Modelos matemáticos

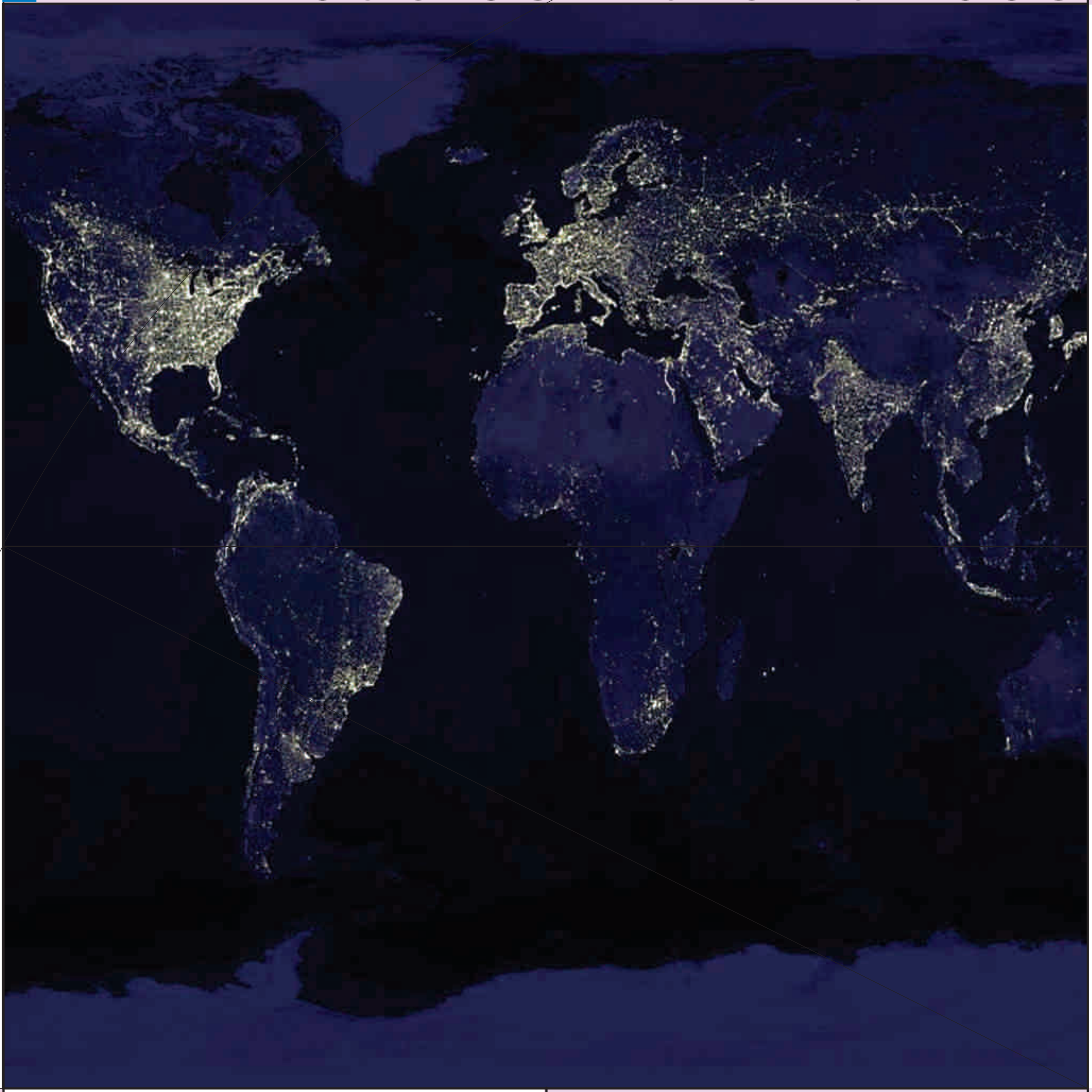


Imagen nocturna satelital

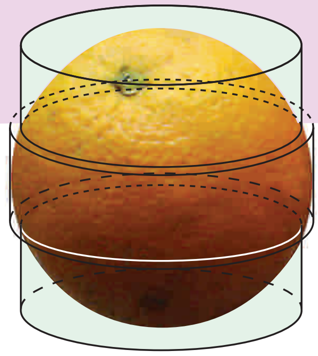
En esta imagen podemos visualizar los niveles de población de las ciudades del planeta Tierra por la cantidad de luz que éstas irradian de noche.

"Parece ser uno de los rasgos fundamentales de la naturaleza el que las leyes físicas se describan en términos de una teoría matemática de gran belleza y poder, necesitándose unas matemáticas enormemente elevadas para entenderlas. Se puede uno preguntar: ¿por qué la naturaleza está construída a lo largo de estas líneas? Solamente se puede responder que nuestro conocimiento presente parece mostrar que la naturaleza está construída de esta forma. Lo único que podemos hacer es simplemente aceptarlo".

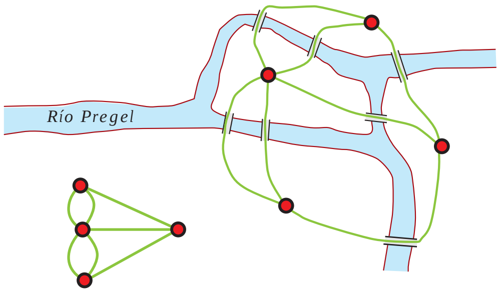
Paul A. M. Dirac
Físico británico
(1902-1984)
Premio Nobel
de Física en 1933.

Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web: **http://www.fpolar.org.ve/matematica2**

Modelos matemáticos

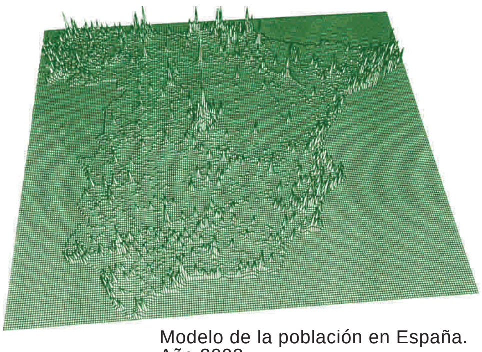


El proceso de calcular el volumen de una naranja, suponerla de forma esférica o considerarla seccionada y cada sección inscrita en un cilindro, se corresponde con una simplificación y abstracción de la realidad. Este es un ejemplo de **modelo estático**.



De igual forma, el grafo creado por Euler, presentado antes para esquematizar el problema de los 7 puentes, es un ejemplo de modelo matemático: es una abstracción de la ciudad y de los puentes y una simplificación del fenómeno real. El modelo refleja, sin embargo, los aspectos sustanciales que son relevantes a la situación en estudio.

Una definición de modelo matemático es la siguiente: **un modelo matemático** es una construcción matemática abstracta y simplificada relacionada con una parte de la realidad y creada para un propósito particular. Así, por ejemplo, un gráfico, una función o una ecuación pueden ser modelos matemáticos de una situación específica.



Modelo de la población en España. Año 2002.

Las bondades de un modelo dependerán de la situación a ser modelada y del problema planteado. Diferentes modelos de una misma situación producirán diferentes simplificaciones de la realidad y, en consecuencia, dan lugar a distintos resultados. También, un mismo modelo puede servir para distintas situaciones. Por ejemplo, la función $f(t) = Ke^{rt}$ puede modelar tanto el crecimiento durante el tiempo t de una población que posea inicialmente K individuos con una tasa instantánea relativa de crecimiento r; así como puede modelar la capitalización continua de una suma de dinero K colocada al r% durante el tiempo t, para lo cual basta reinterpretar las constantes y variables de acuerdo al contexto específico.

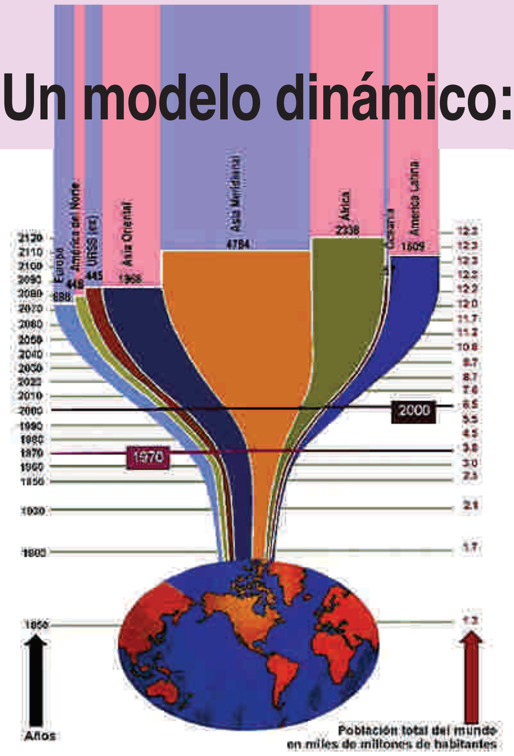
Existen diferentes tipos de modelos matemáticos: discretos, continuos, dinámicos, estáticos,…

Un esquema que representa bastante bien el proceso de modelado matemático es el siguiente:

Interesante

Una característica resaltante del proceso de modelado matemático, la cual lo distingue de otros procesos matemáticos, es que las más de las veces la persona que debe desarrollar un modelo posee información incompleta y aún las preguntas a ser respondidas pueden ser vagas.

Un modelo dinámico: Crecimiento de la población mundial



Situación D

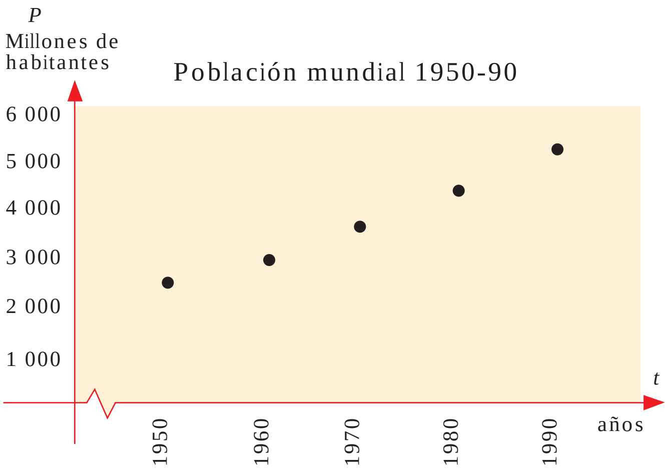
Si hemos recopilado datos sobre la población mundial ¿qué podemos hacer con ellos para **construir un modelo** que describa el comportamiento del crecimiento de la población y que permita, entre otras cosas, hacer **predicciones**?

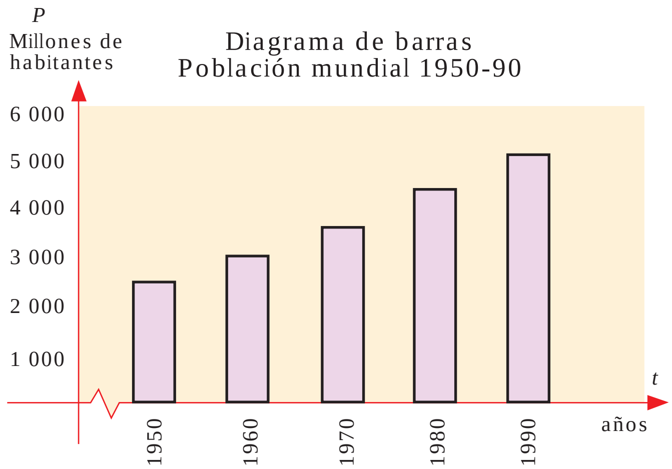
Población Mundial	
Año	**Población**
1950	2 555 360 972
1960	3 039 669 330
1970	3 708 067 105
1980	4 454 389 519
1990	5 284 679 123

Fuente: U.S. Bureau of the Census, International Data Base.

En primer lugar se puede observar que en los datos están presentes **dos variables**: el **tiempo** t y el **número de habitantes** (población), que denotamos por P). Como la población varía al transcurrir el tiempo, el **modelo es dinámico**: $P = P(t)$.

- Inicialmente podemos representar en forma gráfica los datos para determinar si tienen algún comportamiento especial que ayude a dar respuesta a la pregunta formulada.





Observamos que la población se ha incrementado en los períodos considerados. Sin embargo, estos gráficos no permiten hacer predicciones sobre la población en años posteriores a 1990.

- Para determinar si existe un patrón en los datos, podemos calcular, por ejemplo, las diferencias (variación absoluta de la población entre períodos consecutivos), el crecimiento promedio cada 10 años (crecimiento interanual) y luego hacer el cálculo relativo porcentual respecto de la población al inicio del periodo, así como el cociente entre datos consecutivos.

Año	**Población**	Variación absoluta en el período $P(t+10) - P(t)$	Tasa media de crecimiento por año en el período $\frac{P(t+10)-P(t)}{10}$	Tasa media de crecimiento relativo por año $\frac{P(t+10)-P(t)}{10P(t)} \cdot 100\%$	Cocientes en el período $\frac{P(t+10)}{P(t)}$
1950	2 555 360 972	484 308 358	48 430 835,8	1,90	1,189 526 40
1960	3 039 669 330	668 397 775	66 839 777,5	2,20	1,219 891 61
1970	3 708 067 105	746 322 414	74 632 241,4	2,01	1,201 269 93
1980	4 454 389 519	830 289 604	83 028 960,4	1,86	1,186 398 07
1990	5 284 679 123				

En principio no se observa ningún patrón en los resultados obtenidos: Sin embargo notamos, por ejemplo, que las variaciones absolutas oscilan entre 484 y 831 millones de habitantes.

Un modelo dinámico: Crecimiento de la población mundial

En el cuadro de población mundial anterior también podemos observar que el crecimiento promedio relativo está entre 1,86% y 2,2 %; y los cocientes entre 1,18 y 1,22. También con estos datos podemos calcular promedios de los resultados obtenidos, por ejemplo:

Promedio crecimiento anual 1950-1990

$$\frac{48\,430\,835{,}8 + 66\,839\,777{,}5 + 74\,632\,241{,}4 + 83\,028\,960{,}4}{4} \approx \mathbf{68\,232\,954}$$

Promedio tasa de crecimiento relativa 1950-1990

$$\frac{1{,}9 + 2{,}2 + 2{,}01 + 1{,}86}{4} \approx \mathbf{1{,}99}$$

Esto significa un crecimiento promedio del 1,99% anual

El modelo que queremos construir debe poseer dos características esenciales. Por una parte, permitir la posibilidad de calcular las poblaciones en años intermedios, es decir **interpolar**; y por otra parte, hacer predicciones sobre poblaciones futuras: **extrapolar**.

Para interpolar podemos usar algunos promedios calculados. Por ejemplo, para el año 1961 consideremos como valor aproximado la población del año 1960 agregándole el promedio interanual entre los años 60 y 70 (66 839 777,5 habitantes):

Población año 1961≈ 3 039 669 330 + 66 839 777,5 = 3 106 509 107,5 habitantes.

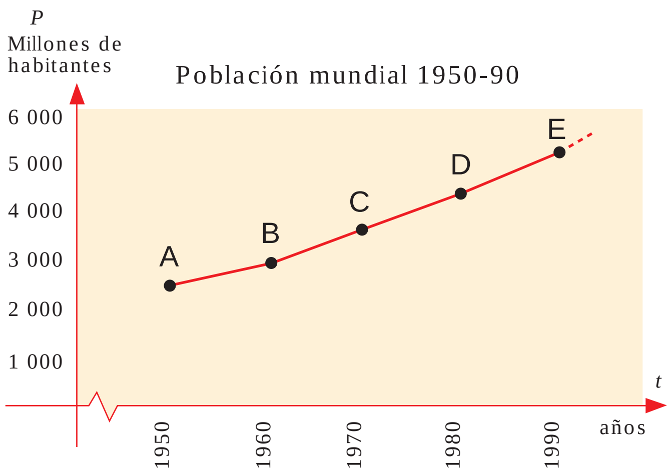
La población mundial real para el año 1961 era de 3 080 461 502 habitantes. De esta manera el error absoluto cometido es:

3 106 509 107,5 - 3 080 461 502 = 26 047 605,5 habitantes.

Y el error porcentual es $\frac{26\,047\,605{,}5}{3\,080\,461\,502} 100 \approx 0{,}85\%$, lo cual es bastante aceptable.

Reto
Calcula la población del año 1961 usando la tasa de crecimiento relativa del período 1960-1970 de 2,2%. Determina el error y el porcentaje del error.

• **Retomemos el primer gráfico.**



Podemos unir los puntos del gráfico con segmentos de recta y hallar las ecuaciones de cada segmento. Por ejemplo:

Ecuación del segmento BC es:

P = 66 839 777,5 (t-1960) + 3 039 669 330

$1960 \leq t \leq 1970$

Ecuación del último segmento DE es:

P = 83 028 960,4 (t-1980) + 4 454 389 519

$1980 \leq t \leq 1990$

Si prolongamos indefinidamente el segmento DE podríamos extrapolar la población para años posteriores a 1990, con valores aproximados. Por ejemplo, la población para el año 2000:

Población año 2000: P≈ 83 028 960,4 (2000 - 1980) + 4 454 389 519 ≈ **6 114 968 727**

Como la población mundial real para el año 2000 era de 6 085 478 778, entonces el error absoluto cometido es 29 489 949 y el error porcentual es 0,48%, que es bastante pequeño.

- Otra manera de proceder es considerar que el **crecimiento anual de la población es constante** en todo el lapso 1950-1990.

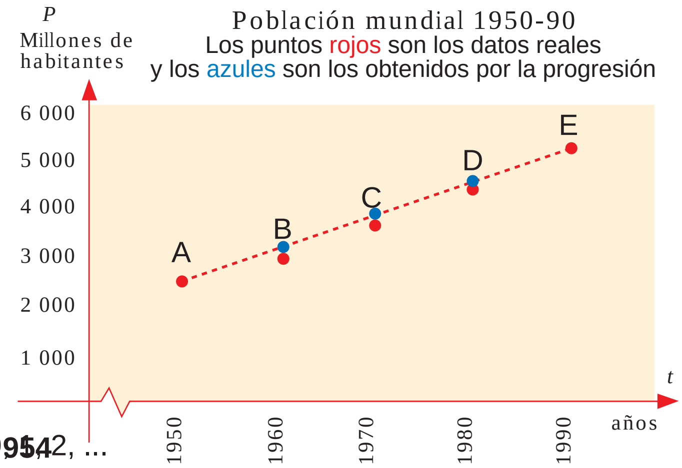
  Por ejemplo podemos fijar como constante al promedio de crecimiento anual **r** = 68 232 954.

  Al tomar como P(t) la población en el año t:

  P(1950)=2 555 360 972

  P(1951)= P(1950+1) = 2 555 360 972 + 68 232 954
  = 2 623 593 926

  P(1952)= P(1952+2) = 2 555 360 972 + 2 • 68 232 954
  = 2 691 826 880



P(1950 + n) = 2 555 360 972 + n • 68 232 954, n = 0, 1, 2, ...

Progresión Aritmética

$$P_n = P_0 + nr$$

Población inicial P_0 = 2 555 360 972

Razón r = 68 232 954

Un Modelo Discreto Lineal del crecimiento de la población mundial

	Comparación de resultados			
	Año	Valor según fuente*	Estimación con P_n	% Error
Interpolación	1955	2 779 968 031	2 896 525 742	4,19
	1961	3 080 461 502	3 305 923 466	7,32
	1972	3 862 348 766	4 056 485 960	5,03
	1987	5 022 989 632	5 079 980 270	1,13
Extrapolación	2000	6 085 478 778	5 967 008 672	1,95
	2020	7 510 699 958	7 331 667 752	2,38
	2040	8 623 136 543	8 696 326 832	0,85
	2050	9 050 494 208	9 378 656 372	3,63

* Fuente: U.S. Bureau of the Census, International Data Base.

Si en lugar de tomar la variable discreta n, que sólo toma valores enteros no negativos, la suponemos variando en el conjunto de los números reales, obtenemos el modelo lineal continuo:

$$P(t) = 68\,232\,954\,(t-1950) + 2\,555\,360\,972$$

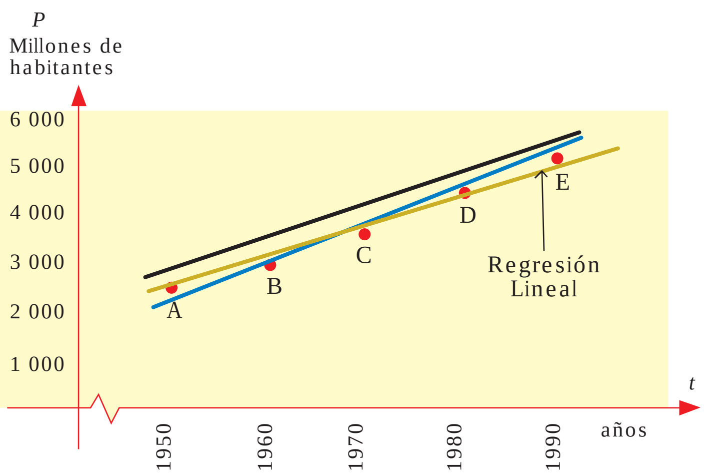
$$t \geq 1950,$$

cuya gráfica es una semirrecta.

Cuando **interpolamos** con $\mathbf{P_n}$ los errores cometidos están en promedio por el orden del **4,42 %**. Sin embargo, en el año 1987 el error es del orden 1,13%. Cuando **extrapolamos** con $\mathbf{P_n}$ los errores cometidos están en promedio por el orden del **2,20%.**

Interesante

Hay varias rectas que pasan "muy cerca" de los puntos A, B, C, D y E. Pero existe una que se obtiene por un método conocido con el nombre de **mínimos cuadrados** llamada **recta de regresión lineal**.
Esta recta es usada frecuentemente para ajustar un conjunto de puntos (nube de puntos) y sirve para interpolar y extrapolar.



Un modelo dinámico: Crecimiento de la población mundial

- Otra manera de proceder es considerar que la **tasa media de crecimiento relativo** es constante en todo el período 1950-1990.

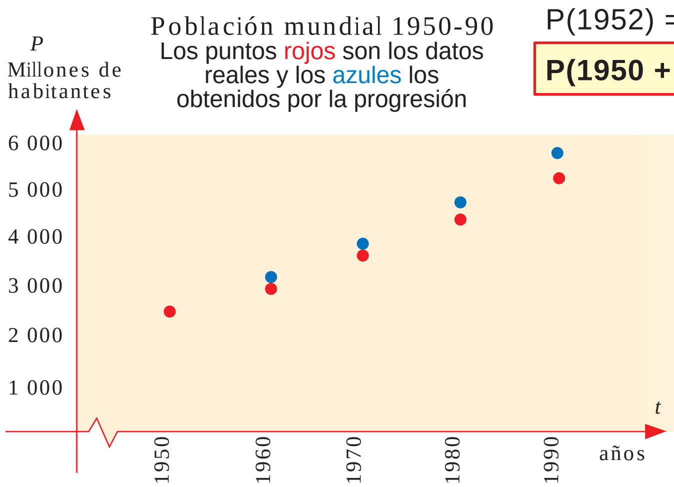
  Podemos fijar como constante al promedio de las tasas crecimiento **r** = 1,99%. De esta manera

  $P(1950) = 2\,555\,360\,972$

  $P(1951) = P(1950) + P(1950) \cdot \frac{1{,}99}{100} = P(1950) \cdot 1{,}0199$

  $P(1952) = P(1950) \cdot (1{,}0199)^2$

  $\boxed{\mathbf{P(1950 + n) = 2\,555\,360\,972 \cdot (1{,}0199)^n\ ,\ n = 1\ ,2,\ ...}}$ n = 0, 1, 2, ...



Progresión Geométrica

$\mathbf{P_n = P_0\,(1{,}0199\,)^n}$

Población inicial

$\mathbf{P_0} =$ 2 555 360 972

Un Modelo Exponencial Discreto del crecimiento de la población mundial

	Año	Valor según fuente*	Estimación con P_n	% Error
		Comparación de resultados		
Interpolación	1955	2 779 968 031	2 819 942 263	1,44
	1961	3 080 461 502	3 173 845 393	5,15
	1972	3 862 348 766	4 800 596 395	24,29
	1987	5 022 989 632	5 297 648 673	5,47
Extrapolación	2000	6 085 478 778	7 261 136 853	19,32
	2020	7 510 699 958	10 150 412 281	35,15
	2040	8 623 136 543	15 053 431 758	74,57
	2050	9 050 494 208	18 332 067 005	102,55

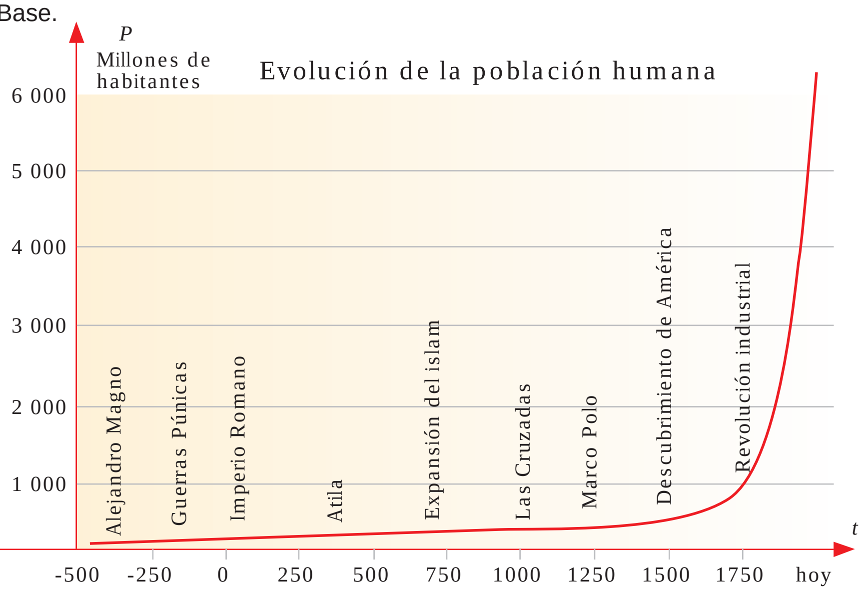
* Fuente: U.S. Bureau of the Census, International Data Base.

Si en lugar de tomar la variable discreta n, que sólo toma valores enteros no negativos, la suponemos variando en el conjunto de los números reales, obtenemos el modelo exponencial continuo:

$\mathbf{P(t) = 2\,555\,360\,972\ (1{,}0199)^{t-1950}}$, $t \geq 1950$

Cuando interpolamos con P_n los errores cometidos están, en promedio, por el orden del 3,53 %.

Cuando extrapolamos con P_n los errores están por encima del 19%, llegando a más del 100% en el año 2050.



Modelos en Venezuela

Entrada al Lago de Maracaibo tomada por satélite de la NASA.

En Venezuela hay diversos institutos de investigación como el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas -IVIC-, Instituto de Estudios Superiores de Administración -IESA-, Instituto de Mecánica de Fluidos de la Universidad Central de Venezuela (IMF-UCV) y de otras universidades, los cuales llevan a cabo la elaboración y aplicación de modelos en distintos campos, como son: la ingeniería, la medicina, la biología, la economía, entre otros.

A continuación se presenta un modelo realizado por el Instituto de Mecánica de Fluidos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela, en el que se estudian principalmente fenómenos hidráulicos sedimentarios, como: flujo y sedimentación en grandes ríos, transporte de sedimentos por chorros, variación del ancho y pendiente de ríos al cambiarle su caudal medio anual, propagación de ondas y dispersión de manchas de petróleo en grandes cuerpos de agua y diseño de barreras neumáticas.

Estos estudios conllevan a formular modelos.

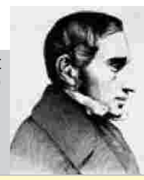
Transporte de arena por chorro de agua (2004)

Realizado por Noemí González, Francisco Marques y Marco Falcón.

Actualmente se investiga el fenómeno en el cual un chorro de agua con sedimento es descargado verticalmente hacia arriba (contra la gravedad) o hacia abajo. Este problema tendrá aplicación en la evolución de descargas desde las dragas que profundizan el lecho del río Orinoco para mejorar las condiciones de navegación fluvial. También es mencionado en la literatura como la explicación de la topografía circundante a volcanes.

En este modelo se utilizan herramientas matemáticas avanzadas de cálculo que conducen a la solución de una gran cantidad de ecuaciones lineales simultáneas (un sistema de ecuaciones lineales), el cual es un problema sencillo para una computadora.

¿SABÍAS QUE...?



Pierre François Verhulst (1804-1849)

A mediados de la década 1830-1840 el biomatemático belga Verhulst trabajó en la construcción de un modelo que describiera el comportamiento del crecimiento de las poblaciones de Francia y Bélgica, concluyendo que dicho comportamiento lo modela una curva, que toma en cuenta las tasas de natalidad y mortalidad de la población y conocida como curva logística, cuya expresión es de la forma:

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a-bP_0)e^{-a(t-t_0)}}$$

donde P_0 es la población inicial, t_0 el momento donde comenzamos a estimar la población, a y b son constante positivas relacionadas con las tasas de natalidad y mortalidad y la influencia del medio ambiente.

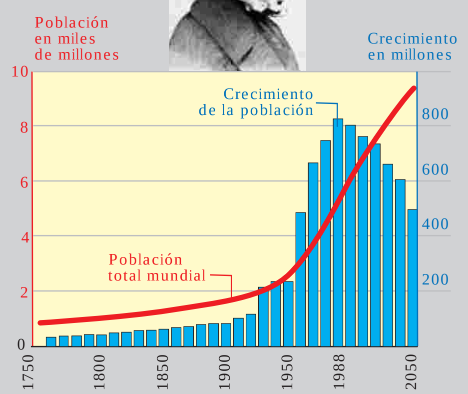
Este tipo de modelo continuo es bastante bueno para estudiar el comportamiento del crecimiento de poblaciones de bacterias, moscas, pulgas, etc, que crecen hasta cierto límite.

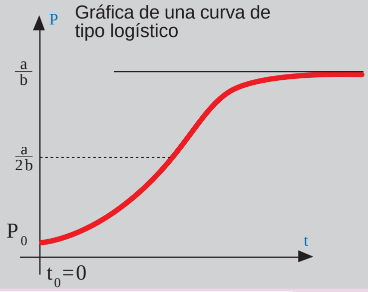
En 1920 R. Pearl y L. Reed, aplicaron este modelo a la población de Estados Unidos, obteniendo la ecuación logística:

$$P(t) = \frac{19\,727\,300}{1+e^{-0,031\,34\,(t\,-\,1\,913,25)}}$$

Con esta ecuación los errores que se cometen al comparar con los censos cada 10 años entre 1790 y 1950 están por el orden máximo del 3,8 %.

Los modelos discretos que miden la evolución de poblaciones parecen ser más exactos que los continuos. Estos modelos fueron introducidos por el biomatemático Robert M. May (1936-) en 1975, para el estudio de poblaciones de insectos, obteniendo una fórmula dada por recurrencia: $P_{n+1} = P_n(\alpha - \beta P_n)$.



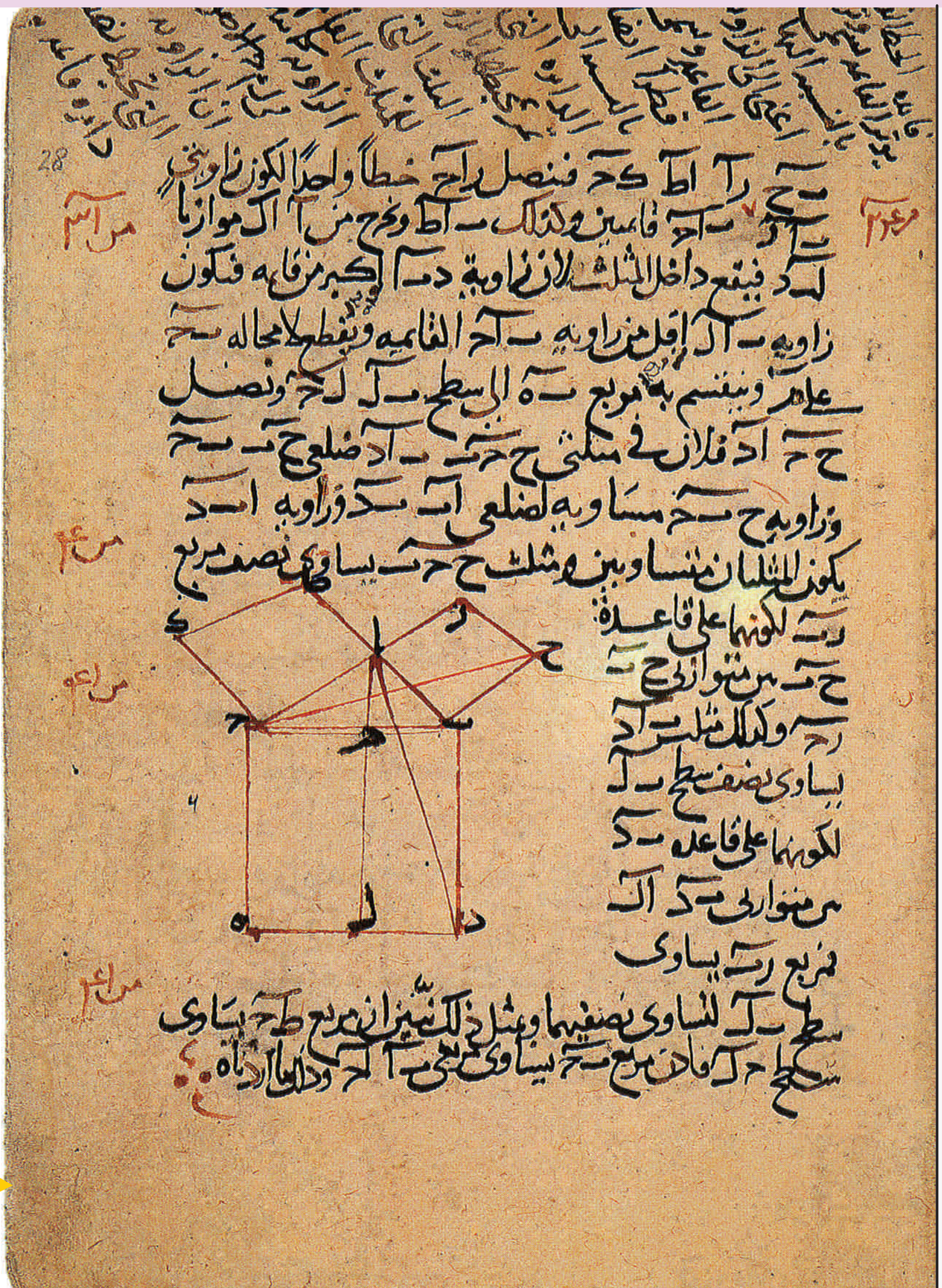


Gráfica de una curva de tipo logístico

La matemática aplicada y los modelos matemáticos: Una breve historia.

"El milagro de la adecuación del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Deberíamos mostrarnos agradecidos por él y esperar que siga siendo válido en la investigación futura y que se extienda, para bien o para mal, para nuestro placer, aunque también tal vez para nuestra perplejidad, a ramas más amplias del saber."

Eugene P. Wigner
Húngaro, (1902-1995).
Premio Nobel de física en 1963.



Discusión del teorema de Pitágoras extraída de un manuscrito árabe. La demostración es la continuación de la de Euclides; la figura característica en forma de "molino de viento" proporciona una ilustración geométrica de la demostración.

La matemática nace en relación directa con el mundo de nuestra experiencia sensible. El origen de sus ideas es el resultado de un proceso que buscó entender y explicar hechos y fenómenos de la realidad. Inicialmente fue el número con los babilonios y sumerios, y a esto se añadió el estudio de la forma con los egipcios y los griegos. De allí surgió la antigua definición de matemática como *la ciencia que estudiaba los números, las magnitudes y las formas*. Ese estudio se organizó en la geometría y la aritmética, a lo cual se agregó, posteriormente, el álgebra como estudio de las ecuaciones algebraicas, cuyo origen está relacionado con la matemática recreativa.

Tiempo remoto

Fue con los griegos que la matemática dejó de ser una colección de técnicas de conteo y de medidas y ellos la consideraron como una actividad intelectual, con sus elementos estéticos y místico-religiosos, y le dieron una organización que tuvo su expresión en *Los Elementos de Euclides* (s. III a.C.) con la incorporación de la deducción, esto es, que los enunciados matemáticos podían ser demostrados lógicamente con argumentos formales, lo que originó *los teoremas y las pruebas*. Esa matemática creció y se expandió en el mundo islámico, hindú y en las riberas del Mediterráneo. Se desarrolló vinculada con la astronomía, la geografía, la cartografía, la navegación, las construcciones civiles y la guerra. La música también formaba parte de esa matemática como lo atestigua la clasificación dada en el *quadrivium*.