CMAT Campeonato Escolar de Matemáticas XVI

Quinta Fecha
1 de Septiembre de 2018
Soluciones
Grupal

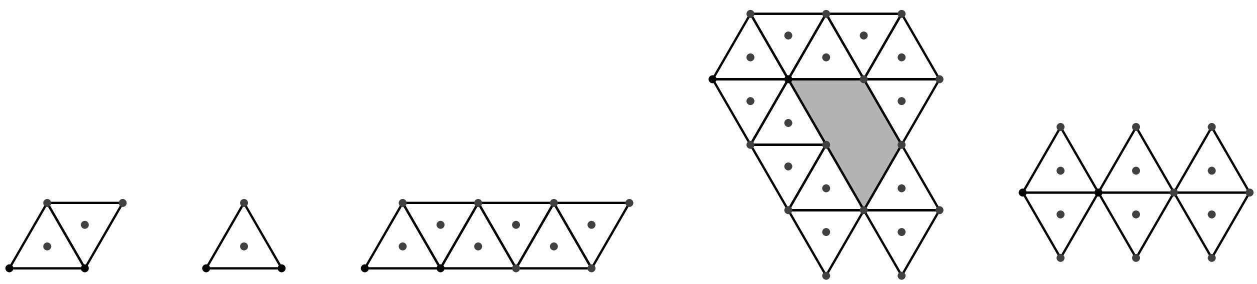
Campos felices

Todos nosotros tenemos alguna noción de lo que es el campo. A saber, una extensión limitada de tierra más o menos verde. Pero, también, podríamos decir que es una extensión limitada. Bueno, por ahí podemos empezar a hacer matemática y como tal podemos,por ejemplo, definir campos felices....

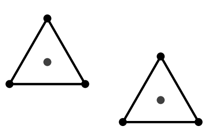
Definición (Campo): Entenderemos por **campo** a una figura formada por una concatenación de triángulos equiláteros de lado 1, de tal modo que cada triángulo tenga al menos una arista en común con otro triángulo y que, además, se cumpla:

- ninguna arista de algún triángulo, que forma el campo, puede ser cortada por otra
- no se pueden agregar otras figuras que no sean triángulos equiláteros de lado 1 a la construcción
- el contorno del campo debe poder ser recorrido desde un punto, continuar por alguna arista y seguir hasta llegar nuevamente a ese punto; es decir, no está compuesto por figuras sin contacto.

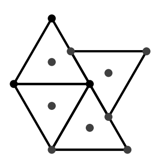
Por ejemplo, las siguientes 5 figuras cumplen con todas las condiciones para ser llamadas Campos.



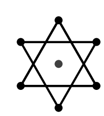
Por otro lado, las siguientes 3 figuras no cumplen con alguna parte de la definición de campo, por tanto, no pueden ser llamadas de esa manera.



(a) Esto no es un campo, porque son dos figuras separadas.



(b) No es, ya que el triángulo superior derecho no tiene una arista en común con alguno de los otros.

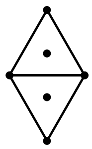


(c) Se están cortando las aristas, por tanto, no es campo.

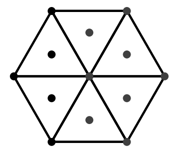
En lo que sigue cuándo hablemos de triángulo nos estamos refiriendo a triángulos equiláteros de lado 1 (a menos de mención explicíta de otro sentido).

Definición (Contorno): Llamaremos **contorno** al número de aristas, de un campo, que pertenecen a sólo un triángulo de la figura; y, por tanto, es el perímetro del campo. Además, lo notaremos con la letra C.

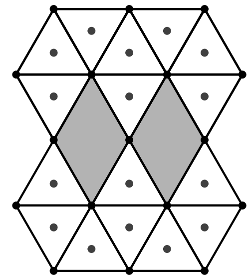
Por ejemplo:



(a) $C = 4$

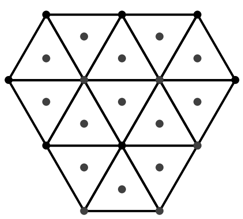


(b) $C = 6$

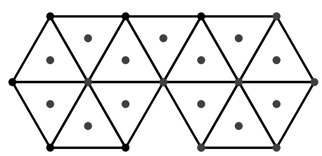


(c) $C = 20$

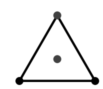
Definición (Hexágono extraíble) (HE): Llamaremos **hexágono extraíble** a todo hexágono regular formado por seis triángulos, completamente contenido en un campo.



(a) $\#HE = 3$



(b) $\#HE = 2$



(c) $\#HE = 0$

En algunos de los problemas que siguen, colocaremos algún peso a cada triángulo que forma un campo. Por ejemplo: si queremos que todo triángulo pese lo mismo le colocamos a cada triángulo un valor a(puede ser $a = 1, 2, 3...$). También, podemos colocar un valor distinto a cada triángulo de un campo. A este peso le llamamos el valor del triángulo.

Definición (Valor): A cada triángulo equilátero de lado 1, que componga un campo, le asociamos un valor entero positivo, en caso de no tenerlo se marca con un "·" para diferenciar de las que no pertenecen al campo. El "valor" de un triángulo es igual al valor numérico de ese triángulo.

El "valor" de un HE o de un campo, es la suma de los valores de los triángulos que lo componen.

Definición: (Campo Feliz) Un campo se dirá **feliz** si satisface que los valores de todos sus hexágonos extraíbles es el mismo.

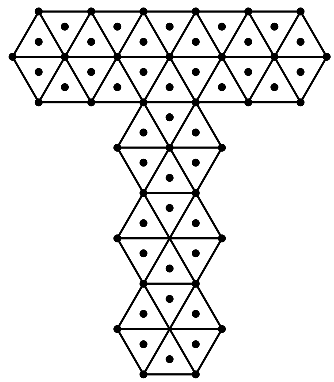
Definición (Configuración en cadena): Una **configuración en cadena** es una configuración de valores, del campo, tal que

- Todos los triángulos tienen un valor numérico no nulo;
- Los valores pertenecen a una sucesión del mismo largo que la cantidad de triángulos de lado 1 del campo
- Los números que son consecutivos en la sucesión, aparecen en triángulos que comparten un vértice.

Problema 1.

a) Cuente la cantidad de triángulos equiláteros de lado 1 que pertenezcan al menos a un Hexágono extraíble en el siguiente campo.

b) ¿Cuál es el contorno del campo?



Solución:

a) Notamos que todo triángulo de la figura pertenece a alguno de los 8 Hexágonos Extraíbles. Por tanto, por simple inspección (o por algún método más sofisticado) podemos notar que hay 40 triángulos equiláteros de lado 1 en la figura; de forma que 40 triángulos de lado 1 cumplen lo pedido.

b) El contorno es 26

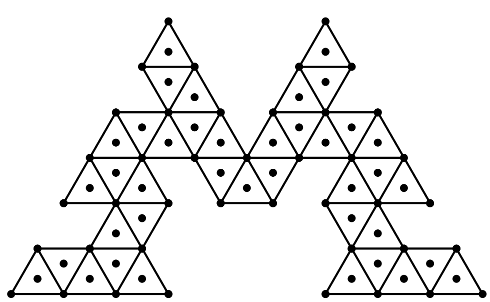
■

Problema 2. Indique la cantidad mínima de triángulos equiláteros de lado 1 que se deben agregar para que la figura tenga luego:

a) (básica) 8 Hexágonos extraíbles

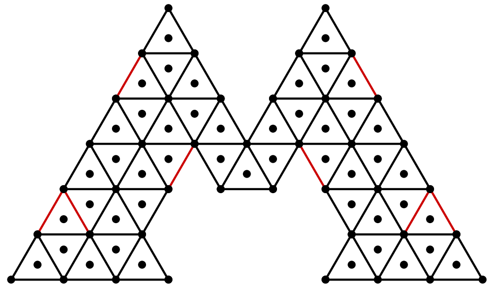
b) (menor) 11 Hexágonos extraíbles

c) (mayor) 17 Hexágonos extraíbles

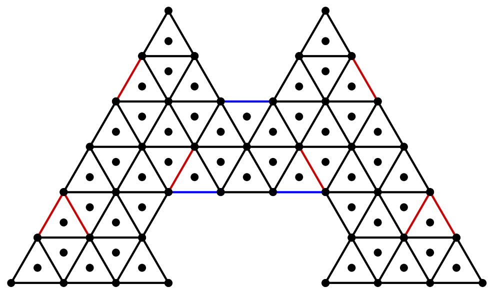


Solución:

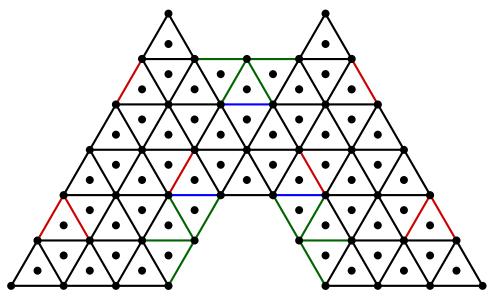
Primero notamos que no existen en esta figura lugares en los que se generen más de un hexágono extraíble desde el principio. Luego, la cantidad mínima teórica serían 8 triángulos. se corrobora completando los HE's de los extremos como se muestra en la figura.



Para 11 Hexágonos extraíbles, seguimos el mismo procedimiento. Escogiendo los mostrados en la siguiente figura, llegamos al mínimo teórico de 11 triángulos.



finalmente para 17 HE's, usamos la figura anterior y notamos que no se puede seguir igual, pero con 9 triángulos más, como se muestra en la siguiente figura, llegamos a los 17.



■

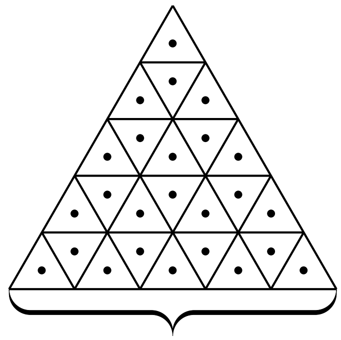
Problema 3. El siguiente campo tiene la forma de un triángulo equilátero de lado n.

a) (básica) Calcule la cantidad de hexágonos extraíbles para $n = 5$.

b) (menor) Calcule la cantidad de hexágonos extraíbles para $n = 20$.

c) (mayor) Calcule la cantidad de hexágonos extraíbles en función de n.

d) (mayor) Si se sabe que el campo tiene 2016 hexágonos extraíbles, encuentre n.



n triángulos equiláteros de lado 1 en la base

Solución:

Notamos que en la segunda fila se localiza el vértice de un hexágono extraíble; en la tercera fila se localizan dos vértices de dos hexagonos extraíbles; en la cuarta fila se localizan tres vértices de tres hexagonos extraíbles; sucesivamente en la fila $(k+1)$ se localizan k vértices de k hexágonos extraíbles. Tenemos entonces $1+2+3+\cdots+(n-3)+(n-2)$ hexágonos extraíbles. Por tanto la cantidad de hexágonos extraíbles, en función de n, es:

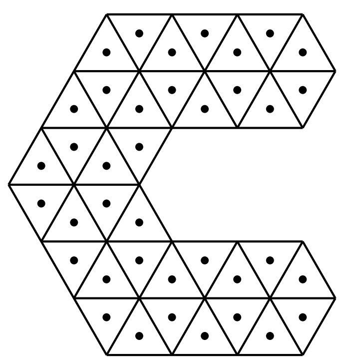
$$1+2+3+\cdots+(n-3)+(n-2) = \frac{(n-2)\times(n-1)}{2} = \#HE_n.$$

Entonces para $n=5$, tenemos $\#HE_5 = 6$, para $n=20$, tenemos $\#HE_{20} = 171$.

Para la parte d), tenemos la ecuación : $\frac{(n-2)\times(n-1)}{2} = 2016$, que es equivalente a: $(n-2)\times(n-1) = n^2-3n+2 = 4032$. Esto es: $n^2-3n-4030 = (n-65)\times(n+62) = 0$. De aquí que la solución es $n=65$.

■

Problema 4. Dada la siguiente figura, rellene los 38 triángulos equiláteros tal que:



a) (básica y menor) Sea un campo feliz.

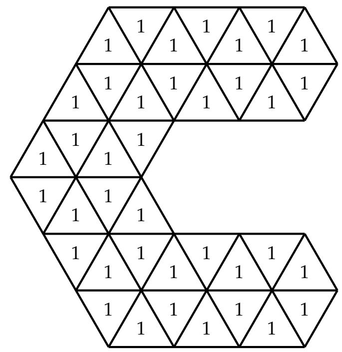
b) (menor y mayor) Sea un campo feliz con una configuración en cadena y que los valores usados sean los de la sucesión $\{1,2,3,\ldots,37,38\}$.

c) (menor y mayor) Sea un campo feliz y que los valores usados sean los de la sucesión $\{a,2a,3a,\ldots,37a,38a\}$.

d) (mayor) Sea un campo feliz con una configuración en cadena con sucesión $\{a,a+1,a+2,\ldots,a+36,a+37\}$.

Solución:

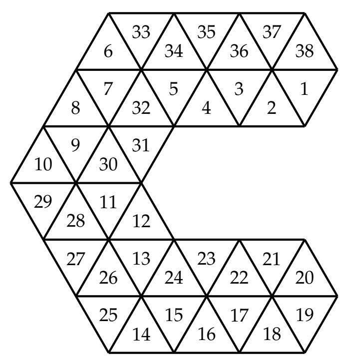
Si la condición es que solo sea un campo feliz, podemos tener:



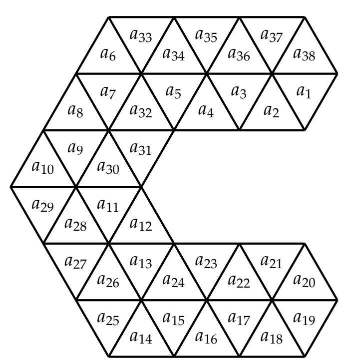
Donde en cada campo extraíble la suma de los valores es 6.

De forma general, podemos formar parejas de triángulos en el campo de forma que cada hexágono extraíble del campo tenga 3 parejas formadas. Luego, hacemos que entre cada pareja sus valores sean de la forma a_{1+k} y a_{38-k} cada uno. Finalmente la suma de los valores de las parejas de triángulos que hicimos es siempre igual para todo k entre 1 y 38, dado que cada sucesión tiene un crecimiento constante, y como cada hexágono extraíble tiene 3 de estas parejas, obtenemos una configuración de un campo feliz.

Por ejemplo, para $\{1, 2, 3, \ldots\}$



Y, en general, solo debemos considerar lo antes dicho



$\blacksquare$

Problema 5. Considere el siguiente campo: (básica 3×4) (menor 4×5) (mayor $n \times m$)

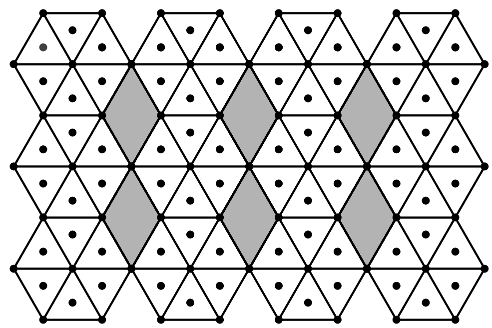


Figura 4: 3×4

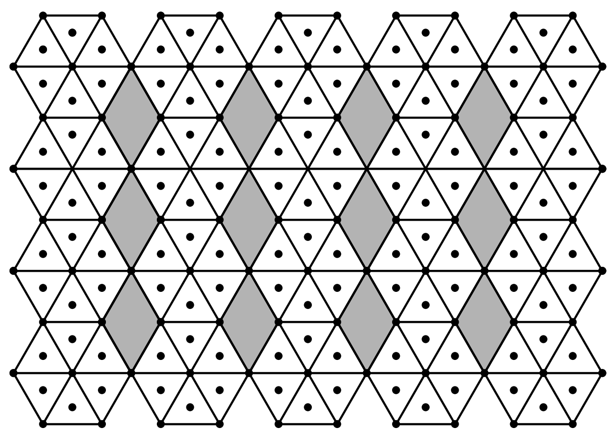


Figura 5: 4×5

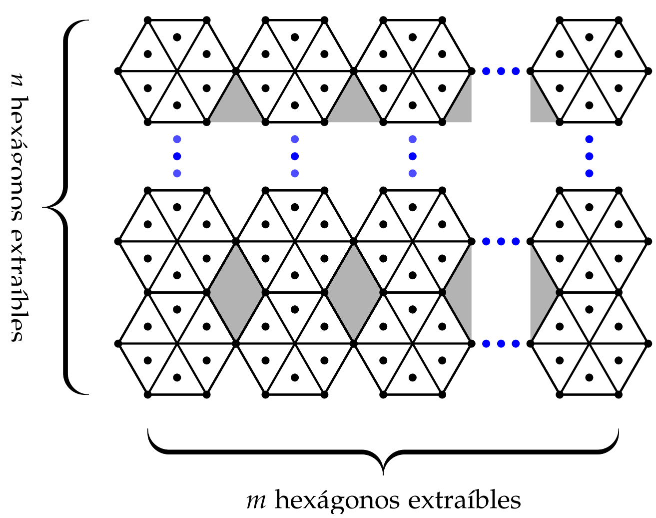


Figura 6: $n \times m$

a) Muestre una configuración de campo feliz tal que todos los valores de los triángulos de lado 1 sean distintos entre sí.

Solución:

Notar que son 3×4 hexágonos extraíbles con 6 triángulos cada uno, por tanto, deben ser 72 valores distintos. De manera conveniente, en esta solución elegiremos los números del 1 al 72. Notamos que para este caso, sumar el menor con el mayor de los números que elegimos usar nos da 73. Luego, el siguiente menor sería 2, $1 + 1$, y el siguiente mayor 71, $72 - 1$, y que sumados también serían 73 y, así sucesivamente. Finalmente, basta que las parejas formadas anteriormente pertenezcan al mismo hexágono, dando $3 \cdot 73$ cada uno, para cumplir lo pedido.

En el caso de menor, basta cambiar 72 por 120 en la solución anterior y en mayor por $6 \times n \times m$.

■

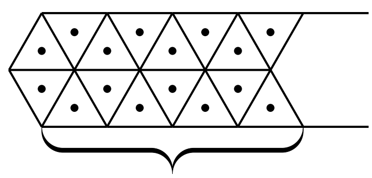
b) (menor y mayor) Consideren las 3 sucesiones, $S_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $S_2 = \{2a, 2(a+1), 2(a+2), \ldots\}$ y $S_3 = \{a + 2018, 2(a + 2018), 3(a + 2018), \ldots\}$, haga una configuración de campo feliz tal que cada hexágono extraíble tenga dos numeros de cada sucesión.

Solución:

Usamos el mismo truco que en la parte *a*), pero esta vez pondremos solo una pareja de cada sucesión, y tendremos por dada la configuración de campo feliz.

■

Problema 6. Se construye una figura de la siguiente forma



n triángulos equiláteros de lado 1 en la base

Además, se sabe que los valores que pueden tener los triángulos son solo enteros positivos y distintos entre sí, responda:

a) (básica) Si la figura tiene 5 hexágonos extraíbles, ¿cuánto será el contorno?

b) (básica) Si en la figura el lado n es 10, ¿cuánto será el contorno?

c) (mayor) Si la figura tiene 20 hexágonos extraíbles, ¿cuánto será el contorno?

d) (menor y mayor) Si la figura tiene 2018 triángulos de lado 1, ¿cuánto valdrá el lado n?

Solución:

Primero, notamos que el número de hexágonos extraíbles es la misma que el lado n. Con este dato, vemos que el contorno de la figura es $2 + n + n + 2 = 2n + 4$. También,Para hacer una figura con $n = 2$, necesitamos los 6 triángulos del primer hexágono y sumamos 4 más para completar el segundo hexágono. Por tanto si $n = 2$ la cantidad de triángulos es $10 = 4 \times 2 + 2$. Si agregamos a la derecha 4 triángulos más, concluímos que para $n = 3$ la cantidad de triángulos necesaria es $14 = 4 \times 3 + 2$. Asumiendo que para $N = k - 1$ la cantidad de triángulos necesaria es $4 \times (k - 1) + 2$, tenemos que para construir el siguiente hexágono debemos agregar cuatro triángulos. Por tanto, la cantidad necesaria de triángulos para hacer la figura n es $4 \times n + 2$.

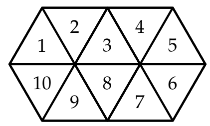
Dando así en la parte *a*) $C = 14$, en la parte *b*) $C = 24$, en la parte *c*) $n = 44$. Para la parte *d* debemos resolver la ecuación $4 \times n + 2 = 2018$ y tenemos $n = 504$.

$\blacksquare$

e) (básica) Si en la figura el lado n es 2 y se sabe que el campo es un campo feliz con cada valor de HE igual a 33, construya tal configuración.

Solución:

Una forma es decir que los 2 triángulos que pertenecen a ambos hexágonos que componen el campo son 1/3 de un HE. Luego, esos dos valen 11 y queda rellenar. Aquí un ejemplo:



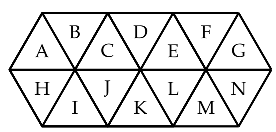
$\blacksquare$

f) (menor y mayor) Si en la figura el lado n es 3 y además se sabe que tiene una configuración de campo feliz, que los valores de los triángulos son distintos entre sí, con la suma de éstos 105 y con el 14 como el mayor valor. Construya una configuración con el menor valor de HE posible.

Solución:

Por enunciado, concluimos que los posibles valores son los del 1 al 14.

Asignamos los siguientes valores a los triángulos



Luego, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$A + B + C + H + I + J = V(HE) \tag{1}$$
$$C + D + E + J + K + L = V(HE) \tag{2}$$
$$E + F + G + L + M + N = V(HE) \tag{3}$$
$$A + B + C + D + E + F + G + H + I + J + K + L + M + N = 105 \tag{4}$$

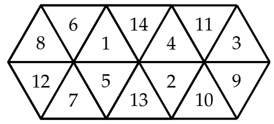
Reemplazando 1 y 3 en 4 tenemos: $2V(E) + D + K = 105$ y, por tanto:

$$V(HE) = \frac{105 - (D + K)}{2}$$

Así, como los mayores valores posibles pra D y K son, por ejemplo $D = 13$ y $K = 14$ tenemos que el valor mínimo para $V(E) = 39$.

Utilizando estos valores de D, F y $V(E)$ en 2 obtenemos: $C + E + J + L = 39 - 27 = 12$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $C + J = 6 = E + L$ y entonces usar $C = 1; J = 5; E = 4$ y $L = 2$.

Reemplazando, nuevamente en 1 y 3 tenemoa: $A + B + H + I = 33 = F + G + N + M$. Así, una configuración de rellenado es, por ejemplo:

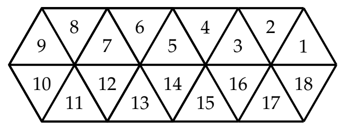


∎

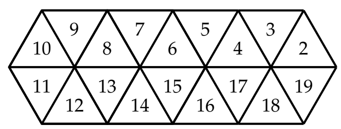
g) El campo tiene 4 hexágonos extraíbles, se sabe también que tiene una configuración de campo feliz en cadena, y que el valor de HE es x. (básica $x = 57$) (menor $x = 63$) (mayor $x = 126$). Construya una configuración que cumpla lo pedido

Solución:

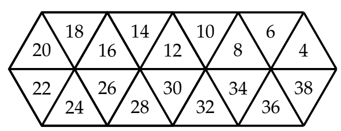
- Básica: del 1 al 18, $\{1, 2, 3, \ldots, 17, 18\}$



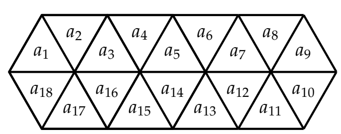
- Menor: del 2 al 19, $\{2, 3, \ldots, 18, 19\}$



- Mayor: del 4 al 38, pero de 2 en 2 $\{4, 6, 8, \ldots, 34, 36, 38\}$

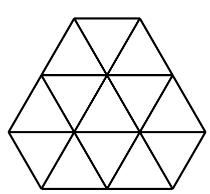


En general, se podría tener lo siguiente



∎

Problema 7. Dada la siguiente figura

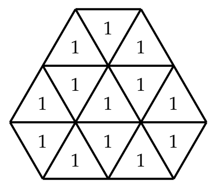


a) (básica y menor) Completar con una configuración de campo feliz.

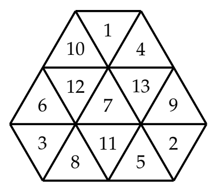
b) (menor) Muestre una configuración de campo feliz y que los valores de lo triángulos pertenezcan a la sucesión $\{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}$ sin repetirse.

Solución:

a) En el caso de que solo se pida un campo feliz podemos rellenar como sigue:

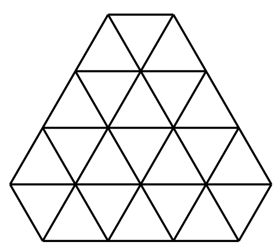


b) En el caso de la sucesión, podemos llegar a esta solución partiendo con un 7 en el centro, luego rodeándolo de los valores más altos o más bajos, en este caso más altos. Siguiente, ponemos en cada hexágono extraíble uno de los número más bajos para equilibrarlo. Finalmente ponemos términos pareados como lo hicimos en otras soluciones. Así, podemos rellenar como ejemplo:



■

Problema 8. Dada la siguiente figura:



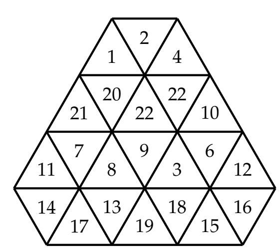
a) (Todos) Muestre una configuración de campo feliz.

b) (menor y mayor) Haga una configuración de campo feliz y que los valores de lo triángulos pertenezcan a la sucesión $\{1, 2, 3, \ldots, 21, 22\}$ sin repetirse.

Solución:

a) Todos iguales

b) La siguiente configuración es una solución:



■

Puntajes

Pregunta	Básica	Menor	Mayor
P1	2	2	2
P2	1	1	1
P3	2	2	3
P4	2	3	3
P5	2	3	3
P6	4	3	4
P7	2	3	
P8	2	3	4