XVI

Campeonato Escolar de Matemáticas

Cuarta Fecha

4 de Agosto de 2018

Soluciones

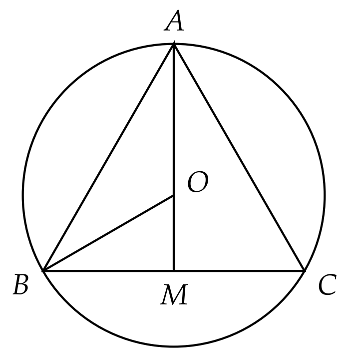
Individual

Primer Nivel

1 En una circunferencia de radio r se inscribe un triángulo equilátero (es decir, los tres vértices del triángulo pertenecen a la circunferencia). Encuentre el área del triángulo equilátero en función del radio r.

Solución

Sean O el centro de la circunferencia, $\triangle ABC$ el triángulo equilátero inscrito en ella y M el punto medio del lado $\overline{BC}$. En el triángulo $\triangle BMO$, se tiene $\measuredangle BMO = 90^\circ$, $OM = \dfrac{r}{2}$ y $BO = r$.



Por el Teorema de Pitágoras, $BM = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$, entonces $BC = r\sqrt{3}$ y $AM = \dfrac{3r}{2}$. Por lo tanto:

$$\text{Área}(\triangle ABC) = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot r^2}{4}$$

2 Patricio está pensando en comprarse un auto, para lo que se dirige a la automotora "LaBarca". En ésta tienen ocho modelos de auto disponibles, cada uno con cinco colores a elegir y dos tipos de asientos a decidir. Nicolás le dice a Patricio que mejor vaya a ver la automotora "UwUMotors"; ahí le ofrecen tres colores más, pero sólo tienen uno de los dos tipos de asiento, y sólo seis de los ocho modelos. ¿En cuál automotora Patricio tiene más opciones para elegir? Además, ¿cuántos autos están sólo disponibles en "LaBarca", y cuántos en "UwUMotors"?

Solución

En la automotora “LaBarca”, Patricio tiene 8 modelos de auto, 5 colores y 2 tipos de asiento, por lo que hay

$$8 \cdot 5 \cdot 2 = 80$$

opciones. En cambio, en “UwuMotors”, Patricio tiene 6 modelos, 8 colores y 1 tipo de asiento para elegir, por lo que hay

$$6 \cdot 8 \cdot 1 = 48$$

opciones. Así, Patricio tiene más opciones para elegir en “LaBarca”.
Notemos también que, entre las dos automotoras, hay en común 6 modelos de auto, 5 colores y 1 tipo de asiento; así, hay

$$6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$$

autos en común. Por ello, en “LaBarca” hay $80 - 30 = 50$ autos exclusivos, y en “UwuMotors” hay $48 - 30 = 18$ autos exclusivos.

Segundo Nivel

1 Consideramos dos números de dos dígitos cada uno, todos distintos de cero, tales que la segunda cifra del primer número es igual a la primera cifra del segundo número. Además, al dividir el primer número por el segundo se obtiene la primera cifra del primer número dividida por la segunda cifra del segundo número. Encuentre todos los números de dos cifras que cumplen con estas propiedades.

Solución

Sean A y B números que cumplen estas propiedades. Entonces $A = 10a + b$ y $B = 10b + c$, con $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ y, además:

$$\frac{10a + b}{10b + c} = \frac{a}{c}$$

Desarrollando esta igualdad, se tiene $b(c - a) = 9a(b - c)$.
Si $c = a$, entonces $0 = 9a(b - c)$, luego $b = c$ y así tenemos todas la ternas de la forma (a, a, a), con $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. En adelante, vamos a suponer que $c \neq a$.
Como $a, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ y $c \neq a$, entonces $-8 \leq c - a \leq 8$ y $c - a \neq 0$. Esto quiere decir que 9 **no** divide a $c - a$, entonces 3 divide a b. observe lo siguiente:

$$b(c - a) = 9a(b - c) \Rightarrow bc - ba = 9ab - 9ac \Rightarrow bc + 9ac = 10ab \Rightarrow (b + 9a)c = 10ab \Rightarrow c = \frac{10ab}{b + 9a}$$

Considerando que 3 divide a b, se tienen tres casos:

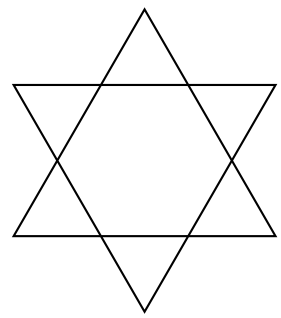
- <u>$b = 3$:</u> Entonces $c = \dfrac{30a}{3 + 9a} = \dfrac{10a}{1 + 3a}$. La única opción es $a = 3$, pero se tiene $c = 3$, contradicción. En este caso no hay solución.

- <u>$b = 6$:</u> Entonces $c = \dfrac{60a}{6 + 9a} = \dfrac{20a}{2 + 3a}$. Las únicas opciones son $a \in \{1, 2, 6\}$, pero si $a = 6$, entonces $c = 6$, contradicción. Si $a = 1$, entonces $c = 4$; si $a = 2$, entonces $c = 5$. Obtenemos así las soluciones (1,6,4) y (2,6,5).

- $\underline{b=9}$: Entonces $c = \dfrac{90a}{9+9a} = \dfrac{10a}{1+a}$. Las únicas opciones son $a \in \{1,4,9\}$, pero si $a = 9$, entonces $c = 9$, contradicción. Si $a = 1$, entonces $c = 5$; si $a = 4$, entonces $c = 8$. Obtenemos así las soluciones (1,9,5) y (4,9,8).

Por lo tanto, existen 13 ternas (a,b,c): (1,6,4), (2,6,5), (1,9,5), (4,9,8) y las nueve ternas de la forma (a,a,a), con $a \in \{1,2,3,\dots,9\}$.

2 En la figura se muestra un polígono P de 12 lados, todos ellos con la misma longitud, formado por un hexágono regular y seis triángulos equiláteros. El perímetro de P (sin considerar los lados del hexágono regular) es 24 cm^2.



Dados 25 puntos, tres a tres no colineales, en el interior de P, demuestre que existen tres de estos puntos (distintos entre sí) que determinan un triángulo con área menor o igual que $\sqrt{3}$ cm^2.

Solución

Cada uno de los 12 lados de P mide 2 cm. Trazando las tres diagonales del hexágono regular, que miden 4 cm., éste se divide en seis triángulos equiláteros de lado 2cm. y P se divide en doce triángulos equiláteros de lado 2cm.; el área de cada uno de estos triángulos es:

$$\frac{(2\text{ cm})^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Como se tienen 25 puntos en el interior de P, entonces existe un triángulo equilátero de lado 2cm. que contiene al menos 3 de los 25 puntos. Por lo tanto, el área del triángulo determinado por estos tres puntos es menor o igual que $\sqrt{3}$ cm^2.

Tercer Nivel

1 Determine la cantidad de palabras de seis letras, con o sin sentido, que se pueden formar con todas las letras de la palabra $AABBCC$, tales que no hay dos letras iguales en posiciones consecutivas.

Solución

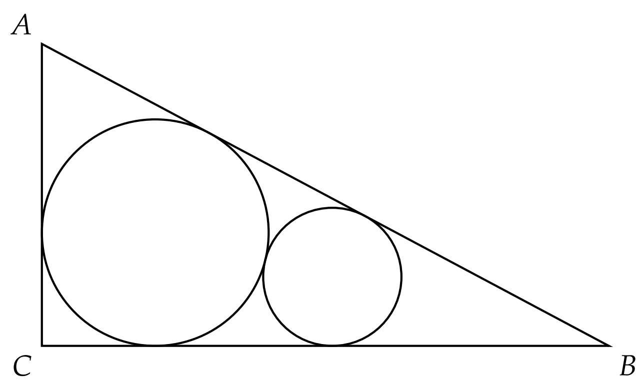
Sea S el conjunto de palabras con las propiedades indicadas en el enunciado. Sea w una palabra de

dos letras distintas y S_w el conjunto de las palabras de S que empiezan con w. Entonces debe ser que S es la unión disjunta de los seis conjuntos: S_{AB}, S_{AC}, S_{BA}, S_{BC}, S_{CA} y S_{CB}. Además, cada dos de estos conjuntos: S_{LM} y $S_{L'M'}$ están en biyección aplicando a cada letra de S_{LM} la permutación σ de $\{A, B, C\}$ tal que $\sigma(L) = L'$ y $\sigma(M) = M'$ (por ejemplo, si $\sigma(A) = B$, $\sigma(B) = A$ y $\sigma(C) = C$, entonces σ "transforma" la palabra $ABCACB \in S_{AB}$ en la palabra $BACBCA \in S_{BA}$). Por lo tanto, S_{AB}, S_{AC}, S_{BA}, S_{BC}, S_{CA} y S_{CB} tienen m elementos cada uno y S tiene $n = 6m$ elementos. Primero será encontrado m y después n.
Considere una palabra en S_{AB}. Hay dos casos por evaluar:

- La palabra está en S_{ABA}: Entonces las últimas tres letras son una B y dos C. Como éstas no están en posiciones consecutivas, entonces la palabra es $ABACBC$.
- La palabra está en S_{ABC}: Entonces hay dos opciones para la cuarta letra (A o B), dos para la quinta letra (distinta de la cuarta) y una para la sexta letra. Por lo tanto, hay cuatro palabras en este caso.

Por lo tanto, $m = 5$ y $n = 30$.

2 En la figura, el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo en C, con $AB = 17$, $AC = 8$ y $BC = 15$. La circunferencia C_1 es tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, y la circunferencia C_2 es tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y a la circunferencia C_1.



Determine la suma de los radios de las circunferencias C_1 y C_2.

Solución

Para cada $i \in \{1, 2\}$, la circunferencia C_i tiene centro O_i y radio r_i. Para calcular r_1, sean D y E los puntos de tangencia de C_1 con los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, y s el semiperímetro del triángulo $\triangle ABC$. El cuadrilátero O_1DCE tiene tres ángulos rectos y $OD = OE$, entonces es un cuadrado, así que $r_1 = CD$. Como $2s = 8 + 15 + 17 = 40$, entonces $s = 20$ y, por lo tanto, $r_1 = CD = 20 - 17 = 3$. Observe que $BD = 15 - 3 = 12$.
Para calcular r_2, sea F el punto de tangencia de C_2 con el lado $\overline{BC}$. Observe que los puntos B, O_1 y O_2 son colineales y $\triangle BDO_1 \sim \triangle BFO_2$. Como $O_1D = 3$ y $BD = 12$, entonces $O_1B = 3\sqrt{17}$. Por la semejanza de triángulos, $BF = 4r_2$ y $BO_2 = \sqrt{17} \cdot r_2$. Además, $O_1O_2 = 3 + r_2$. Como $BO_2 + O_1O_2 = BO_1$, entonces:

$$\sqrt{17} \cdot r_2 + (3 + r_2) = 3\sqrt{17}$$
$$(\sqrt{17} + 1) \cdot r_2 = 3(\sqrt{17} - 1)$$

Multiplicando por $\sqrt{17}-1$ en ambos lados de la igualdad:

$$16r_2 = 3(\sqrt{17}-1)^2 = 3(18-2\sqrt{17}),$$

entonces $r_2 = \dfrac{3(9-\sqrt{17})}{8}$. Por lo tanto, la suma de los radios es:

$$r_1 + r_2 = 3 + \frac{3(9-\sqrt{17})}{8} = \frac{3(17-\sqrt{17})}{8} = \frac{51}{8} - \frac{3}{8}\cdot\sqrt{17}$$

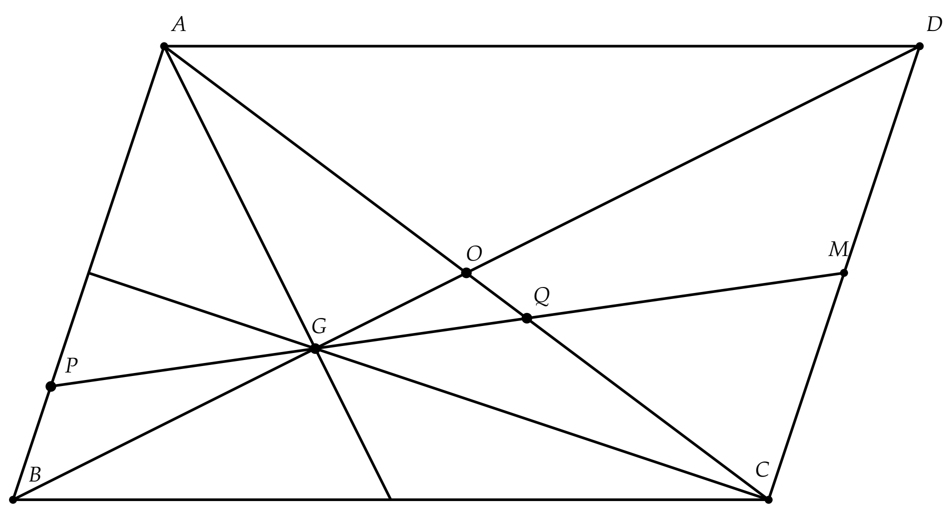
Cuarto Nivel

1 Por el baricentro G de un triángulo $\triangle ABC$ se traza una recta que interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P y Q, respectivamente. Demuestre que $\dfrac{PB}{PA}\cdot\dfrac{QC}{QA} \leq \dfrac{1}{4}$.

Solución

Primera Solución

Tomemos las paralelas a $\overline{AB}$ por C, y a $\overline{BC}$ por A, que se intersectan en D. Así, el triángulo ACD es semejante al original, y el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo. Colocaremos los nombres mostrados en la figura



Tomaremos como medida unidad al segmento $\overline{AB}$, y llamemos $\overline{PB} = x$. De esta manera, $\overline{PA} = 1-x$. Notemos que, por el Teorema de Thales aplicado a las paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (con rectas transversales $\overline{PM}$ y $\overline{BD}$), se tiene que

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{DG}}.$$

Ahora bien, como G es el baricentro del triángulo, se tiene que $\overline{BG} = 2\overline{GO}$; y como O es el centro del paralelogramo, que $\overline{BO} = \overline{OD}$. Juntando estas dos relaciones, se sigue que $\overline{DG} = 2\overline{BG}$, de donde

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{MD}} = \frac{1}{2},$$

de donde $\overline{MD} = 2\overline{PB} = 2x$. Con esto, se sigue también que $\overline{MC} = 1 - 2x$. Ahora, por el Teorema de Thales nuevamente, se sigue que

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{PA}} = \frac{1-2x}{1-x}.$$

De esta manera, obtenemos que la expresión que queremos controlar es

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-2x}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{(1-x)^2}.$$

Por ello, tenemos que lo que se nos pide demostrar es

$$\frac{x(1-2x)}{(1-x)^2} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x(1-2x) \leq (1-x)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (3x-1)^2.$$

Como esta última relación es siempre verdad, se sigue lo pedido.

Segunda Solución

Si T es un triángulo, entonces $[T]$ denota su área. Para cada punto X, sea d_X la distancia desde X hasta la recta $\overleftrightarrow{PQ}$. Sea M el punto medio del lado $\overline{BC}$. Entonces:

$$\frac{PB}{PA} + \frac{QC}{QA} = \frac{[\triangle BPQ]}{[\triangle APQ]} + \frac{[\triangle CPQ]}{[\triangle APQ]} = \frac{PQ \cdot d_B}{PQ \cdot d_A} + \frac{PQ \cdot d_C}{PQ \cdot d_A} = \frac{d_B}{d_A} + \frac{d_C}{d_A} = \frac{d_B + d_C}{d_A}$$

Como M es el punto medio del lado $\overline{BC}$, entonces $d_B + d_C = 2d_M$. Además, $AG = 2GM$, entonces $d_A = 2d_M$. Por lo tanto:

$$\frac{PB}{PA} + \frac{QC}{QA} = \frac{d_B + d_C}{d_A} = \frac{2d_M}{d_A} = 1$$

Existe un número real t tal que $\frac{PB}{PA} = \frac{1}{2} + t$ y $\frac{QC}{QA} = \frac{1}{2} - t$. Por lo tanto:

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} = \left(\frac{1}{2} + t\right)\left(\frac{1}{2} - t\right) = \frac{1}{4} - t^2 \leq \frac{1}{4}$$

2 Determine si existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x+y) = \text{máx}(f(xy), x) + \text{mín}(f(xy), y) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

Solución

Escribiendo $x = y = 2$ en la relación, se tiene:

$$f(4) = f(2+2) = \text{máx}(f(2\cdot 2), 2) + \text{mín}(f(2\cdot 2), 2) = \text{máx}(f(4), 2) + \text{mín}(f(4), 2) = f(4) + 2,$$

contradicción. Por lo tanto, no existe f.