemos a la situación inicial, corridos cuatro columnas a la derecha. De esta manera, en $2016 = 336 \cdot 6$ turnos, volvemos a la situación inicial. Dos explosiones después, luego de la número 2018, quedamos igual que luego de la segunda, en la que hay sólo una casilla activa. Así, hay solamente una.

■

Las cintas de explosión (7mo-8vo)

Para entrar a los detalles del proceso de ensamblado de **CENSURADO**, debemos entender cómo funciona, a todo detalle, el proceso de explosión en cintas. Una cinta de explosión es una línea larga, que en alguna de sus casillas contiene **CENSURADO**. Estos elementos pueden estar **activados** o **desactivados**. En un mismo instante, sólo puede haber un elemento activado sobre la cinta (que marcaremos colocando un asterisco sobre el símbolo del elemento). Los elementos radioactivos disponibles son

- M, el Mithril, que activa lo que esté 2 casillas a la derecha.
- Y, la Yggdrasilita, que activa lo que esté 1 casilla a la derecha.

- C, la Chiquitolina, que activa lo que esté 1 casilla a la izquierda.
- P, el Plutonio, que activa lo que esté 2 casillas a la izquierda.

El símbolo que acompaña a cada elemento indica qué casilla activará luego de que explote. Por ejemplo, una cinta típica se ve así

P	**M***	Y	Y	C

Acá, el segundo elemento está activo. Una vez que explota, éste activa a la casilla que se encuentra dos puestos a la derecha, es decir, a la Y que se encuentra en la cuarta casilla. De esta manera, luego de explotar obtenemos

P		Y	**Y***	C

Ahora tenemos activado el Y, que al estallar activa a la casilla de su derecha. Al explotar, resulta

P		Y		**C***

Por último, la C de la quinta casilla explota y activa a la de su izquierda. Pero como no hay ninguna, simplemente no se activa ningún otro elemento, y queda como

P		Y		

Así, se necesitaron tres explosiones para que la cinta dejara de explotar.

Problema 1 ¿Cómo ocurre el proceso de explosión de la siguiente cinta?

C	Y	M	**P***	M	C	Y

Solución:

La casilla activada activa al Y:

C	**Y***	M		M	C	Y

Luego, ésta explota y activa al M

C		**M***		M	C	Y

Lo siguiente es que se prende el otro M

C				**M***	C	Y

la que, al estallar, activa el Y del extremo

C					C	**Y***

y al final ésta explota y no activa a nadie más, quedando la que, al estallar, activa el Y del extremo

C					C	

■

Problema 2 La siguiente cinta comienza con todas las casillas desactivadas.

M	P	C	P	M	P	C	Y	M

Si se busca que la cinta se demore lo más posible en explotar, ¿qué casilla activaría para que esto suceda? Lo mismo para que demore lo menos posible

Solución:

Notemos que, si partimos activando la segunda casilla, no se enciende ninguna más. Así, marcaremos esa casilla con un 1, para indicar que sólo se enciende esa. Si hubiésemos prendido la tercera, ésta prende a la segunda, y luego no se prende ninguna más; colocamos un 2 para indicar esto. Repitiendo, obtenemos

M	P	C	P	M	P	C	Y	M
3	1	2	2	5	3	4	2	1

Así, la casilla del medio es la que más se demora, y la segunda y la última son las que se demoran menos.

■

Problema 3 Diremos que una cinta completamente llena y sin ninguna casilla activa, está *encadenada* si cumple lo siguiente: sin importar qué casilla decidimos activar al inicio, se terminan encendiendo todas. Por ejemplo, la cinta

Y	Y	P

está encadenada.

(I) Encuentre una cinta encadenada de largo 5.

(II) Encuentre una cinta encadenada de largo 6.

Solución:

(I) Una opción es

M	C	M	P	C

(II) Una opción es

M	C	M	P	Y	P

■

Problema 4 Suponga que tiene una cinta de 5 casillas, todas llenas, y con la del centro activada. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que necesariamente van a explotar?

Solución:

Es claro que es al menos dos, porque la casilla inicial siempre activa a alguna otra. Y de hecho el mínimo se alcanza, colocando

C	Y	P	Y	Y

■

Problema 5 Se tiene una cinta de 15 casillas, todas llenas y con la de al centro activada. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que van a explotar, si queremos que se alcance a prender la casilla de más a la izquierda?

Solución:

La casilla central corresponde a la casilla 8. Para llegar a la 1, como la distancia es 7 y por explosión podemos ir acortándolo de a 2, el mínimo es 4. Se alcanza colocando, por ejemplo,

P	C	P	P	P	P	P	**P***	...

■

Problema 6 Nicolás tenía una cinta de largo 5, originalmente llena y con una casilla activada. No se fijó que la cinta empezó a explotar, y cuando fue a mirar, iba así

C*				C

¿Cómo estaba la cinta originalmente? Dar todas las posibilidades.

Solución:

Llamaremos a los espacios centrales (a), (b) y (c), tal y como muestra la figura

C*	(a)	(b)	(c)	C

La casilla que activó a la del extremo izquierdo debe haber sido la (a) o la (b), ya que la (c) está demasiado lejos como para haberla activado. Haremos así dos casos

- Si (a) fue la que la activó. En este caso, la casilla en (a) debe ser una C. Obtenemos así, que el paso anterior debe haber sido

C	**C***	(b)	(c)	C

  De nuevo hay dos casos: si la activó (b) o si la activó (c) (acá los dos son válidos). Si la activó (b), debe ser una C. En ese caso, la casilla (c) debe haber sido la primera encendida, y también debe haber sido una (c). Obtenemos así, que originalmente era

C	C	C	**C***	C

  Por otro lado, si la activó (c), esa debe haber sido una P, para que alcance a activarla. Si pasa eso, la casilla (b) debe haber sido una Y, y debe haber sido la activada inicialmente. Obtenemos así

C	C	**Y***	P	C

- Si (b) fue la que la activó. En ese caso, en (b) debe haber una P. Esa puede haber sido activada por (a) o por (c). Si fue activada por (a), ahí debe haber una Y, en (c) una P, y (c) debe haber estado encendida originalmente, obteniendo

C	Y	P	**P***	C

  Si fue activada por (c), ahí debe haber habido una C, en (a) una M y esa debe haber sido encendida originalmente. Obtenemos así

C	**M***	P	C	C

Obtenemos así que había cuatro configuraciones posibles.

■

Problema 7 Consideremos la siguiente cinta, de 3000 casillas

M*	M	C	M	M	C	...

Cuando ya ha explotado 2018 veces, ¿en qué casilla está?

Solución:

Veamos que, al explotar una vez, activa la tercera casilla; la siguiente activa la segunda, y la siguente la cuarta. Y ahora el tablero queda así.

			M*	M	C	...

Esto se repite cada tres turnos: así, cuando ya ha explotado $2016 = 672 \cdot 3$, está en la casilla $1 + 3 \cdot 672 = 2016$; dos turnos después, queda un puesto más adelante (repitiendo el procedimiento de arriba), y queda así en la casilla 2017.

■

Puntajes

Pregunta	Básica	Menor	Mayor
P1	2	1	1
P2	3	2	2
P3	3		3
P4	3	3	3
P5	3	4	
P6	3	3	
P7	3	4	
P8		3	3
P9			4
P10			4

La numeración de 7mo y 8vo corresponde a la parte del mismo nivel, no a la de Menor/Mayor.