

Actividad de Modelización basada en el Ciclo de Kolb para el contenido de Función Cuadrática. Una experiencia de aula.

ESTEBAN AROS SÁNCHEZ * MARIANELA CASTILLO FERNÁNDEZ †

Abstract

En [1], M. Aravena y C. Caamaño mencionan que uno de los problemas más complejos que enfrenta la educación media chilena en la enseñanza de la matemática tiene relación con la forma de articular los temas con las otras áreas del conocimiento e incluso con la propia matemática, implicando que los estudiantes no conciben la utilidad que tienen las matemáticas en su formación.

M. Aravena en [2] añade además que en Chile existe una desatención al trabajo de modelos y aplicaciones en todos los niveles de enseñanza, con lo cual el implementar un trabajo matemático basado en situaciones de modelaje, puede ser un medio potente en la formación de profesores, permitiendo que en su futuro laboral ayuden a los alumnos del sistema educativo a superar las dificultades y obstáculos, para poder enfrentarse como ciudadanos a una sociedad cambiante, en especial para los estudiantes más desfavorecidos socioculturalmente.

En este trabajo se presentará una experiencia de aula que se llevó a cabo en un tercer medio de un Liceo Municipal de la ciudad de Los Ángeles, la cual consistió en tres actividades adaptadas de una actividad propuesta en [3], que tienen por objetivo introducir el contenido de función cuadrática por medio de la resolución de un problema en contexto usando modelización matemática basada en el Aprendizaje Experiencial o Ciclo de Kolb.

La experiencia fue especialmente novedosa para los estudiantes, dado que, según un pequeño estudio que se realizó en el establecimiento sobre los estilos de enseñanza de los profesores de matemática, no se suele utilizar la modelización como estrategia de enseñanza para el contenido de funciones.

References

- [1] Aravena, M., y Caamaño, C. (2007). *Modelización Matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile*. Estudios Pedagógicos XXXIII, N 2, 7-25.
- [2] Aravena, M. (2011). *Resolución de problemas y modelización geométrica en la formación inicial de profesores*. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife.

*Estudiante de Pedagogía en Matemática y Educación Tecnológica, Universidad de Concepción Campus Los Ángeles, e-mail: esaros@udec.cl

†Departamento de Ciencias Básicas, Escuela de Educación, Universidad de Concepción Campus Los Ángeles, e-mail: esaros@udec.cl

- [3] Sandoval, V., Peña, M., Carrasco, V., González, C., Yáñez, S., Cariaga, E., y Colipe, E. (2014). *50 Ciclos de Kolb y 2 razones para ser utilizados*. Temuco: Universidad Católica de Temuco.

El rol de la visualización no-icónica en el ETM: Profundización de la perspectiva semiótica de Duval

Carolina Henríquez Rivas - Universidad de La Frontera -
carolina.henriquez@ufrontera.cl

Introducción

La investigación actual relacionada con el proceso de *visualización* en la enseñanza y aprendizaje de la matemática ha cobrado valor y vigencia. Esto se evidencia en el reciente *International Congress on Mathematical Education* (Presmeg, Radford, Roth y Kadunz, 2016). En contexto del *International Group for the Psychology of Mathematics Educations*, el survey desarrollado por Presmeg (2006) ofrece una vasta revisión de la investigación realizada sobre visualización y, expone temas como: las dificultades de los estudiantes, la visualización en la enseñanza, la influencia de los computadores en la visualización matemática, entre otros. Al finalizar, Presmeg plantea interrogantes de estudio, como qué visualización para promover distintos tipos de problemas.

Espacio de Trabajo Matemático

El marco denominado *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM), se define como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven tareas matemáticas y, se constituye por dos planos, *cognitivo y epistemológico*, en relación con los contenidos matemáticos del dominio en juego (Kuzniak, 2011). En el plano cognitivo están presentes los procesos de *visualización, construcción y prueba* y, en el epistemológico, el *representante, artefactos y referencial*. Las componentes de los planos, se articulan mediante las génesis *semiótica, instrumental y discursiva*. En las interacciones entre las génesis se definen los *planos verticales*, que permiten relacionar el trabajo matemático caracterizando e identificando diferentes fases (de trabajo) en relación con una tarea dada. Estos son: semiótico-instrumental [Sem-Ins], instrumental-discursivo [Ins-Dis], y semiótico-discursivo [Sem-Dis] (Kuzniak y Richard, 2014), como se muestra en la figura (1).

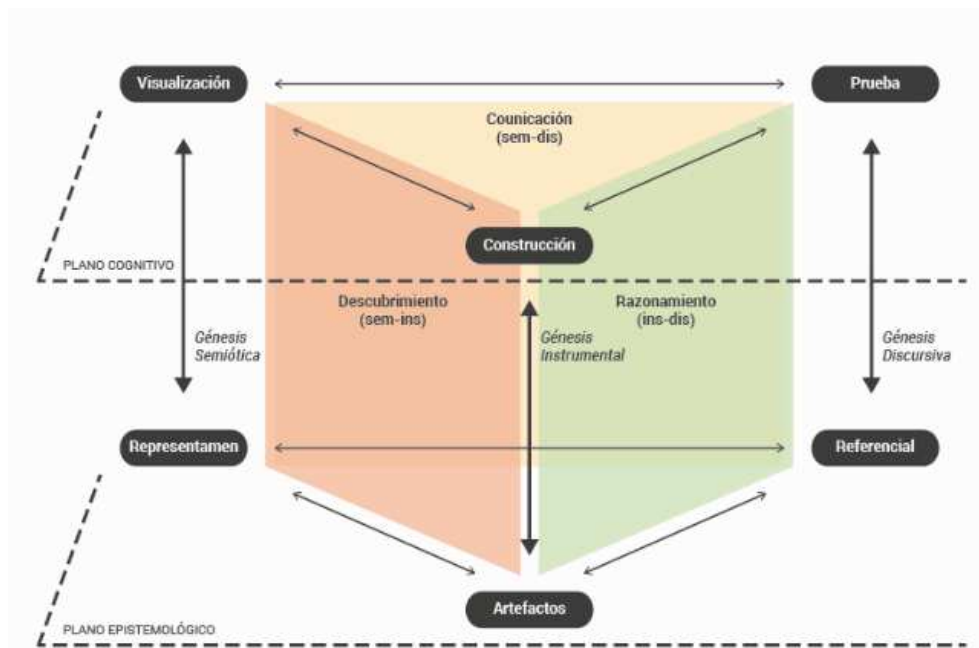


Figure 1: ETM, componentes y planos verticales (Kuzniak y Richard, 2014).

En el ETM específicamente en geometría, el proceso de *visualización* es una de las componentes que favorece el trabajo en la *génesis figural*. Para profundizar este proceso en una perspectiva cognitiva, se han considerado los trabajos de Duval.

El proceso de visualización en la perspectiva de Duval

Los trabajos de Duval (1995, 1999, 2005), no solo se relaciona con las actividades semióticas sobre figuras geométricas (o gráficos), sino su coordinación con razonamientos discursivos. En este sentido, la *visualización* está basada en la producción de la representación semiótica de un objeto, identificando dos modos de visualizar que pueden funcionar según el tipo de operación con las figuras y cómo se movilizan sus propiedades a partir de sus formas visuales: uno *icónico* y otro *no-icónico* (Duval, 2005). Estos mecanismos de visualización se relacionan con diversas formas de *ver* en función del rol de las figuras en las actividades geométricas propuestas a los alumnos. En particular, la forma de visualización no-icónica se vincula con: la *deconstrucción instrumental*, la *decomposición heurística*, y la *deconstrucción dimensional*.

Estos aspectos teóricos relativos al ETM y sus componentes, especialmente relacionados con el proceso de visualización *no-icónica* en geometría, nos ha llevado a reinterpretar y profundizar en los trabajos de Duval y analizar el *espacio de trabajo matemático* de futuros profesores (de matemática) al resolver tareas

geométricas que consideran estas formas de visualizar. La charla se desarrollará en torno a la pregunta: *¿Cuál es el rol de la visualización en el trabajo geométrico de futuros profesores al resolver tareas que involucran diversas formas de visualizar?*

Referencias

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Traducción al castellano de Myriam Vega. Berne, Suisse: Peter Lang.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, 1, 3-26.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17(4-I), 5-15.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). UK: Sense Publishers.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W.M. y Kadunz, G. (2016). *Semiotics in Mathematics Education.* Hamburg: Springer Open.

LXXXVI ENCUESTRO ANUAL
Sociedad de Matemática de Chile
SESIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

INTERCONEXIÓN ENTRE TEORÍAS PARA
COMPRENDER PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN DE
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO. EL CASO DE
MODELACIÓN Y ABSTRACCIÓN EN CONTEXTO

GUERRERO-ORTIZ CAROLINA *

Abstract

Establecer interconexiones entre teorías es una estrategia que se ha desarrollado en educación matemática en los últimos años con la finalidad de comprender en profundidad y desde diferentes perspectivas los procesos involucrados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas [?]. En el caso de la modelación matemática gran parte de la investigación atiende al diseño de situaciones de enseñanza para favorecer el desarrollo de habilidades y conocimiento matemático [?]. Sin embargo, pocas investigaciones dan cuenta de cómo emergen los conceptos matemáticos al modelar una situación y cómo los estudiantes se apropian de estos conceptos. En esta presentación se discuten las ventajas que ofrece la interconexión entre dos elementos de la teoría al analizar la modelación de una situación real con el apoyo de material auxiliar. En particular, se considera el marco propuesto por [?] para analizar el proceso de modelación desde una perspectiva cognitiva y la teoría de Abstracción en Contexto (AiC) para comprender cómo los estudiantes construyen conocimiento matemático abstracto [?]. Con estos dos elementos es posible identificar cuál es el rol que el material auxiliar juega como mediador en la modelación de algunas situaciones. Además se identifican y analizan los procesos de abstracción matemática cuando los individuos construyen un modelo matemático para describir la degradación de materiales en el mar, lo cual conduce al estudio de la función exponencial.

References

- [1] Kindron, I., and Bikner-Ahsbahs, A. *Advancing research by means of the networking of theories*. Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods (pp. 221-232). Springer, Rotterdam, The Netherlands, 2014.

*Instituto de Matemáticas, Universidad de Valparaíso. Supported by FONDECYT/POSDOCTORADO No. 3150317, e-mail: c.cguerrero@yahoo.com.mx

- [2] Niss, M., Blum, W., and Galbraith, P. *Introduction*. Modelling and Applications in Mathematics Education (pp. 3–32). Springer, New York (2007).
- [3] Dreyfus, T., Hershkowitz, R., and Schwarz, B. B. *The nested epistemic actions model for abstraction in context: Theory as methodological tool and methodological tool as theory*. Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods (pp. 185–217). Springer, Rotterdam, The Netherlands, 2014.
- [4] Borromeo, F. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt fr Didaktik der Mathematik* **38** No. 2 (2006), 86–95.

LXXXVI ENCUENTRO ANUAL
Sociedad de Matemática de Chile
SESIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

EL CONOCIMIENTO DE LA MODELACIÓN
MATEMÁTICA DESDE LA REFLEXIÓN EN LA
FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES

JAIME HUINCAHUE ARCOS * RITA BORROMEO-FERRI † JAIME MENA-LORCA ‡

Abstract

La relación entre la realidad y el conocimiento matemático sugiere, desde una visión educativa, estudios que planteen maneras sobre cómo generar otros significados del conocimiento matemático, sin soslayar los múltiples marcos que se han formulado y utilizado al respecto. En ese sentido, desde una aproximación cualitativa, se construye una experimentación en la formación del profesor de Matemática en Chile. Para tal fin, se plantea un marco conceptual para la enseñanza de la modelación matemática, el cual consiste en: constructos teóricos respecto a la concepción de modelación matemática [1, 3], ciclo de modelación desde una aproximación individualizada del conocimiento [2, 4], competencias de modelación [8, 9] y niveles de modelación. Con esto, se propone un curso que estudie la enseñanza de modelación matemática dirigido a la formación inicial del profesor de matemáticas; compuesto de 15 sesiones, las cuales emergen desde el marco conceptual enunciado y planificado a partir de experiencias teóricas validadas -como es el marco teórico de Borromeo-Ferri para la enseñanza de la modelación- [5, 7]. Mediante un análisis metodológico con el modelo MTSK [6], se destacan resultados hacia el desarrollo reflexivo de los estudiantes en el transcurso de la experiencia, hacia el conocimiento que tienen ellos como estudiantes y como futuros profesores, evidenciado desde la comprensión del conocimiento en todos los subdominios del dominio MK y el subdominio KMT. Los resultados muestran un progreso en el conocimiento matemático y en el conocimiento pedagógico del contenido. El trabajo discute posibles maneras para establecer modelos de enseñanza de la modelación y un momento propicio para hacer uso de una propuesta sobre la materia.

References

- [1] Blum, W. ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education Discussion document. *Educational Studies in Mathematics* **51** No. 1 (2002), 149–171.

*Universidad Católica del Maule, e-mail: jaime.huincahue.a@gmail.com

†Universidad de Kassel, e-mail: borromeo@mathematik.uni-kassel.de

‡Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, e-mail: jaime.mena@pucv.cl

- [2] Blum, W., and Leiss, D. “Filling up” The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. In: *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 4*, Sant Feliu de Guixols,(2007), 1623–1633.
- [3] Borromeo-Ferri, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **38** No. 2 (2006), 86–95.
- [4] Borromeo-Ferri, R. On the influence of mathematical thinking styles on learners’ modelling behaviour *Journal für Mathematik didaktik* **31** No. 1 (2010), 99–118.
- [5] Borromeo-Ferri, R. Mathematical Modeling - The Teachers Responsibility. In: *Proceedings Conference on mathematical modeling*, New York, (2014), 26–31.
- [6] Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero-vila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. *Un Marco Terico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Servicio de Publicaciones.
- [7] Huincahue, J. *Propuesta de Modelación Matemática en la Formación de Profesores y Bases para una Variedad de Modelación desde la Teora Socioepistemológica*. Tesis doctoral no publicada, Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, (2017).
- [8] Niss, M. Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. In: *3rd Mediterranean Conference on mathematical education*, Athens, (2004), 115–124.
- [9] Mass, K. What are modelling competences? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **38** No. 2 (2006), 113–142.

LXXXVI ENCUESTRO ANUAL
Sociedad de Matemática de Chile
SESIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Diseño e implementación de Aplicaciones móviles como apoyo
al estudiante

JOSÉ KLENNER J.
jose.klenner@unab.cl

Abstract

El uso de tecnología en la enseñanza de la matemática ha representado un problema ya que se desconoce el potencial (dentro y fuera del aula) que se le puede dar, por lo que no se aprovecha y/o no se cree que el estudiante pueda lograr aprendizajes utilizando la virtualidad. El objetivo es cómo instrumentalizamos las herramientas tecnológicas en pos de la funcionalidad del conocimiento. En este sentido presentamos la construcción e implementación de un software bajo la plataforma Android, el cual, a través de un app, se permitirá modelar la derivada desde perspectivas distintas como por ejemplo: pendientes, tangentes, función derivada, etc. Hemos observado que estas aplicaciones móviles además promueven la constitución de una comunidad que no está en las aulas, que puede pertenecer a distintos colegios y niveles de formación, que probablemente tienen tablets, smartphones u otros recursos al que pueden acceder para apoyarse o colaborar con la comunidad. Esto pasa a ser un nuevo recurso para la nivelación y que debemos utilizar, para eso debemos liberarnos de la idea que los estudiantes aprenden sólo en clases o con tareas asociadas a cursos específicos, los alumnos aprenden en comunidades virtuales también. Hay que tomar conciencia que la web dispone de muchos recursos y el asunto es como aprovecharlos y, en este caso, se puede canalizar esto a través de foros con el fin de que los estudiantes desarrollen habilidades de argumentación. Si dispone de recursos para monitorear estos foros, se podrá producir un proceso de institucionalización (Brousseau, 1986) en donde se establezca el contenido construido en forma virtual. Las variadas experiencias de apoyo virtual en que ha participado el equipo de investigadores, nos permite presentar una propuesta con fundamento didáctico, apoyados en la construcción social del conocimiento y otras ideas basales de la didáctica.

References

- [1] Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-112.
- [2] Morales, A., Mena, J., Vera, F., Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias Revista de Investigación y experiencias didácticas*. NÚM. 30.3 ,237-256.

ANÁLISIS DE ACTIVIDADES SOBRE LA NOCIÓN PRE NUMÉRICA PIAGETANA DE CLASIFICACIÓN EN MANUALES ESCOLARES CHILENOS

JOSÉ MEZA *

Abstract

El presente trabajo, corresponde al análisis preliminar del diseño de unas situaciones de aula basadas en las nociones piagetanas de seriación y de clasificación. Se revisaron 6 textos escolares y 1 documento con orientaciones pedagógicas para Educación Parvularia proveniente del Ministerio de Educación (en total 12 experiencias de aprendizaje) y mediante un proceso de codificación abierta y luego axial, se elaboraron 4 categorías y 10 sub categorías que permitieron caracterizar los aspectos lógico-matemático y matemáticos que sugieren dichos documento, como conocimientos y aspectos predictores de la construcción del número natural. Se concluyó que los textos promueven un estudio alejado de los aspectos matemáticos que sugiere el autor y que por tanto, no aseguran la óptima construcción matemática del número natural en niños de pre escolar. Palabras clave: nociones pre numéricas, seriación y clasificación, educación inicial, didáctica de la matemática.

1 Introducción

Las Bases Curriculares de Educación Parvularia (BCEP) (Mineduc, 2005) indican que un estudiante en el segundo ciclo de Educación Parvularia, debe aprender a establecer relaciones cada vez más complejas de semejanza y diferencia mediante la clasificación y seriación [] ampliando así la comprensión de su entorno (p.85), entendiéndose que dentro de su entorno está el aprendizaje del número natural y sus funciones. Una de las primeras tesis de Piaget, en el contexto del análisis del comportamiento de niños al enfrentarse a ciertos problemas, dan cuenta que el hombre evidencia diferentes formas de organización (Castorina & Palau, 1981). Tal hallazgo, permite reconocer que la aparición de este tipo de razonamientos, tiene un componente innato y empírico. Para Piaget (1969; 1978) y otros autores (Lawrence, Theakston & Isaacs, 1968), el aprendizaje del número natural se centra en el desarrollo de las nociones lógicas-matemáticas de seriación, clasificación, conservación de cantidad y de correspondencia uno a uno. El desarrollo de estas nociones no son, necesariamente todas, anteriores al desarrollo de la noción de número, sino que la relación entre cada una de ellas y el número, se producen en momentos y maneras diferentes (Chamorro, 2005). Para el

*Universidad Diego Portales - Pontificia Universidad Católica de Chile

autor, dan cuenta cómo la seriación por una parte, permite coordinar la función ordinal y cardinal del número, privilegiando la primera de esta. Por otra parte, la clasificación permiten comprender la formación aditiva de este, demostrando primordialmente la función cardinal del número, pero coordinando aún ambas funciones. Una mala comprensión de la clasificación, es agrupación de elementos basándose en la semejanza y diferencia a partir de determinados atributos, despreciando el estudio aritmético asociado a la agrupación. La mirada piagetana rechaza el aprendizaje memorístico de la secuencia oral del conteo o cantinela, esto debido a que según el autor, oculta la real comprensión del concepto asociado al número natural.

2 Metodología

El estudio consistió en un análisis de contenido de un corpus de 12 experiencias de aprendizaje pertenecientes a 6 manuales para docentes para los Niveles de Transición (4 a 6 años). Para ello, se realizó un análisis de contenido mediante una decodificación abierta y luego, axial, las que permitieron elaborar 4 categorías y 10 subcategorías que se relacionaban con las orientaciones didácticas y metodológicas que sugieren los manuales y con las definiciones teóricas y didácticas que movilizan las experiencias de aprendizaje y las sugerencias al educador. Resultados Respecto a la gestión, el quehacer y las decisiones docentes que se promueve desde el punto de vista de la enseñanza, los textos invitan ocasionalmente a los educadores de párvulo (en adelante EP) a que los párvulos expliciten sus decisiones para incluir o no un elemento en alguna categoría, no obstante, no hacen alusión al estudio cuantitativo y la relación jerárquica e inclusiva que es fundamental en el estudio de la clasificación. Respecto al discurso y a las preguntas propuestas para el EP, y la cantidad de información que contienen, los manuales invitan que el adulto otorgue información que en parte, resuelve el problema, quizá con el propósito de evitar el error. Respecto a la gestión del error. Pese a lo anterior, sugieren que al enfrentarse a un error, el EP omita dicha respuesta y/o guíe u oriente al párvulo hasta que resuelva el problema, inhibiendo el poder y el rol del error en el aula infantil. En general, las actividades no son presentadas en el contexto de la resolución de problemas, siendo esta, una competencia fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Por lo general, los manuales sugieren que a los párvulos, se les presente la clasificación bajo la definición de agrupar y/o inclusión de elementos. Así también, la idea de ordenar es utilizada como un sinónimo de clasificar. Consideran además, que las categorías y el lenguaje, es el lenguaje matemático y que por tanto, deben ser tratados didácticamente como un aprendizaje. En su mayoría, las actividades que se proponen invitan al párvulo a comparar y no a clasificar, considerando que cuando esto sucede, solo lo hacen bajo un atributo y para él, dos criterios. En su defecto, las actividades sugieren solo una selección de objetos para ver si pertenecen o a dicha categoría. En general, los manuales no sugieren el estudio apropiado de la noción de clasificación, pues no invitan a que el párvulo se cuestione la relación jerárquica entre las categorías y las subcategorías y/o la relación cuantitativa entre las partes y el todo, y privilegian, el mero estudio comparativo de las cualidades de los elementos y su pertenencia o no a las categorías, sin exigir por último, una inclusión de más atributos, con el objetivo de promover clasificaciones jerárquicas y/o particionales, que de algún modo, dan cuenta de un razonamiento lógico matemático, pero no en el sentido piagetano.

References

- [1] Castorina, J. & Palau, G., 1981. Introducción a la lógica operatoria de Piaget. Alcances y significado para la psicología genética. : Barcelona: Paidós.
- [2] Chamorro, C. (Ed.), (2005). Didáctica de la matemática. Colección infantil. Madrid: Pearson.
- [3] Piaget, J., 1978. La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo. España: XXI Editores.
- [4] Piaget., J & Inhelder B., (2007). Psicología del niño. Madrid: Morata. (Trabajo original publicado 1969)
- [5] Mineduc, 2005. Bases Curriculares de Educación Parvularia. Chile.

LXXXVI ENCUENTRO ANUAL
Sociedad de Matemática de Chile
SESIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

LA TEORÍA MODOS DE PENSAMIENTO DE
SIERPINSKA.
NUEVOS ENFOQUES Y TENDENCIAS

MARCELA PARRAGUEZ *

Abstract

Se presenta esta comunicación con base en la Teoría los Modos de Pensamiento de Sierpinska [1], a través de dos momentos.

Un primer momento que sitúa los modos de pensamiento –sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural– en el contexto que fueron creados por Sierpinska, esto es, en el álgebra lineal, con la finalidad de hacer explícito el pensar teórico por sobre el práctico [2], de los conceptos de ese fragmento de la matemática, para alcanzar a los aprendices un nivel superior de abstracción de estos tópicos. Cabe destacar que estos tres modos de pensar y entender los objetos matemáticos del álgebra lineal, no solo constituyen formas de entenderlos, sino también actúan como herramientas heurísticas al resolver problemas.

Un segundo momento, muestra través de ejemplos en otros contextos de la matemática [3], que estos tres modos de **pensamiento** constituyen un modelo de comprensión de los objetos matemáticos, al precisar sus coordinaciones o articuladores en el ir y venir de un modo a otro. Estos articuladores, que permiten transitar de un modo a otro son propios y específicos para cada concepto ([4], [5], [6]), sin embargo ellos dependen de los tipos de relaciones y objetos que los aprendices evocan al momento de resolver una situación problema. Esto último, ha permitido consolidar la extensión y enfocar los modos pensar hacia otros dominios de la matemática, –como la noción de derivada en lo local– en sus modos sintético-geométrico- convergente, analítico-operacional y analítico-estructural [7].

Es importante resaltar, que la adherencia o variedad de esta Teoría de la Didáctica de la Matemática, brinda elementos que permiten describir la comprensión de un objeto matemático en cada modo de pensar, pero ella en sí, no proporciona los elementos que actúan como articuladores entre los modos teóricos y prácticos, sin embargo la matemática o su uso los puede proporcionar . . . y para eso hay que investigar!!.

*Parcialmente financiado por el proyecto DI Regular 039.431/2017, e-mail: marcela.parraguez@pucv.cl

References

- [1] Sierpinska, A. *On some aspects of students' thinking in linear algebra*. En J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers (2000), pp 209–246.
- [2] Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra*. *Reporte de Investigación*. Montreal, Canadá: Concordia University, (2002).
- [3] Parraguez, M. *Teoría los modos de pensamiento*. *Didáctica de la Matemática*. Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, (2012).
- [4] Bonilla, D., Parraguez, M., & Solanilla, L. *Las cónicas: Una propuesta didáctica desde la teoría de Modos de Pensamiento*. *Revista de Educación Matemática RECHIEM*, **1** No. 7 (2013), pp 89–96.
- [5] Randolph, V. y Parraguez, M. *Comprensión de los números complejos desde los modos de pensamiento*. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, No. 28 (2015), pp 401–409.
- [6] Astorga, M. & Parraguez, M. *Comprensión de las cónicas a través de los modos de pensamiento-Avance de Investigación*. *Revista Chilena de Educación Científica*, **2** No. 13 (2014), pp 19–24.
- [7] Pinto, I., y Parraguez, M. *Elementos articuladores para los modos de comprender el concepto de derivada*. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., No. 29 (2016), pp 124–129.

LXXXVI ENCUESTRO ANUAL
Sociedad de Matemática de Chile
SESIÓN DE DIDACTICA DE LA MATEMÁTICA

Estudio de Clases para el desarrollo de la estrategia de
componer 10 en estudiantes de primer grado de enseñanza
básica

RAIMUNDO OLFOS, SERGIO MORALES *
SOLEDAD ESTRELLA, TATIANA GOLDRINE, AMEY PINTO †

Abstract

La capacidad de contar en el sistema de numeración decimal es importante para el desarrollo del sentido del número de los estudiantes. Sin embargo, privilegiar el conteo como estrategia única para resolver problemas relativos a adiciones no prepara a los estudiantes para progresar en habilidades de cálculo más complejas y avanzadas (Cheng, 2011). El investigador Garnett (1992) afirma que la fluidez en el cálculo mental está relacionada con la memorización de algunas sumas elementales, como aquellas que componen el número 10. La adquisición de la automaticidad en cálculos mentales es fundamental para el desarrollo de habilidades superiores, esto implica que la respuesta debe ser recordada por el estudiante más que derivarla de acciones de cálculo mental (Crawford, 2003). El presente trabajo da cuenta de un Estudio de Clases en que se diseña e implementa una lección de composición y descomposición de números en estudiantes de primer grado, como estrategia de cálculo mental. El objetivo de la clase diseñada buscaba que los estudiantes aprendieran y valoraran el uso de la estrategia de componer 10 para agilizar el cálculo mental de adiciones de dos números de un dígito que suman desde 11 a 18. Se muestra el análisis del diseño de las actividades de enseñanza presentadas durante la clase y los materiales empleados en ella, explicando la justificación de su pertinencia y relevancia para la enseñanza del número en los primeros grados. Además se incluye el análisis a priori y a posteriori el análisis de la implementación de la clase, profundizando en las respuestas de los estudiantes.

References

- [1] Garnett, K. (1992). Developing fluency with basic number facts: Intervention for students with learning disabilities. , 7(4), 1-14.
- [2] Crawford, D. B. (2002). Mastering math facts in your classroom. Eau Claire, WI: Otter Creek Institute.

*AGRADECIMIENTOS: FONDECYT N1171076, FONDECYT N1140472, CONICYT 2016-21161378, e-mail: raimundo.olfos@pucv.cl

†e-mail: soledad.estrella@pucv.cl

- [3] Cheng, Z. J. (2012). Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 29-47.

Niveles de razonamiento y habilidades geométricas en
estudiantes de educación secundaria. Propuesta para atender
a la diversidad de género

SANTIBAÑEZ ALEXANDRA; HENRIQUEZ GONZALO;
MAUREIRA FELIPE; ARAVENA D. MARÍA *

Abstract

Esta investigación está enfocada a mejorar el nivel de razonamiento geométrico y a fomentar el desarrollo de habilidades matemáticas en estudiantes de secundaria mediante una secuencia de problemas basados en el modelo de Van-Hiele (Jaime, 1993). Se toma como base la problemática existente en los establecimientos municipales con alto porcentaje de vulnerabilidad donde los estudiantes presentan un bajo razonamiento geométrico (Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2016), así como también la diferencia de género en los rendimientos tanto de las pruebas internacionales PISA (2012, 2015) y TIMMS (2015) como en la prueba nacional SIMCE (2015, 2016). Para la propuesta se construyeron los dispositivos de control (pretest y postest) y la secuencia didáctica en base al modelo de Van Hiele. En el diseño de las actividades se consideró las habilidades declaradas por el MINEDUC y los procesos claves de la actividad geométrica que corresponden a la visualización y razonamiento (Fischbein, 1993; Hershkowitz, 1998; Presmeg, 2006; Duval, 2006). Los tests y la secuencia didáctica se implementarán en un curso de primero medio de un establecimiento municipal de Talca, que presenta un índice de vulnerabilidad del 70,4%. Para caracterizar los niveles de razonamiento geométrico y de las habilidades que colocan a prueba los estudiantes, incluyendo la variable género, se utilizará una metodología de corte cuantitativa y en el análisis de los datos la propuesta de Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991).

Palabras claves: Razonamiento geométrico, Habilidades geométricas, Modelo de Van-Hiele, Educación secundaria.

References

- [1] Aravena, D. M.; Gutiérrez, A.; Jaime A. (2016), Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de enseñanza vulnerables de educación media en Chile, Revista Enseñanza de las Ciencias, 34.1 (2016): 107-128
- [2] Fischbein, Efraim (1993), The theory of figural concepts, Educational Studies in Mathematics, vol. 24, núm. 2, pp. 139-162.

*Facultad de Ciencias Básicas Universidad Católica del Maule, Talca

- [3] Jaime, Adela (1993), Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento, Tesis de doctorado, Valencia, Universidad de Valencia (España).
- [4] Hershkowitz, Rina (1998), About Reasoning in Geometry, en Carmelo. Mammana y Vinicio Villani (eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp. 29-37.
- [5] Duval, Raymond (2006), A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, Educational Studies in Mathematics, vol. 61, núm. 1-2, pp. 103-131
- [6] Gobierno de Chile- Agencia Calidad de la Educación (2014). Informe nacional resultados Chile PISA 2012, Santiago de Chile, Ministerio de Educación en: https://s3.amazonaws.com/archivos.agenciaeducacion.cl/documentos-web/Estudios+Internacionales/PISA/Informe_Nacional_Resultados_Chile_PISA_2012.pdf (consulta: 15 de marzo de 2016)
- [7] Gobierno de Chile- Agencia de la Calidad de la Educación (2016). PISA 2015, Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes OCDE, en http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_PISA2015.pdf. (consulta: 15 de abril de 2017).
- [8] Gobierno de Chile- Agencia de la Calidad de la Educación (2016). TIMSS 2015, Resultados, en http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_TIMSS2015.pdf. (consulta: 15 de mayo de 2017). Gobierno de Chile- Agencia de la Calidad de la Educación (2016). Resultados SIMCE 2015. En <http://www.agenciaeducacion.cl/estudios/investigacion/> (consulta 25 de Septiembre de 2016)
- [9] Gobierno de Chile- Agencia de la Calidad de la Educación (2017). Resultados SIMCE 2016. En <http://www.agenciaeducacion.cl/estudios/investigacion/> (consulta Septiembre de 2017)
- [10] Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Fortuny, J. M. (1991), An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, Journal for Research in Mathematics Education 22(3), pp. 237-251
- [11] Presmeg, Norma (2006), Research on visualization in learning and teaching mathematics, en Ángel Gutiérrez y Paolo Boero (eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, UK, Sense Publishers, pp. 205-236.
- [12] Vinner, Shlomo y Rina Hershkowitz (1983), On concept formation in geometry, Zentralblatt fr Didaktik der Mathematik, vol. 83, núm. 1, pp. 20-25.

PARADIGMAS DOMINANTES E IDENTIDAD
DISCIPLINAR EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL
PROFESOR DE MATEMÁTICAS. EL CASO DE UN
PROGRAMA DE LA USACH

DANIELA SOTO SOTO* HÉCTOR SILVA CROCCI†

Abstract

Esta presentación reporta por etapas la estructura general de un proyecto de investigación, desarrollado bajo la óptica disciplinar de la Matemática Educativa, que pretende pesquisar elementos que generen un diálogo interdisciplinario entre académicos que conforman el cuerpo docente del programa de Pedagogía y Licenciatura en Educación de Matemática y Computación (PLEMC), de la Universidad de Santiago de Chile. Desde una perspectiva que cultiva la construcción social del conocimiento matemático, se hablará de caracterizar los paradigmas epistemológicos que subyacen en los campos disciplinares que conforman dicho programa, en pos de generar un diálogo entre dichos paradigmas para fortalecer la formación inicial de los futuros profesores de matemática. Se parte de la hipótesis de que en el programa curricular de PLEMC interactúan al menos tres campos disciplinares, estos son: la Matemática; la Educación; y la Matemática Educativa. Cada uno de estos campos, a través del discurso de sus académicos, expresa que debe saber el estudiante de formación inicial [1]. En una primera etapa, se caracterizó los elementos necesarios para levantar la información. Esto se tradujo en la planificación de un seminario denominado diálogo, en el cual se invitaron a seis académicos del programa que representan los diferentes campos disciplinares. El seminario constó de reuniones quincenales de demarcaron los temas matemáticos a tratar. En este sentido, el foco medular del diálogo fue la problematización de las argumentaciones del cálculo. Para tal cometido se seleccionaron tres situaciones que buscan resignificar algunas nociones del cálculo, esto es: lo parabólico, lo asintótico y la linealidad del polinomio. Se planificó que la presentación de cada situación fuese dirigida por uno de los grupos de académicos que representen a cada campo disciplinar. La situación de la parábola fue presentada por los académicos que cultivan el campo de la Educación; la situación de lo asintótico por los académicos del campo de la Matemática; y la situación de la linealidad del polinomio por los académicos del campo de la Matemática Educativa. En la segunda etapa se desarrolló el seminario permitiendo levantar datos audiovisuales de los diálogos, así como transcripciones de los acontecimientos discursivos que se expresaron in situ. Se contó con la participación de una observadora no participante, quien formuló las bitácoras del seminario. En la

*Universidad de Santiago de Chile e-mail: Daniela.Soto.Soto@usach.cl

†Universidad de Santiago de Chile e-mail: hector.silva.c@usach.cl

tercera etapa del proyecto se organizaron los datos, lo que contó con la transcripción de los diálogos de los académicos ante las situaciones que problematizaron las situaciones del cálculo. Esto se desarrolló bajo una perspectiva denominada análisis crítico del discurso [2]. En este sentido, de los diálogos generados en los seminarios, se sistematizaron significados locales y globales de los discursos de los académicos. Con ello se han caracterizado las primeras aproximaciones a los paradigmas que subyacen en los campos que articulan el programa en estudio, con el propósito de generar lineamientos que organicen una identidad disciplinar en los futuros profesores de matemática.

References

- [1] Soto, D. El campo de la formación del profesor de matemáticas y la exclusión de la construcción social del conocimiento matemático: el caso de un programa específico.
- [2] C. Dolores-Flores, M. García-González, J. Hernández y L. Sosa. *Matemática Educativa: la formación de profesores* (2013), pp117-pp136.
- [3] Van Dijk, T. La multidisciplinaridad del análisis crítico del discurso: un alegato en favor de la diversidad. *En Métodos de análisis crítico del discurso* (2003), pp143-pp177.

Formulación y coherencia de tareas matemáticas escolares diseñadas por profesores en formación

Macarena Valenzuela Molina, Elisabeth Ramos Rodríguez

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Este estudio analiza las tareas matemáticas escolares diseñadas por profesores de enseñanza básica en formación en una universidad chilena. Se estudian según la formulación de acuerdo a la estructura de la clase: inicio, desarrollo y cierre; y a la coherencia con el objetivo propuesto, para ello examinaremos las producciones de un grupo de estudiantes que se centró en el tratamiento de las fracciones. Indagamos en dos momentos durante un curso de didáctica de la matemática, antes y después de realizar el ciclo de análisis didáctico, con ello hemos evidenciado mejoras en la estructura de la clase y la coherencia con el objetivo planteado, como la explicitación del objetivo y la relación directa de la tarea con éste, además de la explicitación de los tres momentos de inicio, desarrollo y cierre que permiten una progresión en el planteamiento de las tareas.

Palabras claves: Formación de profesores, tareas matemáticas escolares, coherencia, análisis didáctico.

Uno de los objetivos relevantes en la formación inicial docente (FID) es desarrollar el conocimiento profesional consistente en la selección, análisis y gestión de tareas escolares, pues movilizan diferentes capacidades en los escolares, contribuyendo al desarrollo de competencias matemáticas (Lupiáñez, 2005; Ponte, 2013), buscando conseguir una enseñanza efectiva en los escolares (Flores, Gómez y Marín, 2013). Desde esta problemática presente en la FID, es que nos hemos planteado analizar tareas matemáticas escolares diseñadas por profesores de enseñanza básica en formación en una universidad chilena, según la formulación y la coherencia de ésta con el objetivo propuesto. Nuestro primer referente conceptual es el análisis didáctico (Rico, 2013) considerado como una de las herramientas que permite al profesor seleccionar, diseñar y secuenciar las tareas de tal manera de fortalecer los aprendizajes. Luego del diseño del primer plan de clases, los futuros profesores realizan el análisis didáctico (Rico, 2013). En él realizan un análisis a priori de los conceptos, epistemología y un estudio socio crítico de la historia del concepto matemático en cuestión (análisis conceptual), además de profundizar en la estructura matemática (análisis de contenido) y análisis de las expectativas, oportunidades de aprendizaje, errores y obstáculos de los conceptos matemáticos (análisis cognitivo). Luego diseñan una secuencia didáctica y la implementan (análisis de instrucción), para finalmente reflexionar sobre todo el ciclo y mejorar aspectos específicos de su práctica docente. El segundo referente conceptual corresponde a la formulación (inicio, desarrollo y cierre) y coherencia de las tareas matemáticas escolares, indicadores caracterizados por Ramos (2014). Desde el paradigma cualitativo, con un enfoque descriptivo interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), analizaremos las tareas matemáticas escolares sobre fracciones, diseñadas por un grupo de estudiantes de penúltimo año (octavo semestre) de Educación Básica de una universidad chilena. Ellos debían proponer dos planes de clases. Un plan de clases al iniciar el curso, luego llevar a cabo el análisis didáctico, para finalmente proponer un plan de clases final. Estas dos planificaciones son los instrumentos de recogida de datos. Indagamos a través del análisis de contenido utilizando como unidades referenciales los conjuntos de párrafos que tienen conexión o idea en común (Flick, 2004).

Las categorías de análisis que utilizamos surgen de los indicadores propuestos por Ramos (2014), tenemos entonces la formulación y la coherencia de la tarea con el objetivo propuesto, donde pueden surgir categorías emergentes. El análisis de datos fue fortalecido a partir de la triangulación de expertos, a saber, las investigadoras a cargo del estudio.

Resultados

Los resultados se plantean detallando las tareas propuestas en el plan de clases inicial y final.

Plan de clases inicial

En la primera planificación el objetivo propuesto es “demostrar que comprenden las fracciones propias: comparando fracciones propias con igual y distinto denominador de manera concreta, pictórica y simbólica” (MINEDUC, 2012), en donde se plantea dos tareas centrales. La primera presenta la manipulación de una hoja, consistente en dobleces, primero se pregunta a qué fracción corresponden las partes, para finalmente preguntar por la comparación de las fracciones resultantes al doblar la hoja, ésta última coincide con el objetivo propuesto para diseñar la clase. La segunda tarea consiste en el uso de un juego con tarjetas basada en la correspondencia entre su representación pictórica y simbólica. Ambas tareas no presentan un hilo conductor, ni muchos menos una estructura de inicio, desarrollo y cierre. Además se puede observar que la primera tarea abarca más allá

del objetivo propuesto, pero ésta no se conecta con la tarea siguiente sobre las tarjetas. Este diseño de tareas no posee una formulación de inicio, desarrollo y cierre, no hay conexión entre una tarea y otra y no tiene coherencia con el objetivo específico de la clase según lo planteado para su diseño, sino más bien se diseñan varias subtareas que van más allá del objetivo de clase

Plan de clases final

Durante el desarrollo del análisis didáctico, el grupo diseña una nueva clase de fracciones, con un objetivo distinto a la primera clase (el nuevo objetivo es: ejercitar suma y resta de fracciones, su representación simbólica y pictórica problematizando por medio del juego: lotería fraccionaria), pero con una estructura acorde a lo formulado por el MINEDUC (2012), de acuerdo al inicio, desarrollo y cierre de una clase, ya que se evidencia la preocupación por establecer momentos y tiempos específicos de trabajo con metas acordes al objetivo planteado, lo que permite señalar que la tarea diseñada es coherente con el objetivo de la clase. Además se puede observar que cada una de las subtareas propuestas durante la clase, conllevan al logro del objetivo.

Conclusiones

Luego de analizar los cambios entre un plan y otro, es apreciable que existe una mejora, pues en la primera clase no hay formulación en inicio, desarrollo y cierre, mientras que en la segunda clase es explícito. Con lo que respecta a la coherencia entre el objetivo de la clase y las tareas propuestas, es un ámbito no logrado en el primer plan de clases, porque las tareas van más allá del objetivo, sin embargo, en el segundo plan de clases se evidencia coherencia, ya que hay una progresión en cada una de las tareas, lo que permite ir avanzando en dificultad de tal manera de lograr el objetivo final de la clase. Este último aporte es prueba del apoyo del análisis didáctico, ya que este análisis otorgó un conocimiento profesional que permite diseñar, implementar y evaluar clases coherentes al objetivo y con una formulación apta en Chile como lo afirma Rico (2013). Este trabajo espera aportar a la formación de futuros docentes desde una mirada curricular con el método de análisis didáctico, centrándonos en aspectos específicos de la labor fundamental docente, la planificación de clases, su diseño, implementación y evaluación, lo que permite focalizarse en el logro de los aprendizajes de los alumnos en el aula escolar.

Referencias

- Flores, P., Gómez, P. y Marín, A. (2013). *Apuntes sobre análisis de instrucción*. Módulo 4 de mad. Documento no publicado (documentación). Bogotá: Universidad de los Andes.
- MINEDUC (2012). *Matemática, programa de estudio quinto año básico*. Santiago, Chile: Ministerio de educación de Chile.
- Lupiáñez, L. (2005). *Objetivos y fines de la educación matemática*. Capacidades y competencias matemáticas. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico, Málaga
- Ponte, J. P. (2013). *Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas*. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 93- 98). Barcelona: Graó.
- Ramos, E. (2014). *Reflexión docente sobre la enseñanza del álgebra en un curso de formación docente*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.
- Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11-27.

Propuesta de enseñanza para el desarrollo de la habilidad de modelización en el dominio del aprendizaje geométrico y algebraico para estudiantes de 4o básico

VANESSA ZÚÑIGA MEJÍAS *

Abstract

Vivimos en una época donde la resolución de problemas a través de la construcción de modelos pueden motivar el proceso de aprendizaje y desarrollar de una forma más integral la capacidad de los estudiantes de relacionar la situación matemática con fenómenos de la vida real, los cuales necesitan ser interpretados y evaluados de forma crítica (Aravena y Caamaño, 2007; Blomhj , 2004; Niss, 1989; Blum y Borromeo, 2009). Con respecto a lo anterior, en nuestro país existe un escaso desarrollo de la implementación de modelos matemáticos en todos los niveles de enseñanza, esto es producto del poco trabajo desarrollado en base a la resolución de problemas, la falta de reciprocidad de las matemáticas con otras áreas del conocimiento y la escasa preparación del profesorado en esta metodología (Aravena, 2001; Aravena, Caamaño y Giménez, 2008). Atendiendo a estas consideraciones, la presente investigación propone analizar las habilidades que presentan los estudiantes de cuarto básico cuando son formados en procesos de modelización a través de la implementación de una propuesta didáctica que incorpora diversos temas del aprendizaje geométrico y algebraicos. La metodología se adscribirá a un enfoque mixto, el cual utilizará el enfoque cuantitativo y cualitativo de forma independiente. El procedimiento a utilizar para seleccionar la muestra será de tipo no probabilístico, lo cual incluye en la muestra a los sujetos que son de fácil disponibilidad. Por las características la investigación, se puede establecer que el diseño se aproxima a un estudio de caso, ya que no se pretende realizar generalizaciones, más bien, es una metodología útil para la reflexión, que favorecería la práctica tanto personal como profesional, además de ser un estudio que pueda ser mejorado en el futuro.

References

- [1] Aravena, M. (2001). Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica. Tesis Doctoral. Departament de Didáctica de la Matemática i de les Ciències Experimentáis. Universitat de Barcelona, España.
- [2] Aravena, M. y Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. Estudios pedagógicos (Valdivia), 33(2), 7-25.

*Universidad Católica del Maule

- [3] Aravena, M., Caamaño, C., y Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(1), 49-92.
- [4] Aravena, M., Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba, R., y Zúñiga, J. (2006). *Investigación educativa I*. Santiago: Universidad ARCIS.
- [5] Arrieta, J. y Díaz, L. (2016). *Investigaciones latinoamericanas en modelación matemática educativa*. Ciudad de México: Gedisa.
- [6] Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling. In *International perspectives on learning and teaching mathematics*. National Center for Mathematics Education.
- [7] Blum, W. y Borremeo, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45-58.
- [8] Agencia de Calidad de la Educación (2016). Santiago, Chile: Estudios Internacionales. Recuperado 12 agosto de 2016 de <http://www.agenciaeducacion.cl/estudios/estudios-internacionales/estudios-desarrollados/>
- [9] Informe, P. I. S. A. (2012). Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. Recuperado 19 agosto de 2016 de <https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-spain-ESP.pdf>