# Primer Nivel

**1** Se sabe que

$$(a+b):(b+c):(c+a)=1:5:7$$

¿En qué razón se encuentra $a$, $b$, y $c$?
**Aclaración:** Lo anterior quiere decir que se cumplen las siguientes igualdades

$$(a+b):(b+c)=1:5$$
$$(b+c):(a+c)=5:7$$
$$(a+b):(a+c)=1:7$$

**Solución**

Al conocerse la expresión $(a+b):(b+c):(c+a)=1:5:7$ podemos obtener las siguientes igualdades:

$$(a+b):(b+c)=1:5 \tag{1}$$
$$(b+c):(a+c)=5:7 \tag{2}$$
$$(a+b):(a+c)=1:7 \tag{3}$$

De (1) tenemos que

$$\frac{a+b}{1}=\frac{b+c}{5}\Rightarrow c=5a+4b \tag{4}$$

De la expresión (2) tenemos:

$$\frac{b+c}{5}=\frac{a+c}{7}\Rightarrow 7b+7c=5a+5c$$

Lo que se simplifica a:

$$c=\frac{5a-7b}{2} \tag{5}$$

Tomando la expresión (4) y (5) para igualar $c$ tenemos:

$$5a+4b=\frac{5a-7b}{2} \tag{6}$$

El objetivo de igualar $c$, es para conocer la primera razón, en este caso, de $a$ y $b$. Luego si resolvemos la expresión (6) nos queda:

$$\frac{a}{b} = -3 \Rightarrow a : b = -3 : 1$$

Ahora, tomemos la expresión (1) y (3) para despejar $a$ e igualar ambas ecuaciones.
De (1) tenemos

$$a + b = \frac{b + c}{5} \Rightarrow 5a + 5b = b + c \Rightarrow a = \frac{-4b + c}{5} \tag{7}$$

De (3) tenemos

$$a + b = \frac{a + c}{7} \Rightarrow 7(a + b) = a + c \Rightarrow a = \frac{c - 7b}{6} \tag{8}$$

Tomando (7) y (8) igualamos $a$ para obtener la razón entre $b$ y $c$.

$$\begin{aligned} \frac{-4b + c}{5} &= \frac{c - 7b}{6} \\ 6(c - 4b) &= 5(c - 7b) \\ \frac{b}{c} &= \frac{1}{-11} \end{aligned}$$

Obteniendo las siguientes razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{-3}{1} \text{ y } \frac{b}{c} = \frac{1}{-11}$$

Podemos concluir que la razón entre $a$, $b$ y $c$ está dada por

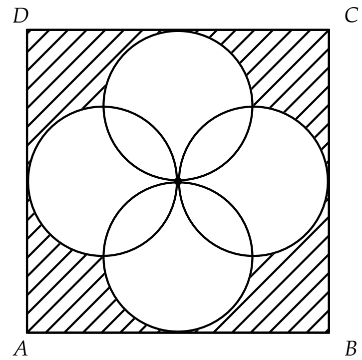
$$a : b : c = -3 : 1 : -11$$

También, como equivalente y dependiendo de como se tomen los signos durante el desarrollo, también se puede obtener lo siguiente:

$$a : b : c = 3 : -1 : 11$$

No afectando en nada la relación de $a$, $b$ y $c$, pues en ambos casos están en las mismas razones a pesar de tener signos opuestos.

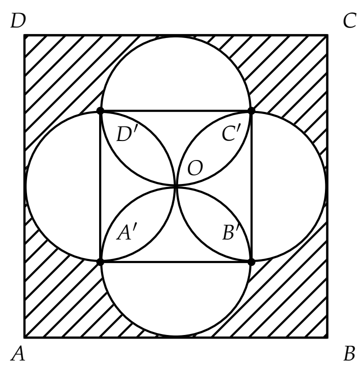
**2** Sea $ABCD$ un cuadro de lado $4r$, y sea $O$ su centro. Por $O$ se hacen pasar cuatro circunferencias de radio $r$ cada una, tal y como muestra la figura.




¿Cuál es el área de la parte achurada?

**Solución**

Llamemos $A', B', C'$ y $D'$ a los puntos de intersección de las circunferencias, tal y como se muestran abajo.




Es claro que el $A'B'C'D'$ es un cuadrado de lado $2r$. Además, el resto de área blanca son cuatro semicircunferencias, todas de radio $r$. Así, el área blanca es

$$(2r)^2 + 4 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2} = 4r^2 + 2\pi r^2.$$

Como el cuadrado original tiene lado $4r$, su área es $(4r)^2 = 16r^2$, y así el área achurada es

$$16r^2 - [4r^2 + 2\pi r^2] = 12r^2 - 2\pi r^2.$$

# Segundo Nivel

**1** Se tiene una caja cerrada tal que la suma de las longitudes de sus aristas es 44 m. y su superficie es 72 m$^2$. Determine, en metros, la longitud de la diagonal de la caja (una diagonal de una caja es un segmento que une dos vértices de la caja, los que no pertenecen a una misma cara).

**Solución**

Sean $a$, $b$ y $c$ las dimensiones de la caja, medidas en metros. Por hipótesis se tiene:

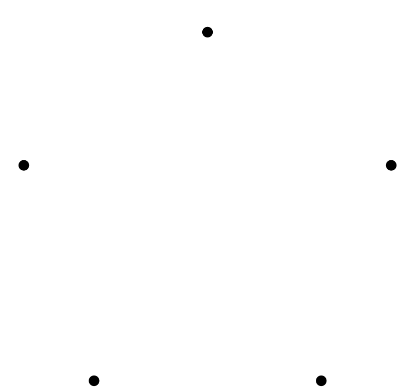
$$\begin{aligned} 4(a+b+c) &= 44 \\ 2(ab+ac+bc) &= 72 \end{aligned}$$

Entonces $a+b+c=11$. Elevando al cuadrado se tiene:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) &= 121 \\ a^2+b^2+c^2+72 &= 121 \\ a^2+b^2+c^2 &= 49 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2} &= 7 \end{aligned}$$

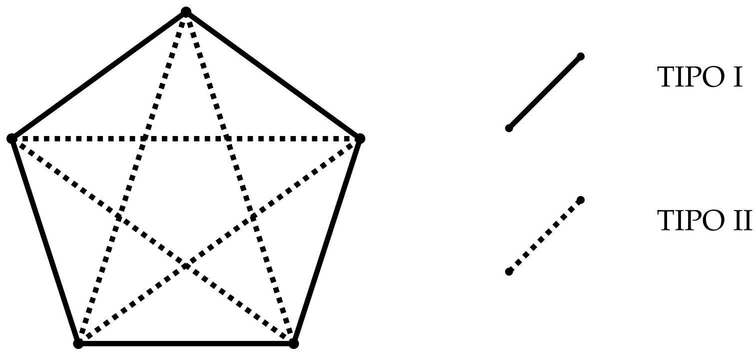
Por lo tanto, la longitud de la diagonal de la caja es 7 m.

**2** Consideremos los vértices de un pentágono regular. Pato elige dos vertices al azar y los une mediante un segmento de color rojo. Posteriormente, Marcos elige dos vertices al azar y los une mediante un segmento de color azul, de manera que Marcos elige un segmento distinto al de Pato. Si Pato y Marcos eligen de manera equiprobable, ¿cuál es la probabilidad de que los segmentos, elegidos por Pato y Marcos, se corten?

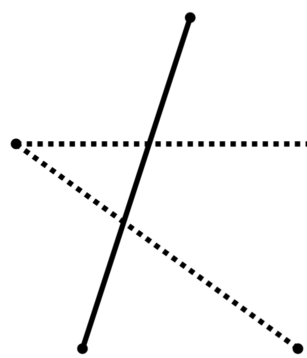


**Solución**

Separemos los segmentos en dos tipos:




Si Pato pinta un segmento de tipo I, no se puede cortar. Si pato pinta un segmento de tipo II, hay dos segmentos que pueden cortar.



Así, tenemos:

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2} \quad \text{Pato elige tipo I} \begin{cases} 0 & \text{Marcos corta} \\ 1 & \text{Marcos no corta} \end{cases} \\ \\ \dfrac{1}{2} \quad \text{Pato elige tipo II} \begin{cases} \dfrac{2}{9} & \text{Marcos corta} \\ \\ \dfrac{7}{9} & \text{Marcos no corta} \end{cases} \end{cases}$$

Luego

$$P(\text{se corten}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

Así, la probabilidad que se busca es $\dfrac{1}{9}$

# Tercer Nivel

**1** Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo tal que $\measuredangle A = 60°$ y $AB \neq AC$. Sean $H$, $O$ y $\Gamma$ el ortocentro, el circuncentro y la circunferencia circunscrita del triángulo $\triangle ABC$, respectivamente. Sea $D$ el punto medio del arco $BC$ de $\Gamma$ que no pasa por $A$. Pruebe que $AHDO$ es un rombo.

**Solución**

Como $\measuredangle BAC = 60°$, entonces $\measuredangle BOC = 120°$. Por la definición de $D$, se tiene $\measuredangle BOD = \measuredangle COD = 60°$. Como $OB = OC = OD$, entonces los triángulos $\triangle BDO$ y $\triangle CDO$ son equiláteros. Si $L$ es el punto de intersección de los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{OD}$, entonces $L$ es el punto medio de ambos segmentos.
En el triángulo $\triangle ABC$, sean $M$ y $N$ el punto medio de los lados $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, y $G$ el centro de gravedad. Sea $\varphi$ la homotecia con centro $G$ y razón $-2$, es decir: si $X \neq G$ es un punto en el plano, entonces $Y = \varphi(X)$ es un punto tal que:

- Los puntos $X$, $G$ e $Y$ pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{GX}$ en este orden.
- $GY = 2 \cdot GX$.

(se define $\varphi(G) = G$). Observe que $\varphi(L) = A$, $\varphi(M) = B$ y $\varphi(N) = C$. $\overline{MN} // \overline{BC}$ y $\overline{OL} \perp \overline{BC}$, entonces $\overline{OL} \perp \overline{MN}$, luego la recta $\overleftrightarrow{OL}$ contiene a la altura desde $L$ del triángulo $\triangle LMN$. Análogamente, las rectas $\overleftrightarrow{OM}$ y $\overleftrightarrow{ON}$ contienen a las alturas desde $M$ y $N$, respectivamente, del triángulo $\triangle LMN$, entonces $O$ es el ortocentro del triángulo $\triangle LMN$. Como $\varphi(L) = A$, $\varphi(M) = B$ y $\varphi(N) = C$ y $H$ es el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$, entonces $\varphi(O) = H$, luego $\varphi$ triansforma el segmento $\overline{OL}$ en el segmento $\overline{HA}$ y, por lo tanto, $HA = 2 \cdot OL$.
Como $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ y $\overline{OD} \perp \overline{BC}$, entonces los lados $\overline{AH}$ y $\overline{OD}$ son paralelos. Además, $AH = 2 \cdot OL = OD$, entonces los lados $\overline{AH}$ y $\overline{OD}$ son paralelos y congruentes, luego $AHDO$ es un paralelogramo. Como $OA = OD$, entonces $AHDO$ es un rombo.

**2** Sea $f$ una función definida en los reales tal que para todo número real $x$ cumple que:

$$f(x) = f(2x) = f(1 - x)$$

Pruebe que $f$ es periódica.

**Solución**

Tenemos 2 propiedades:

$$f(x) = f(2x) \tag{9}$$
$$f(x) = f(1 - x) \tag{10}$$

Evaluando $x$ como $2x$ en (10) se tiene

$$f(2x) = f(1 - 2x)$$

Mientras que evaluando $x$ como $1-x$ en (9) se tiene

$$f(1-x) = f\left(2(1-x)\right)$$

Luego, $f(x) = f(2x) = f(1-x) = f(1-2x) = f(2-2x)$.
Así, $f(1-2x) = f(2-2x)$. Y, tomando $n = 1-2x$, se consigue $f(n) = f(n+1)$. Lo que permite concluir que $f$ es periódica.
Notar que el mínimo periodo no es 1, de hecho no existe, tenemos:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) = f(x+1) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

Tomando $n = \dfrac{x}{2}$ tenemos que

$$f(n) = f\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

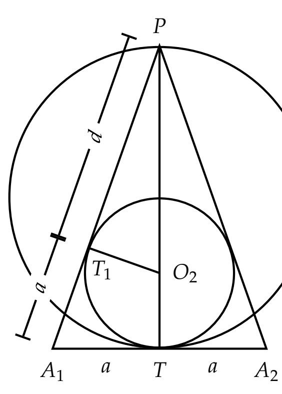
O, de manera general, $f(x) = f\left(x+\dfrac{1}{2}k\right)$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.

# Cuarto Nivel

1 Sean $K_1$ y $K_2$ dos circunferencias, de radios $r_1$ y $r_2$, respectivamente, con $r_2 < r_1$. La circunferencia $K_2$ es tangente interiormente a la circunferencia $K_1$, en el punto $T$. Sean $L$ la recta tangente común a ambas circunferencias, y $P$ el punto de la circunferencia $K_1$, diametralmente opuesto a $T$. Sean $L_1$ y $L_2$ las dos rectas tangentes a la circunferencia $K_2$, que pasan por $P$. Encuentre (en función de $r_1$ y $r_2$) el área de la región triangular limitada por las rectas $L$, $L_1$ y $L_2$

**Solución**

Sean $O_2$ el centro de $K_2$, $A_1 = L \cap L_1$, $A_2 = L \cap L_2$, $T_1 = L_1 \cap K_2$, $a = A_1T = A_2T = A_1T_1$ y $d = PT_1$, como se muestra en la figura:



Por el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $\triangle PT_1O_2$:

$$\begin{aligned} d^2 + r_2^2 &= (2r_1 - r_2)^2 \\ d^2 + r_2^2 &= 4r_1^2 - 4r_1r_2 + r_2^2 \\ d^2 &= 4r_1^2 - 4r_1r_2 \\ d^2 &= 4r_1(r_1 - r_2) \end{aligned}$$

entonces $d = 2\sqrt{r_1(r_1 - r_2)}$. Por el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $\triangle PTA_1$:

$$\begin{aligned} 4r_1^2 + a^2 &= (a + d)^2 \\ 4r_1^2 + a^2 &= a^2 + 2ad + d^2 \\ 4r_1^2 &= 2ad + 4r_1(r_1 - r_2) \\ 4r_1^2 &= 2ad + 4r_1^2 - 4r_1r_2 \\ 4r_1r_2 &= 2ad \\ \frac{2r_1r_2}{d} &= a \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área del triángulo $\triangle PA_1A_2$ es:

$$\begin{aligned} [\triangle PA_1A_2] &= \frac{r_1a \cdot 2 \cdot 2}{2} \\ &= \frac{2^2r_1^2r_2}{d} \\ &= \frac{2^2r_1^2r_2}{2\sqrt{r_1(r_1 - r_2)}} \\ &= \frac{2r_1\sqrt{r_1}r_2}{\sqrt{r_1 - r_2}} \end{aligned}$$

**2** Sea $f : \mathbb{Z}_0^+ \longrightarrow \mathbb{Z}_0^+$ tal que:

- $|f(n) - f(m)| \leq |n - m|$
- $f^3(0) = 0$

Si se define

$$f^{2018}(x) = \underbrace{f\left(f\left(f\left(\dots f(x)\right)\right)\right)}_{2018 \text{ veces}}$$

Determine $f^{2018}(0)$

**Solución**

Se define $f^{2018}(0) = \underbrace{f\left(f\left(f\left(\dots f(0)\right)\right)\right)}_{2018 \text{ veces}}$ Notar que:

$$\begin{aligned} |f^2(0)| = |f^3(0) - f^2(0)| &\leq |f^2(0) - f(0)| \\ &\leq |f(0)| \\ \Longrightarrow |f^2(0)| &\leq |f(0)| \end{aligned} \tag{11}$$

Además

$$\begin{aligned} |f(0)| = |f^3(0) - f(0)| &\leq |f^2(0)| \\ \Longrightarrow |f(0)| &\leq |f^2(0)| \end{aligned} \tag{12}$$

Por lo tanto, de (11) y (12)

$$|f(0)| = |f^2(0)|$$

Como $f : \mathbb{Z}_0^+ \longrightarrow \mathbb{Z}_0^+$, se tiene que $f^2(0) = f(0)$.
Luego, $f^3(0) = f^2(0)$, de forma que $f^2(0) = 0$. Y, por tanto, $f(0) = 0$
Así, se puede obtener que:

$$f^{2018}(0) = f\left(f\left(f\left(\dots f(0)\right)\right)\right) = 0$$