LA ENSEÑANZA DE LAS

MATEMÁTICAS

EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Lecturas

PRIMER NIVEL
PROGRAMA DE ACTUALIZACIÓN PERMANENTE

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA | SEP

La enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. Primer nivel. Programa Nacional de Actualización Permanente fue elaborado en la Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal, de la Secretaría de Educación Pública.

Coordinación
Jesús Alarcón Bortolussi
Renato Sergio Rosas Domínguez

Compilación, adaptación y traducción
Alfonso Arriaga Coronilla
Higinio Barrón Rodríguez

Coordinación editorial
María Ángeles González

Cuidado de la edición
Teresa Mira Hatch

Diseño y formación
Arte Inteligente, S.A. de C.V.
Jorge Amaya López
Guadalupe García Domínguez
J. Jesús García Morales
Ricardo Morales Pozos

Diseño de portada
Stega Diseño

Primera edición, 1995
Primera edición revisada, 1996
Cuarta reimpresión, 2001

ISBN 968-29-7519-0

Impreso en México

PRESENTACIÓN

La Secretaría de Educación Pública ha elaborado el presente material, que forma parte del paquete didáctico de Matemáticas, destinado a los maestros que laboran en los planteles de educación secundaria.

Los *paquetes didácticos* son uno de los componentes del Programa Nacional de Actualización Permanente para maestros de educación básica en servicio, el cual desarrollan conjuntamente la SEP y las autoridades educativas de los estados; su propósito es apoyar al personal docente en la puesta al día de sus conocimientos y en el fortalecimiento de sus recursos didácticos, para que alcancen una mayor calidad en el desarrollo de su ejercicio profesional.

Los *paquetes didácticos* son el principal medio para que los maestros de los distintos niveles, grados y asignaturas realicen con éxito programas y cursos relacionados con la aplicación de los planes vigentes de educación básica.

Los maestros podrán utilizar estos materiales de diversas maneras, conforme a sus preferencias y al tiempo del que dispongan: podrán estudiar sistemáticamente de manera individual: organizar grupos autónomos con sus compañeros de trabajo; laborar en grupo con asesoría del personal de centros de formación y actualización de maestros; o participar en cursos escolarizados ofrecidos por instituciones especializadas.

La *Guía de estudio* que forma parte de este paquete didáctico será útil para que el maestro logre sistematicidad y flexibilidad en el estudio y utilización de los diversos componentes de cada paquete: las *Lecturas*, los *Libros para el maestro*, las orientaciones de autoevaluación y otros recursos complementarios.

Los maestros que así lo deseen podrán obtener la acreditación del curso al cual corresponde el presente paquete, que será tomada en cuenta para la Carrera Magisterial y otros mecanismos de estímulo profesional. Con la finalidad de que los maestros tengan las mismas oportunidades, independientemente de la forma de estudio que hayan utilizado, la acreditación será realizada por un órgano técnico, con los criterios objetivos, estandarizados y de validez nacional.

La Secretaría de Educación Pública y las autoridades educativas confían en que este material corresponda a los intereses y las necesidades reales de los maestros en servicio y que sea de utilidad en la elevación de la calidad de la educación que reciben los niños y jóvenes mexicanos.

Secretaría de Educación Pública

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Este libro de *Lecturas* forma parte del paquete didáctico para la actualización de los maestros de Matemáticas de educación secundaria. Contiene diez artículos previamente publicados, cuya referencia se incluye al final de cada uno.

Sus propósitos son:

- Proporcionar información necesaria para el desarrollo de las actividades planteadas en la *Guía de estudio.*
- Brindar elementos que favorezcan una mejor comprensión del enfoque vigente para la enseñanza de las matemáticas, en la educación secundaria.
- Presentar materiales que propicien en el maestro la reflexión sobre su práctica y, en consecuencia, contribuyan a su formación académica y pedagógica.

La selección de materiales no es de ninguna manera exhaustiva. Se realizó a partir de los temas de los programas vigentes tratados en la *Guía de estudio*. Los artículos abordan distintos aspectos de la enseñanza de las matemáticas, como son: la resolución de problemas; la estimación; el proceso de la evaluación; las matemáticas aplicadas a contextos cotidianos; el papel de la calculadora en la enseñanza; los fundamentos didácticos de la probabilidad y el azar; la aplicación de la teoría de Van Hiele a la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria; y la relación entre aprendizaje significativo y constructivismo en la educación matemática.

Para un mejor aprovechamiento del contenido de los artículos, se recomienda al maestro que cada lectura sea analizada a partir de las sugerencias contenidas en la *Guía de estudio*.

I

DOS CONCEPCIONES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Blanca M. Parra

DOS CONCEPCIONES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Blanca M. Parra

Presentación

Este documento es producto del proyecto "Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la educación básica", que con apoyo del CONACYT se desarrolló en dos escuelas primarias (a las que llamaremos A y B), durante el año escolar 1988-1989. El proyecto fue coordinado por investigadores del Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV y en él participé como investigadora.

Para llevar a cabo el proyecto se planearon y desarrollaron talleres mensuales con los maestros de cada una de las escuelas, así como observaciones de clase, una por mes y por maestro, de algunos de esos mismos maestros. Durante los talleres se propusieron a los maestros problemas para ser resueltos por ellos mismos y lecturas acerca de las características de los problemas escolares y las modificaciones posibles de estas características, el trabajo en equipo, la importancia de la confrontación de las estrategias producidas por los alumnos en la resolución de un problema, etc. Las estrategias y las soluciones de los maestros a los problemas propuestos, y sus reflexiones en torno a los materiales de lectura, fueron el objeto de las discusiones dentro de los talleres.

Siendo pues **el problema** el objeto central de este proyecto, en este documento trataremos de caracterizarlo, en un sentido amplio, y de caracterizar también las etapas por las cuales atraviesa su resolución. Coincidimos con Halmos y Krygowska en que el problema es "el corazón de la actividad matemática" (citados por Bouvier, 1981) y con Brousseau (1983) en que "un alumno no hace matemáticas si no se plantea y no resuelve problemas" y es en términos de estas premisas que examinamos la práctica escolar de la resolución de problemas.

1. El problema como núcleo del quehacer matemático

¿Qué es un problema? "Un problema plantea una situación que debe ser modelada para encontrar la respuesta a una pregunta que se deriva de la misma situación" (Parra, 1989). Pero también, un problema debería permitir "derivar preguntas nuevas, pistas nuevas, ideas nuevas" como lo señala Bouvier (*ibid*).

Sin embargo, un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se lo plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera casi inmediata. Ciertamente, lo que es un problema para un individuo puede no serlo para otro sea porque está totalmente fuera de su alcance o porque para el nivel de conocimientos del individuo, el problema ha dejado de serlo.

¿**En qué consiste la resolución de problemas**? Puede considerarse que un problema ha sido resuelto por un individuo cuando éste cree, explícita o implícitamente, que ha obtenido la "verdadera" solución.

La resolución de problemas se refiere a la coordinación de experiencias previas, conocimiento e intuición, en un esfuerzo para encontrar una solución que no se conoce. A grandes rasgos, puede decirse que, al resolver un problema, el sujeto:

- formula el problema en sus términos propios;
- experimenta, observa, tantea;
- conjetura;
- valida.

La etapa de validación es central en este proceso, porque a través de ella la conjetura puede ser reformulada, ajustada para dar mejor cuenta de la situación planteada por el problema, o puede mostrarse falsa, encontrarse un contraejemplo que la invalide, con lo que será necesario construir una nueva conjetura teniendo en cuenta los errores anteriores, que valen como ensayos. Dentro de la actividad matemática, la validación se da en un proceso dialéctico entre el que resuelve y el conocimiento matemático establecido, representado por los colegas o los profesores, o por la misma teoría matemática.

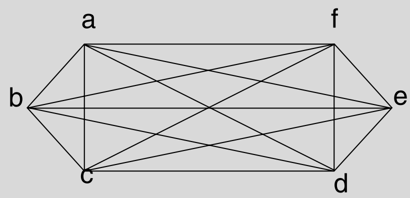
Características de la resolución de problemas escolares. El proceso de resolución descrito se traduce, para los problemas escolares, en un proceso de tres pasos, a saber:

- entender el problema;
- desarrollar y llevar a cabo una estrategia, y
- evaluar la solución.

Dentro de este proceso, el desarrollo de una estrategia puede ser, a su vez, sujeto de otro proceso durante el cual la estrategia evoluciona, se afina, y se formaliza. Es decir, si se concede un tiempo suficiente, es posible que la reflexión del sujeto derive hacia el proceso de la resolución misma, buscando simplificar o hacer más comprensible el camino de resolución, o bien pasando de una resolución basada en la visualización, a una formalizada por los algoritmos.

Considérese, por ejemplo, el problema siguiente:
Hay 6 personas en una reunión. Si cada una saluda de mano a todas las demás personas participantes, ¿cuántos apretones de mano tienen lugar?

Una primera estrategia de resolución puede estar dada por la figura siguiente y el conteo de los segmentos:



ad, ab, af, ae, ac,
bc, bd, be, bf

cd, ce, cf,
de, df y ef

Así, hay en total 15 apretones de mano.
Pero esta estrategia puede evitar al alumno buscar las relaciones aritméticas equivalentes. Esto es:

la primera persona saluda a 5 invitados;
la segunda, saluda a 4;
la tercera, saluda a 3;
la cuarta, saluda a 2;
la quinta, saluda a 1.
De modo que en total hay 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 apretones de mano.

En una segunda etapa reflexiva, la resolución puede tomar una forma más acabada, susceptible de ser generalizada:

Hay 6 personas; cada una estrecha, una sola vez, la mano de las otras cinco personas. Así habría 6 x *5 = 30 apretones de mano. Pero de esta manera se cuenta dos veces cada saludo, una vez de* b *a* c *y otra vez de* c *a* b*; luego, el número de apretones de mano es la mitad de lo que se había encontrado, esto es (6* x *5)/2 = 15 apretones en total.*

Evidentemente, este tipo de proceso sólo puede ocurrir cuando el problema es suficientemente interesante como para que el alumno se “apropie” de él y lo considere casi como un hallazgo que debe ser comunicado.

La etapa de validación que, como ya se dijo, es central en el proceso de resolución de problemas en matemáticas, es prácticamente inexistente en el proceso tradicional de enseñanza. Generalmente, el maestro valida (o invalida) las soluciones aportadas por los alumnos en términos de una, generalmente única, respuesta esperada. Es decir, la solución de un problema es calificada por el maestro de correcta o de incorrecta sin que se considere el proceso completo de resolución y sin que el alumno tenga la oportunidad de explicitar su concepción del problema resuelto y de la estrategia que lo condujo a tal solución.

Mucho se ha discutido acerca de la importancia de la resolución inteligente de problemas en la enseñanza elemental (Skemp, 1981; Alarcón y Parra, 1978; y Parra, 1989a). Esto es, la importancia de permitir que los alumnos construyan sus propios caminos de razonamiento, sus propias estrategias de resolución y, sobre todo, la importancia de que puedan explicitar el porqué de esa resolución. El proceso de resolución, como se ha descrito, es un medio para desarrollar el razonamiento matemático y una actitud positiva hacia las matemáticas, al mismo tiempo que se ponen en juego los conceptos que interesa afianzar.

También se ha visto que cuando esta actividad se propone a los alumnos, el tiempo que tardan en abandonar los esquemas de resolución tradicionales es realmente muy corto, y que la variedad de estrategias correctas que resultan es muy grande y permite detectar diferentes momentos en la construcción de un concepto (Parra, 1989b). Así, por ejemplo, en Dávila y Martínez (1989) se muestran diferentes momentos en la constitución de la operación de sustracción -en niños de tercer año- que aparecieron en la resolución de un problema por demás tradicional.

La detección de estos momentos es posible merced a que en la resolución del problema no se considera solamente el resultado de manera dicotómica (correcto-incorrecto), sino que se observan, analizan y validan los caminos de resolución que han seguido los alumnos. Evidentemente, para que esto sea posible, se ha abandonado el modelo de resolución datos-operación-resultado para permitir la libre producción de estrategias y utilización de recursos.

Por otra parte, uno de los aspectos que se presentan en el proceso de la resolución de problemas, y que debería considerarse como parte inherente a él, es el error. El error que el alumno comete al resolver un problema o llevar a cabo un algoritmo merece ser considerado como fuente de conocimiento. Al maestro le permite detectar dificultades conceptuales de las que no había sido consciente y que pueden afectar a buena parte de sus alumnos, o dificultades de comprensión en la lectura, términos desconocidos para los alumnos y que admiten una significación distinta de la que el contexto del problema supone. Por su parte, si al alumno se le invita a discutir su resolución, si se le permite explicitar sus concepciones, sus estrategias, buscar la manera de validar su resultado -en un ambiente propicio para el diálogo-, es capaz de percatarse del error cometido y de buscar y proponer una resolución o una estrategia alternativa, y en esta búsqueda puede aclararse un concepto, comprenderse mejor.

El error puede también esconder una estrategia valiosa. Considérese, por ejemplo, el problema de los saludos intercambiados en una reunión de seis personas. Cuando se le propuso a un niño de 10 años, su respuesta inicial fue "tiene que ser 6 x 6", al responder a la pregunta de por qué tiene que ser 6 x 6, se hizo evidente el razonamiento y el error fue corregido por el propio niño: "porque cada persona saluda a todas las demás... entonces son 6 x 5". La consideración del doble conteo implícito surgió posteriormente, para dar lugar a una respuesta totalmente correcta en los términos que aparece reseñada anteriormente.

Importancia del papel jugado por el maestro. Debe reiterarse que el desarrollo de estrategias y la observación, análisis y validación de las mismas sólo son posibles si se proponen a los alumnos problemas interesantes desde el punto de vista de lo que demandan de él. Por su parte, la discusión de los errores y la consideración del papel didáctico que ellos juegan sólo pueden tener lugar si se abandona el modelo de resolución datos-operación-resultado.

Un factor esencial para que la resolución de problemas se convierta en una actividad interesante y productiva para los alumnos es, sin duda, el maestro. Sus acciones y el ambiente que logre crear dentro de su clase darán significado a la práctica de la resolución de problemas.

Charles (1982) señala que "la componente ambiente del aula identifica comportamientos que el maestro debiera modelar para desarrollar una atmósfera de clase propicia para la resolución de problemas de matemáticas. La componente acciones del maestro identifica algunos comportamientos útiles para ayudar a desarrollar las habilidades del alumno para seleccionar y utilizar estrategias de resolución".

En efecto, según algunas experiencias, el objetivo más importante de las prácticas de resolución de problemas debería ser la creación de una atmósfera propicia para la resolución de problemas, principalmente al inicio del año escolar. Entre los comportamientos con los que el maestro puede ayudar a crear esta atmósfera, dos merecen destacarse:

- animar a los estudiantes a explorar cualquier idea o estrategia que pueda ayudarlos a entender y/o resolver un problema, sin censurar las ideas generadas;
- reconocer y reforzar los diferentes tipos de habilidad o excelencia de los estudiantes.

La resolución de problemas es un proceso, y como tal debe considerarse. Consistentemente con esto, las acciones del maestro deberían encaminarse a, primero, asegurarse de que el problema ha sido comprendido por los alumnos antes de

que éstos procedan a la resolución, discutiendo las palabras del texto que eventualmente causen dificultades; luego, durante la resolución, observar el trabajo de los alumnos e interrogarlos para identificar las dificultades que enfrentan, animarlos a desarrollar una o varias estrategias y, si es necesario, hacerles alguna sugerencia. Una vez que los alumnos han obtenido una solución, discutir las diferentes estrategias utilizadas, aún cuando no hayan conducido a una solución correcta; si es posible, relacionar el problema con otros resueltos anteriormente y/o discutir posibles extensiones de él.
De estos dos puntos se infiere que los objetivos perseguidos al crear un buen ambiente son:

- lograr la buena disposición del alumno frente a la tarea de resolver un problema;
- la perseverancia al intentar la resolución y
- la selección de una estrategia para llevar a cabo la resolución aun cuando la estrategia seleccionada no conduzca a una resolución correcta.

2. La concepción escolar del problema

En el proceso escolar tradicional, el problema y su resolución revisten características distintas a las que señalamos en las selecciones anteriores. La diferencia más significativa está tal vez en la intención con la que se propone un problema. Si dentro de la actividad matemática el problema es algo que provoca al espíritu, que incita a la búsqueda de una respuesta, a satisfacer una necesidad de conocimiento, en la enseñanza, y sobre todo en la elemental, un problema es generalmente un medio de control de la adquisición de conocimientos.

En el mejor de los casos, un problema se plantea para dar pie a un nuevo tema de estudio, en un afán motivacional. Pero en este caso es el maestro quien resuelve, quien plantea y responde las preguntas que habrán de conducir al alumno a admitir la necesidad de ampliar sus conocimientos o sus recursos algorítmicos. Ejemplo de ello es el inicio del estudio de los decimales, donde los problemas de medición son propuestos por el profesor para hacer sentir la necesidad de contar con fracciones de la unidad de medición, con la afirmación implícita de que la manera más eficiente de hacerlo es fraccionando en diez partes esta unidad.

En general, los problemas que se proponen a los alumnos se definen en relación con el contenido matemático que se quiere evaluar: se trata de aplicar algoritmos y procedimientos estudiados en clase, y casi siempre inmediatamente después de la o las sesiones que les han sido dedicadas. Son, además, problemas estructurados de tal manera que la o las operaciones que se requieren para su resolución están prácticamente indicadas en el texto del problema, en el orden en que tienen que realizarse. En esta situación, los problemas no provocan la interacción del alumno con situaciones que los obliguen a comprometer sus conocimientos, a revisarlos, a modificarlos, o rechazarlos para formar un conocimiento nuevo.

Evidentemente, a través de esta propuesta de problemas no se espera desarrollar en el alumno una actitud de búsqueda, de formulación de preguntas o de elaboración de respuestas. En este sentido los problemas no reflejan, en lo absoluto, lo que ocurre en la actividad matemática verdadera.

No debe entenderse con esto que los problemas que Mialaret (1985) llama “guiados” -esto es, problemas cuya resolución sólo demanda del alumno la aplicación de una o varias operaciones aritméticas que deben realizarse en el orden solicitado en el enunciado-, deban excluirse de la enseñanza. Por el contrario, Mialaret señala que estos problemas familiarizan al estudiante con la aplicación de lo aprendido al nivel de las operaciones, a la resolución de problemas. Señala también que los problemas en los que hay varias operaciones, varias etapas de resolución, suelen verse como la concatenación de problemas elementales de un paso (guiados y de una operación) y se considera entonces que su resolución es simplemente la de estos problemas elementales, pero que debe tenerse en cuenta las dificultades de orden psicológico que estos problemas presentan para los alumnos del ciclo elemental. En otras palabras, "el niño que sabe resolver separadamente los problemas A, B y C, no resuelve forzosamente (por lo menos en un primer momento) el problema constituido por A+B+C". De ahí el interés en conservar estos problemas, en la enseñanza. Debe reiterarse aquí la importancia que tiene el papel desempeñado por el maestro para que estos problemas se vean realmente como problemas.

Desde la perspectiva del problema como ejercicio de aplicación de algoritmos, la resolución no se entiende como un proceso sino como un reactivo en el que se enfatiza la selección y realización del algoritmo correcto.

Durante uno de los talleres en la escuela A, una profesora, Marina, al cuestionarse la formulación de los problemas, hace la siguiente reflexión sobre la práctica docente:

Es muy frecuente en nosotros como maestros. Nuestros objetivos tienen que abarcar más lo que son las operaciones que el texto del problema. Porque nunca me he puesto a analizar con los niños el contenido del problema. Nunca. Porque siempre estamos abocándonos a las operaciones, que aprendan a multiplicar, a dividir, todo eso. Y como que siempre hacemos hasta la pregunta, como que la remarcamos para que sea suma, resta. Como que se da mucho énfasis en la voz del maestro al marcar las preguntas para que el niño llegue a la operación y, que sepa que tiene que utilizar tal operación.

Durante el mismo taller, la maestra Carmen propone el siguiente problema y comenta el objetivo que persigue:

Una señora fue al Mercado de la Bola compró 5 montones de naranjas. Cada montón le costó $3 000. La señora llevaba un billete de a $10 000; ¿cuánto pagó por las naranjas?

Sus compañeros reconocen el texto como el de un problema al que le faltan datos; aun cuando lo que realmente cuestionan son las condiciones del problema; esto es, si la señora llevaba monedas además del billete, o si regateó con el comerciante. Entonces la maestra aclara:

Lo que yo quería es que se dieran cuenta de que no pudo comprarlas; yo planteaba que a lo mejor las podían sumar, que es un paso para la multiplicación, pero lo que yo quería es que multiplicaran 5 **x** *3 y no 3 veces 5 (...). O sea que fue ahí en la multiplicación, que es lo que quiero (...).*

Otro profesor, Camilo, lee el problema que construyó y a continuación menciona también los objetivos explícitos:

Pedro compró un terreno de 10 m de frente por 8 m de lado, y quiere clavar un poste cada 6 m en su patio. Si tenía 10 postes, ¿cuántos postes le faltaron para cercar todo el terreno que le vendieron?

Objetivos:

a) reafirmar el conocimiento sobre perímetros;
b) mecanización de la operación de división;
c) análisis del problema e interpretación de algunas palabras

Curiosamente, como se registra en Dávila y Martínez (*ibid*) cuando se pregunta, ¿cuál es el objetivo que el maestro persigue al plantear problemas a sus alumnos?, las respuestas son de este estilo:

- *“ Para obligar a los niños a razonar”.*
- *“ Para hacerlos unos pensantes”.*
- *“ Para desarrollar su capacidad de razonamiento”.*

entre otras que manifiestan la preocupación por desarrollar el manejo de algoritmos.

La pregunta que surge entonces, de manera natural es, ¿en qué consiste, para el maestro, esta capacidad de razonamiento? Basándonos en la actuación del maestro frente a la resolución de problemas, en lo que solicita a los alumnos, en las recomendaciones y sugerencias para ayudarlos a resolver los problemas que él mismo plantea, y los ejemplos que él mismo desarrolla para mostrar en qué consiste la resolución de problemas, podemos afirmar que lo que el maestro llama razonamiento consiste en:

- la identificación de los datos del problema, los cuales generalmente son numéricos y aparecen ordenados, sin que sobren o falten, en el texto del problema;
- la identificación de la pregunta: se trata de una pregunta única, generalmente, pero en el caso de haber más de una, la segunda depende casi evidentemente de la primera, y
- la determinación de la operación, u operaciones, que sirve(n) para responder la pregunta.

Estos tres elementos constituyen el esquema de razonamiento que conducirá a la solución del problema. Y en términos de eso se diseñan estrategias o métodos para producir este esquema. En síntesis, desde la concepción escolar el problema es, básicamente, un ejercicio de aplicación de algoritmos o fórmulas estudiadas en clase que tienen la ventaja de disfrazar lo rutinario y que, además, obligan al alumno a identificar los datos del problema y la pregunta planteada, y a determinar el algoritmo o fórmula a ser empleada para responder a tal pregunta. Este trabajo de identificación es lo que en la escuela se llama razonamiento.

De esta concepción se deriva que ciertos modelos de resolución sean privilegiados, así como la manera en que el maestro piensa que se construye la capacidad de razonar.

En lo que sigue veremos cómo, efectivamente, los problemas que plantean los maestros responden a esta concepción.

3. El problema escolar como objeto de análisis

El problema escolarizado es "una historia que nos cuenta algún tipo de actividad en la que el protagonista tiene que contar o que medir" (Parra, 1989a). Los problemas que generalmente se proponen son "de la vida real" o se refieren a situaciones que pudieran ser vividas por los alumnos; en ocasiones, se trata incluso de situaciones que ocurren en el dominio de la fantasía. Pero aquellos puramente matemáticos no son reconocidos siempre como problemas.

En lo que se refiere al contenido matemático del problema, puede observarse que los maestros privilegian los aspectos puramente aritméticos en detrimento de los geométricos, combinatorios o lógicos, por ejemplo. En este sentido es interesante detallar las reacciones de los maestros ante diferentes problemas que les fueron propuestos. En una sesión de taller en el mes de junio se propusieron los siguientes problemas:

1) el de ubicar un lugar para construir una fábrica que tiene que estar a más de 3 km de cada una de varias casas (representadas por puntos) y a menos de 1 km de cada una de dos carreteras que se intersectan (representadas por rectas);
2) el de determinar el área de un jardín de forma irregular;
3) el de determinar cuántos frijoles hay en un kilogramo.

Durante la resolución del primer problema, el coordinador del taller trata de mostrar la riqueza del mismo y de hacer evidentes los conceptos involucrados en la resolución. Gilda, maestra de 5º año, comenta:

Gilda: No, está bien diferente, no es matemático, pero es un problema.
Coord.: !Ah! ¿Por qué no es matemático?
Gilda: Bueno, porque no tiene números, ¿no? O sea, estamos acostumbrados a que es matemáticas si lleva números.

Más adelante reitera: “Pero yo creo que no es matemático sino geométrico, ¿no? O sea, manejándolo así”. Pero aclara, luego, el problema es “geométrico en cuanto a medidas de longitud”, porque “no hubo que hacer operaciones complicadas sino medir con una regla”.

Para Rosario, otra de las maestras del grupo, el problema es para “razonar, más que nada, usar el razonamiento, para poder resolver el problema”, dejando de lado el manejo de los conceptos de circunferencia, paralelismo, etcétera, necesarios para la resolución.

En cambio, el problema del jardín no es cuestionado como el anterior. Calcular un área, aunque no se usen fórmulas, sí cae dentro de los problemas matemáticos.

El problema del kilo de frijoles enfrenta un cuestionamiento distinto. No se trata de si es matemático o no, sino de su utilidad. De nuevo, es la maestra Gilda quien cuestiona:

Gilda: Yo, yo,... bueno, no sé, ¿qué objeto tiene el problema?
Coord.: Buena pregunta.
Gilda: Yo se los dejo (a los alumnos) y digo ¿para qué? Todavía éste (el de la fábrica) se ve más... La verdad, yo no le veo objeto al problema.

Y más adelante:

Gilda: En éste también (el del jardín) estaba bien canijo sacarlo, pero así al de los frijoles no le veo objeto. ¿Qué caso tiene? Un kilo es un kilo y,... sí, no le veo nada práctico.

Después de una larga discusión sobre lo que el problema aporta, el coordinador comenta: "Sí, es una posibilidad, podría ser... para Lupita... convertir el problema de la bolsa (del kilo) de los frijoles en algo que se parezca un poquito más a la vida, ¿no?" Sugerencia que es rápidamente aceptada por el grupo de maestros. Otra maestra, Irene, sugiere "pasar a las canicas... Y ya les interesa (a los niños) porque son canicas".

En lo que respecta a otras características del contenido, puede señalarse que en los problemas que usualmente son propuestos en la escuela:

- la historia se inicia regularmente con el protagonista;
- los datos del problema están ordenados, son numéricos, explícitos y ni sobran ni faltan;
- los verbos que describen las acciones del protagonista y la esencia de la misma pregunta son generalmente palabras clave para la resolución;
- hay una única pregunta, con la que termina el enunciado;
- la respuesta esperada es numérica y única.

Respecto a cuándo se proponen problemas en la enseñanza, encontramos tres momentos:

- para iniciar un tema;
- como ejercicio de aplicación;
- como evaluación.

Ya se había señalado que el momento privilegiado es el segundo; esto es, la mayor parte de los problemas se presentan como aplicación del contenido matemático que acaba de ser presentado a los alumnos. Muchas veces sirven de disfraz para los ejercicios algorítmicos rutinarios.

En este sentido, al analizar los problemas que los maestros de la escuela B propusieron a lo largo del año que duró el proyecto, encontramos sólo problemas que buscan reforzar algoritmos ya estudiados.

Por ejemplo, Irene, maestra de 3er año, en una sesión en el mes de noviembre cuenta el problema siguiente:

Había una vez un conejito que salió a buscar zanahorias, iba brinca y brinca y brinca y no pudo coger ni una zanahoria porque ahí estaba el lobo. Al segundo día que salió pescó una y otra y otra, fueron 8 zanahorias. El tercer día salió el sol, el conejito se dijo "me tengo que apurar más, más rápido, antes de que vaya a llegar el lobo", y juntó 14 zanahorias. Al día siguiente, nada más 10 zanahorias juntó. Resulta que dijo "Ahora voy a comer", y se comió 6 zanahorias. ¿Le ayudan al conejito a contar sus zanahorias?

En el pizarrón, la maestra escribe:
El conejito: el 1er día no pudo tener nada

2º día	*8 zanahorias*
3er día	*14 zanahorias*
4º día	*10 zanahorias*

(En un diálogo, la maestra pregunta a los niños cuántas se comió el conejito; los niños responden que 6 zanahorias, entonces ella termina de escribir) ¿Cuántas le quedaron?

En la misma sesión de noviembre, propone:

Paquita tiene un arbolito; su arbolito tiene 120 ramitas pero sólo tiene 45 esferas. ¿Cuántas esferas tiene que comprar?

Luego, en febrero del año siguiente, propone:

Quiero llenar un álbum de animales. Ya tengo 1 256 estampas. El álbum se llenará cuando junte 1 500 estampas. ¿Cuántas necesito reunir todavía?

Aun cuando la maestra incorpora al texto del problema elementos que lo hacen interesante -como es el hecho de no preguntar, en el segundo de los problemas citados, “cuántas esferas faltan” sino “cuántas esferas tiene que comprar”-, su preocupación está centrada en hacer comprender y ejercitar los mecanismos de la sustracción.

De hecho, en ninguna de las dos escuelas en las que se desarrolló el proyecto, los maestros mostraron una utilización espontánea del problema como medio para abordar un tema nuevo, por lo menos en las sesiones de clase que fueron observadas y registradas. Cabe señalar que esta posibilidad tampoco fue explorada o desarrollada durante los talleres, en los que el interés se centró más en el problema como objeto de exploración.

En la escuela A, lo más generalizado fue la adaptación de los problemas propuestos en los talleres para los fines que ahí mismo se especificaron: trabajo en equipos, confrontación, validación de estrategias, análisis del texto del problema, etcétera. También se propusieron algunos problemas que trataban de seguir los lineamientos desprendidos de las discusiones dentro de los talleres. Sin embargo, no parece claro que un año de trabajo sea suficiente para favorecer la aparición de problemas, en tanto que aplicaciones de clase, más atractivos para los alumnos. Al finalizar el proyecto, durante el cual se dedicaron varias sesiones de taller a discutir la conveniencia de propiciar una reflexión entre los alumnos acerca del texto del problema, sobre la importancia de garantizar la comprensión de las palabras del texto, de la conveniencia de enfrentar a los alumnos a problemas no estereotipados, problemas donde sobren o falten datos, donde estos datos no sean siempre numéricos, donde haya más de una pregunta, donde no haya palabras clave para la resolución, etcétera, los problemas propuestos por los maestros de la escuela A son más bien del tipo de los que construyeron Camilo y Carmen, que citamos aquí mismo, aunque hay maestros más prontos a adoptar estas sugerencias, como en los casos de Antonia y Marina, que proponen los problemas que aparecen a continuación:

Se va a organizar un torneo de futbol en el que participarán cuatro equipos: "Deportivo Tepic", "Club Puga", "Club Bellavista" y "Seguro Social". Cada equipo debe jugar con todos los demás, una vez en su cancha y otra en la del equipo contrario. El torneo empezará el domingo 24 de septiembre de 1989 y se realizará un partido cada domingo y uno cada miércoles.

1. *¿Cuántos partidos se realizarán en total?*
2. *¿Cuántas personas presenciarán los partidos?*
3. *¿En qué fecha será la final?*
4. *¿Cuánto tiempo de juego efectivo hicieron todos los equipos juntos?*

Un avión sale del aeropuerto de la Ciudad de México con destino a la ciudad de Nueva York con 175 pasajeros. El vuelo hace escala en Los Ángeles, donde bajaron 98 pasajeros y subieron 47.

1. *¿Cuántos pasajeros llegaron a la ciudad de Los Ángeles?*
2. *¿Cuántos pasajeros viajaron en ese avión?*
3. *¿Cuántas personas llegaron a la ciudad de Nueva York?*

En el Estadio Azteca hubo un partido de futbol, se vendieron 7 672 boletos y solamente asistieron 6 379 personas, más 11 jugadores de cada equipo. En el primer tiempo expulsaron a 3 jugadores, y en el segundo tiempo se salieron 125 espectadores. Contesta las siguientes preguntas:

1. *¿Cuántas personas quedaron al final del juego?*
2. *¿Cuántas personas no asistieron al partido?*
3. *¿Cuántas personas había al inicio del partido?*
4. *Si el boleto costó $7 000.00 M/N. ¿Cuánto dinero se recaudó?*

En la escuela B, por su parte, además de adaptar los problemas propuestos en el taller para llevarlos a sus alumnos, produjeron mayores problemas cuyo denominador común es el reforzamiento de algoritmos y procedimientos aprendidos en clase. Aquellos problemas adaptados de los talleres son, en su mayoría, los que pueden catalogarse dentro de los "problemas de la vida cotidiana", como es el caso del problema de la propaganda, en el cual, a partir de una hoja de ofertas de un supermercado, se propone a los alumnos hacer una lista de artículos que se puedan comprar con $20 000 de manera que sobre lo menos posible de dinero. Este problema tuvo una gran aceptación entre los profesores, porque traduce situaciones que los niños enfrentan o pueden enfrentar en su vida diaria. Otro problema, propuesto por los mismos maestros, se refiere al conocimiento y manejo del calendario; se trata, de hecho, de una situación de la cual pueden derivarse diferentes problemas para cada uno de los grados escolares, desde el conocimiento de los nombres de los meses, el orden en que se presentan, el número de días de cada uno, hasta problemas relativos a edades, días laborables, porcentajes de asistencia, etcétera. De nuevo, se trata de situaciones que eventualmente son vividas por el niño. Como ya vimos, los problemas que traducen situaciones puramente matemáticas son los menos aceptados.

Es muy probable que el trabajo necesario para hacer que los profesores reconozcan en la resolución de problemas una fuente de conocimiento, para permitirles optar por un acercamiento a los diferentes temas de estudio del programa de matemáticas a través de problemas, sea un trabajo que requiera de muchos años de paciente labor en los que, tal vez, sea el mismo maestro el que se adentre en áreas de la matemática que hasta ahora le son desconocidas, a través del planteamiento de algunos problemas clave que despierten su interés y su curiosidad por saber cuál podría ser la solución y cuál la manera o las maneras de encontrarla. Es evidente que un año de labor en esta dirección no es suficiente.

Tomado de la revista: *Educación Matemática*, vol. 2, núm. 3.
Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.

BIBLIOGRAFÍA

ALARCÓN, J., PARRA, B. (1978). *Cómo los niños resuelven problemas. Comunicación interna.* SME-CINVESTAV. México.

BOUVIER, A. (1981). *La mystification mathématiques.* Herman. París.

BROUSSEAU, G. (1983). *Obstacles épistemologiques en mathématiques. Recherches en Didactique des mathématiques.* Vol. 4. La Pensée Sauvage. Grenoble.

CHARLES. I. (1982). "An instructional system for mathematical problem solving", en *Problem solving in the mathematics classroom. Mathmonograph,* núm. 7. Mathematics council of The Alberta Teachers' Association. Calgary.

DÁVILA, M.; MARTÍNEZ, P. (1989). *¿Qué piensa el maestro sobre los problemas de matemáticas?* DIE-CINVESTAV. México.

MIALARET, G. (1985). *La resolución de problemas matemáticos. Psicología Educativa,* núm. 9. CEIPA. Medellín.

PARRA, B. (1989a). *Acerca del papel de la representación en la resolución de problemas.* Pedagogía. Vol. 6, núm. 17. Universidad Pedagógica Nacional. México.

PARRA, B. (1989b). *La resolución de problemas en la construcción de esquemas de razonamiento. Primera reunión sobre razonamiento matemático.* SME-CINVESTAV. México.

SKEMP, R. (1981). *What is a good environment for the inteligent learning of mathematics? Do schools provide it? Can they?. Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 2, núm. 2. La Pensée Sauvage. Grenoble

II

ESTIMACIÓN

Robert E. Reys

ESTIMACIÓN

Robert E. Reys

La estimación y el razonamiento matemático van de la mano. Ambos son complejos y cada uno involucra muchos procesos diferentes. Siento que el adiestramiento en la estimación provee un contexto natural, dentro del cual no sólo se pueden desarrollar sino también practicar muchas habilidades importantes para razonar.

¿Cuáles son estas habilidades importantes para razonar?

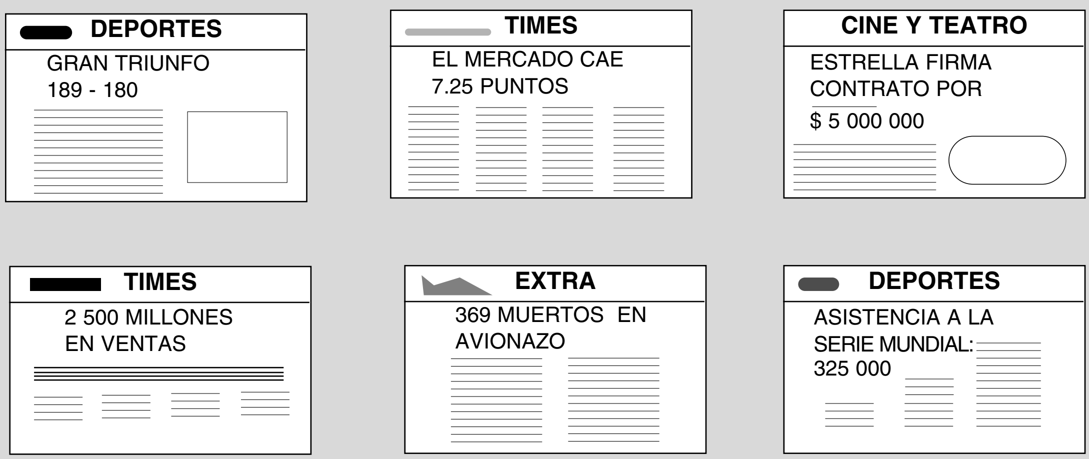
Un examen de los artículos de cualquier revista de educación matemática muestra que lo que constituye el razonamiento matemático está sujeto a muchas interpretaciones diferentes. En lugar de tratar de formular una definición explícita de razonamiento matemático, consideramos algunas características suyas. Por ejemplo, una persona, al razonar matemáticamente:

1. Estudia un problema y decide qué tipo de respuesta se requiere.
2. Usa su flexibilidad mental al trabajar con diferentes clases de números.
3. Selecciona las estrategias apropiadas.
4. Reconoce que existen varias soluciones y no tiene temor de abandonar una estrategia en favor de otra.
5. Revisa si los resultados son razonables.

Si estos pasos parecen los apropiados para resolver problemas, es porque lo son. La resolución de problemas y el razonamiento matemático son inseparables. Aun así, esta lista no es exhaustiva, ni son las características mutuamente excluyentes. Sin embargo, bosquejan algunos procesos clave del razonar que pueden ser desarrollados por la enseñanza de la estimación. El resto de este artículo abarca las habilidades y provee unos cuantos ejemplos específicos de cómo la estimación puede ayudar a afianzar mejor las habilidades.

Actividad 1

Leer cada cabeza periodística. Decidir si las cifras representan datos exactos o estimaciones.

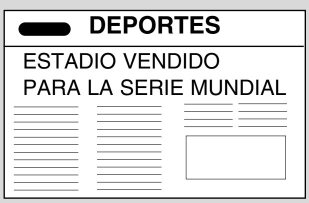


Observemos

Muchas veces necesitamos una respuesta exacta a un problema; sin embargo, la mayoría de las veces una estimación también servirá. Ya que las estimaciones son a menudo más fáciles y más rápidas de obtener, debemos usarlas. Los niños necesitan darse cuenta de que el mundo actual es bombardeado con datos numéricos, algunos exactos y otros estimativos. Es útil, y a menudo muy importante, saber distinguir cuál es cuál. Los encabezados periodísticos mostrados en la Actividad 1 pueden usarse para ayudar a los alumnos a distinguir mejor entre estimaciones y respuestas exactas. Al discutirse estos encabezados, no estarán de acuerdo en cómo clasificar cada uno de ellos, pero esta experiencia promoverá que los niños cuestionen y defiendan, o al menos expliquen, sus interpretaciones.

Por supuesto que muchas veces se necesitan respuestas exactas (*v. g.*, La estación está en el 102 de FM. ¿De cuánto es tu recibo de luz este mes?) y muchas veces se reportarán estimaciones (*v. g.*, La estación está por el 100 de FM. ¿De cuánto será tu cuenta de luz este mes?). Preguntas como las de la Actividad 2 dan oportunidad de mejorar la decisión de si se necesitan respuestas exactas o estimaciones. Observar y decidir el tipo de respuesta necesaria en un problema es una parte importante del razonamiento matemático. No sólo promueve que los alumnos se den cuenta del poder y la utilidad de la estimación, sino que a menudo muestra la dirección para la solución del problema.

Actividad 2



¿Es suficiente la estimación cuando:
- el contador calcula cuánto dinero se sacará de la venta de boletos?
- el periódico reporta cuánta gente asistió al juego?

CUENTA POR UNA CENA	
comida	$ 1 362.50
impuesto	?
TOTAL	?

¿Es suficiente una estimación cuando:
- la mesera calcula el 15% de impuesto?
- la mesera encuentra el total?
- el cliente calcula el 15% de propina?
- el cliente revisa la cuenta?

Flexibilidad mental con los números

Reconocer qué tipo de respuesta se necesita es el primer paso hacia una flexibilidad mental, y un buen sentido de los números es el próximo. Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema:

$$\text{Estime : } \quad \frac{7}{8} + 1\,\frac{12}{13}$$

Los estudiantes con un buen sentido de los números reconocerán que estas fracciones son cercanas a 1 y a 2 respectivamente. Tal razonamiento convierte una solución por algoritmo potencialmente larga y engorrosa, en una respuesta rápida: casi 3. Los estudiantes brillantes frecuentemente exhiben este tipo de razonamiento ellos mismos, pero la mayoría de los alumnos necesitan una enseñanza cuidadosa para desarrollar un sentido de los números y una flexibilidad. La Actividad 3 muestra una manera en la cual la flexibilidad puede ser reforzada.

Es esencial que la enseñanza sea diseñada para ofrecer, en conjunto, actividades que aumenten la flexibilidad de los alumnos con los números. Estas actividades incluyen relacionar diferentes números, tal como traducir “Venta: 35% de descuento” a “descuento de $\frac{1}{3}$”, o reconocer que $\frac{1}{10}$ no sólo está cerca del 0.0897, sino que es mucho más fácil de usarlos al obtener una estimación. La flexibilidad mental también es esencial al estimar y representar un elemento importante del razonamiento matemático.

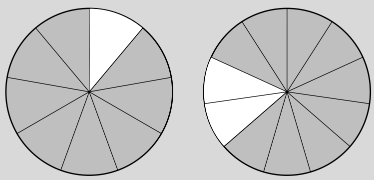
Actividad 3

Estas fracciones son menores que 1

$\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{11}{12}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{9}{11}$ $\frac{7}{8}$

Supón que se suman dos de ellas

$$\frac{8}{9}+\frac{9}{11}$$



La suma debe ser...

menos que 2 | exactamente 2 | más que 2

Juntos son menos que dos pasteles

Piensa por qué

Supón que se suman tres de estas fracciones.
La suma debe ser:______________________

$$\frac{7}{8}+\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{7}{15}$$

$$\frac{5}{9}+\frac{7}{13}+\frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{5}+\frac{11}{12}+\frac{8}{9}$$

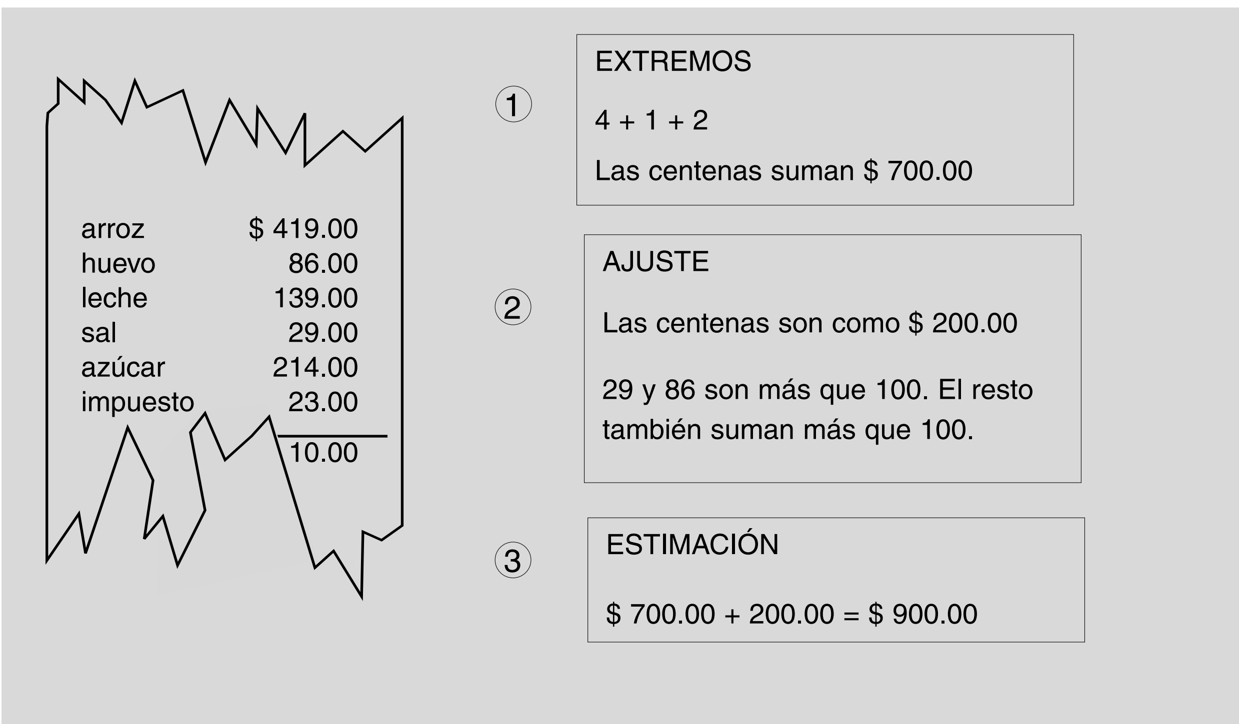
Seleccionemos una estrategia

Muchas estrategias diferentes son útiles para obtener estimaciones. Aunque el redondeo ha sido la estrategia estimativa predominante en la enseñanza, otras estrategias poderosas y útiles están disponibles, tales como extremos, promediar y números compatibles (Reys y Reys 1983; Trafton 1976). Cada una de estas estrategias se ilustra en la Figura 1.

La investigación ha demostrado que cuando éstas y otras estrategias son enseñadas, el desempeño de los alumnos aumenta significativamente (Reys *et al.* 1984). Es esencial que una variedad de estrategias para estimar se enseñe sistemáticamente dentro de los programas de matemáticas. La in-

FIGURA 1

EXTREMOS
Estime el total de esta cuenta de abarrotes



vestigación ha demostrado que a menos que las estrategias específicas sean enseñadas, pocos estudiantes desarrollarán éstas por sí mismos. Al aumentar su repertorio de estrategias estimativas a través de la enseñanza y la práctica, los estudiantes se dan más y más cuenta de las opciones disponibles. Un análisis de las condiciones del problema, junto con las propias preferencias de los alumnos y estilos, conducirá a un proceso de resolución que ligue una estrategia a un problema. Estos procesos analíticos, de juicio y de toma de decisiones están en el corazón del razonamiento matemático.

PROMEDIAR

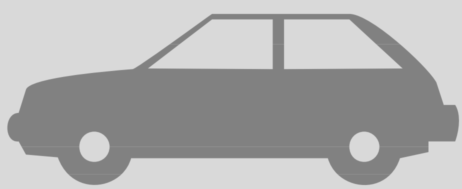
Estime la asistencia total

lunes	72 250	martes	63 891	miércoles	67 490
jueves	73 180	viernes	74 918	sábado	68 490

Las cifras se aglomeran alrededor de 70 000, entonces 70 000 personas asistieron cada día. 6 x 70 000 = 420 000
Estimación al promediar: 420 000

NÚMEROS COMPATIBLES

Estime los pagos mensuales



Costo financiado
$ 1 562 900.00
pago a 48 meses

Es más fácil pensar el problema como: $50\overline{)1\ 500\ 000}$
Estimación por números compatibles: $ 30 000.00

Estrategias múltiples al resolver

El refrán: “Todos los caminos conducen a Roma” se aplica especialmente bien a la estimación. A menudo, una estimación puede ser obtenida de diferentes maneras, como se muestra en el problema de la Figura 2. Cada una de estas estrategias es diferente, pero cualquiera de ellas es apropiada. El discutir y el compartir diferentes aproximaciones en el salón de clases no sólo disminuirá la visión de túnel (la noción de que las cosas sólo pueden hacerse de una manera), sino que también disminuirá el síndrome de la “única respuesta correcta”.

Junto con la adquisición de una variedad de estrategias de estimación debería venir el reconocer que varias de ellas puedan ser aplicadas al mismo problema. Si una estrategia se vuelve engorrosa o se presenta improductiva, intenta otra. La estimación debe ser rápida, y si se vuelve laboriosa, una nueva estrategia debe ser aplicada. Esta flexibilidad al razonar y la disposición para intentar otro enfoque ayudan a crear la confianza en uno mismo. No sólo es una parte importante, sino esencial para desarrollar un razonamiento matemático.

FIGURA 2

Estima este total:

$	949
	936
	1 019
	1 035
	927
	1 042

REDONDEAR
900 + 1 000 + 1 000 + 1 000 + 900 + 1 000
son como 5 800

EXTREMOS
900 + 900 + 1 000 + 1 000 + 900 + 1 000
son 5 700 más otro poco, o sea 5 900

PROMEDIAR
todos están alrededor de 1 000
o sea 6 x 1 000 = 6 000

Pruebas de razonabilidad

¿Es razonable un resultado? Esa pregunta debe ser hecha cada vez que se obtiene un resultado. Cada uno de nosotros tiene sus propias historias de horror sobre respuestas sin sentido. Ocurren tanto dentro como fuera de la escuela. A menudo estas respuestas irracionales están ligadas a soluciones “para acabar pronto”, pero no siempre. Una respuesta puede acercarse al resultado y al mismo tiempo ser irracional. Un ejemplo vívido de este fenómeno me sucedió revisando una cuenta en una tienda de departamentos. Se vendían pelotas de tenis a $199.00 la lata. Compré exactamente 15 latas de pelotas y ninguna otra cosa. El subtotal en la registradora (antes del impuesto) era de $3 194.00. ¿Era ilógica esta respuesta? Para mí, sí; pero no para el cajero. Tal vez lo más desconcertante de todo fue la forma en que el cajero manejó este conflicto. En lugar de “razonar” con los números involucrados (*i. e.*, 15 latas a $199.00 cada una) el cajero optó por volver a marcar todos los objetos. Este comportamiento algorítmico y la dependencia total respecto de la tecnología por parte de una persona que terminó bachillerato “exitosamente” eran decepcionantes.

¿Cómo puede uno decir si el resultado es razonable? Generalmente se utilizan dos tipos de criterios. Uno se relaciona con el contexto del problema. La Actividad 4 provee oportunidades para revisar si las respuestas son realistas para la situación dada. Un segundo criterio a menudo requiere estimar y se relaciona con la manipulación de los números. La Actividad 5 ejemplifica una manera de practicar y desarrollar este modo de razonamiento. Fomentar revisiones rutinarias, pero no superficiales, en busca de resultados razonables debe ser un objetivo central de la instrucción matemática. Sólo a través de la enseñanza sistemática y el fomento constante, la revisión consciente en busca de resultados razonables llegará a ser parte integral del razonamiento matemático de los estudiantes.

Actividad 4

Escoge el número más razonable:

Un guante nuevo de beisbol cuesta:

$140.00 $1 400.00 $14 000.00

El número de estudiantes de la escuela "Benito Juárez" es:

5 50 500

La familia González (4 personas) fue a comer hamburguesas y gastó:

$12.00 $120.00 $1 200.00

Escribe una cantidad razonable:
Nuestra escuela tiene más o menos ___________ estudiantes.
El número promedio de personas en una familia es de ________
Alrededor de ________ personas viven en México.

Actividad 5

¿Cuántos dígitos?

Estudia cada problema. No des respuestas exactas.

Estima cuántos dígitos deben tener las respuestas.

Problema	Número de dígitos
1. 134 + 689	_______________
2. 134 + 989	_______________
3. 12 x 234	_______________
4. 9 x 38 x 19	_______________

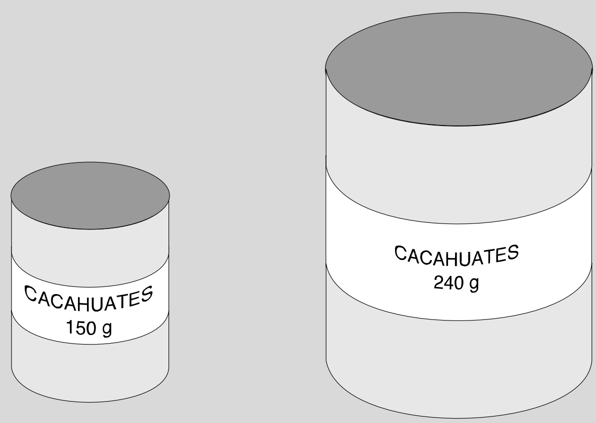
Conclusión

El proceso de estimación no sólo es compatible con el razonamiento matemático, sino que conduce a él. A menudo tenemos uno o dos minutos en clase antes de un descanso, almuerzo o reunión; una reserva disponible de estimaciones “relámpago” nos ayuda a aprovechar esos minutos. Vea la Figura 3. Aunque estos problemas piden una solución rápida, ofrecen una práctica en estimación y razonamiento matemático simultáneamente. Muchos otros problemas interesantes y desafiantes están disponibles, por ejemplo, ver Reys y Reys (1983).

FIGURA 3

ESTIMACIONES “RELÁMPAGO”

En una semana las ganancias de la película x fueron: $51 165 285.00.
¿Aproximadamente cuánto se ganó en un día?



$ 46.00 $ 65.00

¿Cuál es la mejor compra?

Si cada estudiante de nuestro grupo se subiera en una báscula,
¿cuánto pesaría el grupo, más o menos?

Cada componente de una estimación —decidir el tipo de respuesta requerida, escoger y llevar a cabo las estrategias apropiadas, y revisar la sensatez de la respuesta— refleja la clase de pensamiento a alto nivel, asociado con la solución de problemas y razonamiento matemático. Las habilidades estimativas son esenciales y deben tener gran prioridad dentro de cada programa escolar. Pocos tópicos matemáticos ofrecen la riqueza de beneficios, tanto a corto como a largo plazo, como lo hace la estimación.

Tomado de: *Matemáticas y enseñanza*, vol. 1, núm. 1
Revista de la Sociedad Matemática Mexicana, México, 1986.

BIBLIOGRAFÍA

DRISCOLL, MARK J. (1981). “Estimation and Mental Arithmetic”. In *Research whithin Reach. Elementary School.* National Council of Teachers of Mathematics, pp. 107-11. Reston, Va.

O‘DAFFER, PHARES. (February 1979). *Arithmetic Teacher, 26* A Case and Techniques for Estimation: Estimation Experiences in Elementary School Mathematics Essential, Not. Extra, pp. 46-51.

REYS, BARBARA J. y REYS, ROBERT E. (1983). *A Guide to Understanding Estimation Skills and Strategies*. Boxes 1 and 2. Palo Alto, Calif.: Dale Seymour Publications.

REYS, ROBERT E. (May. 1984). *Mental Computation and Estimation: Past, Present and Future*. Elementary Scool Journal, 84, pp. 547-557.

REYS, ROBERT E. y BESTGEN, BARBARA J. (1981). *Computational Estimation is a Basic Skill. In Mathematics Education in the Eighties*. National Education Association. Washington, D.C.

REYS, ROBERT E. y BESTGEN, BARBARA J. (November 1981). *Teaching and Asessing Computational Estimation Skill*. Elementary School Journal 82, pp. 117-128.

REYS, ROBERT E., TRAFTON PAUL R., REYS BARBARA y ZAWOJEWSKI. (1984). *Developing Computational Estimation Materials for the Middle Grades*. Final report, No. NSF-8113601. National Science Fondation, Washington D.C.

SEYMOUR, DALE G. (1981). *Developing Skills in Estimation. Books A and B*. Dale Seymour Publications, Palo Alto, Calif.

TRAFTON, PAUL R. (1978) “Estimation and mental Arithmetic”. *In Developing Computational Skills,* 1978 Yearbook of The National Council of Teachers of Mathematics, edited by Marilyn N. Suydam and Robert E. Reys. The Council, Reston, Va.

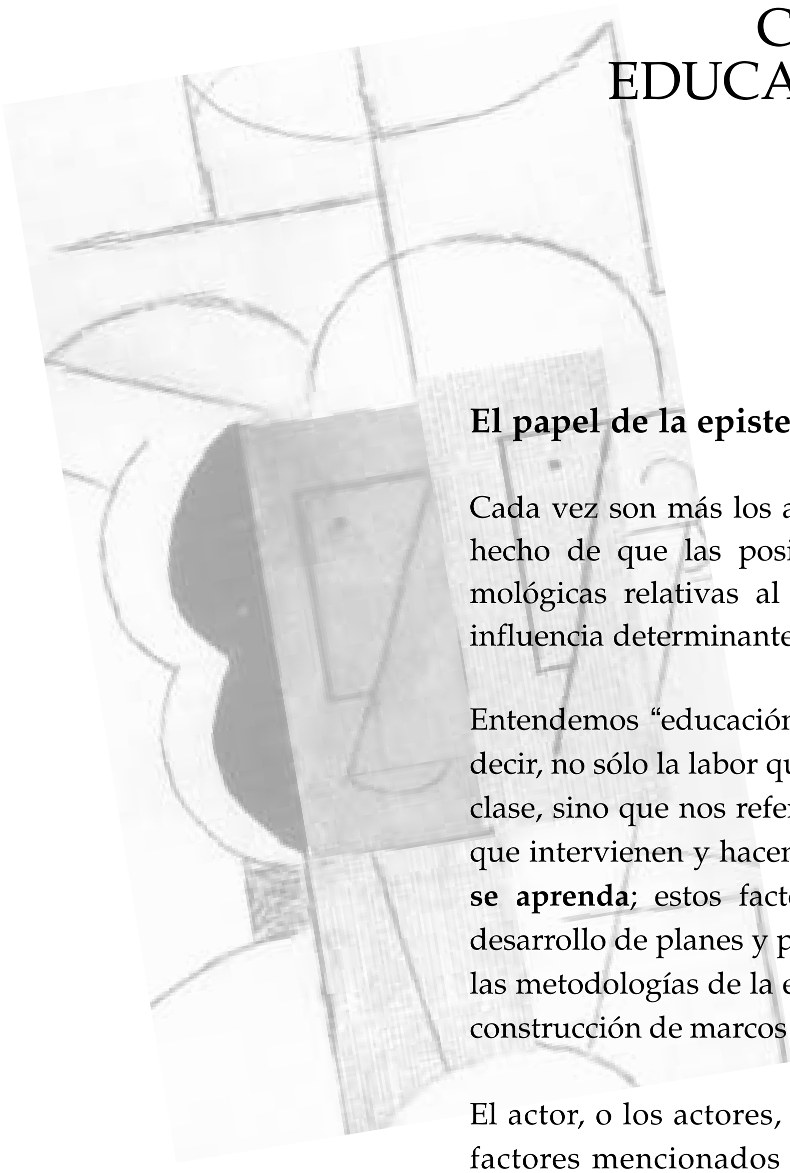
III

CONSTRUCTIVISMO Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Luis Moreno Armella y Guillermina Waldegg

CONSTRUCTIVISMO Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Luis Moreno Armella y Guillermina Waldegg



El papel de la epistemología en la práctica educativa

Cada vez son más los autores que reconocen explícitamente el hecho de que las posiciones filosóficas y las teorías epistemológicas relativas al conocimiento matemático ejercen una influencia determinante sobre la educación matemática.

Entendemos "educación matemática" en un sentido amplio, es decir, no sólo la labor que realiza el profesor dentro del salón de clase, sino que nos referimos, además, a aquellos otros factores que intervienen y hacen posible que la matemática **se enseñe y se aprenda**; estos factores son, por ejemplo, el diseño y el desarrollo de planes y programas de estudio, los libros de texto, las metodologías de la enseñanza, las teorías del aprendizaje, la construcción de marcos teóricos para la investigación educativa.

El actor, o los actores, que intervienen para dar cuerpo a los factores mencionados arriba, lo hacen, explícita o implícitamente, desde sus personales convicciones filosóficas y epistemológicas respecto a la matemática. Es decir, las concepciones que ellos tienen —ya sea individualmente o como grupo o corriente— sobre "lo que es la matemática" y "lo que es el conocimiento matemático", permean los elementos que conforman los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

Intuicionismo, formalismo, logicismo, constructivismo, empiricismo, estructuralismo, y demás “ismos”, han tenido, en su momento, una influencia significativa —aunque no siempre explícita— para guiar las ideas y demarcar los principios que rigen la educación matemática.

No quiere decir esto que todos los profesionales de la educación matemática están “inscritos” en alguna escuela filosófica. En muchos casos se trata simplemente de las opiniones “privadas” del profesor, del autor de textos, del profesional que diseña los planes y programas o del investigador, acerca de la naturaleza de la matemática y del conocimiento matemático, y a sus convicciones de cómo éstas se relacionan con la labor de la enseñanza y con el aprendizaje de los estudiantes. A menudo, estas opiniones han sido indirectamente adquiridas o heredadas a través de su propia formación; pero frecuentemente también obedecen a tendencias o modas de corrientes internacionales que, en ocasiones, son incompatibles con las primeras.

Desde esta óptica, es pertinente plantearse las siguientes preguntas:

¿A qué didáctica conduce una cierta concepción de la matemática y del conocimiento matemático?

¿A qué concepción de la matemática y del conocimiento matemático obedece una cierta práctica educativa?

En lo que sigue, trataremos de dar algunos elementos de análisis que nos permitan acercarnos a las respuestas, contrastando dos maneras distintas de concebir la matemática.

Un breve bosquejo histórico

La epistemología es una disciplina cuyo objeto de estudio es el conocimiento científico, su construcción, su estructuración en teorías, las bases sobre las que descansa, su naturaleza, sus alcances. Aunque originalmente la epistemología era considerada una rama de la filosofía, en la actualidad hay acercamientos que proclaman su independencia y autonomía.

Los filósofos pre-socráticos, los primeros filósofos dentro de la tradición occidental, no pusieron especial atención a los asuntos de la epistemología; su interés estaba centrado en la naturaleza y la posibilidad del cambio. Dentro de sus reflexiones daban por sentado que era posible el conocimiento de la realidad, aunque algunos sugirieron que este conocimiento podría obtenerse mejor de unas fuentes que otras. Heráclito, por ejemplo, enfatizaba la importancia de los sentidos para conocer la realidad, mientras que Parménides privilegiaba el papel de la razón. Sin embargo, ninguno de ellos dudó que el conocimiento de la realidad fuese posible. A partir del siglo V a. C. empezaron a surgir estas dudas y fueron los sofistas los principales responsables de ello.

Durante el siglo V a. C. las instituciones y las prácticas humanas se enfrentaron, por primera vez en la historia, a un examen crítico. Muchas cosas que se habían pensado como parte de la naturaleza se empezaron a separarse de ella. Las preguntas epistemológicas centrales que preocupaban a los sofistas eran: ¿Qué tanto de lo que pensamos que conocemos sobre la naturaleza es "parte objetiva" de ella, y qué tanto es contribución de la mente humana? ¿Hasta qué punto podemos estar seguros de que tenemos un conocimiento en los sentidos? ¿Puede la razón producir conocimiento?

Algunos fueron más radicales afirmando que no hay tal realidad, y que si la hubiera no podríamos conocerla y que, aun si la pudiéramos conocer, no podríamos comunicar nuestro conocimiento de ella.

Este escepticismo general condujo al surgimiento de la epistemología tal y como fue conocida tradicionalmente: el intento por justificar que el conocimiento es posible y por establecer la parte que juegan los sentidos y la razón en la adquisición del conocimiento. Es a Platón a quien se le considera el verdadero iniciador de la epistemología, porque fue él quien por primera vez hizo intentos sistemáticos por explicar las cuestiones básicas de esta disciplina: ¿Qué es el conocimiento?, ¿En dónde se fundamenta y qué tanto de lo que pensamos que conocemos es realmente conocimiento? ¿Dan conocimiento los sentidos? ¿Puede la razón producir conocimiento?

La matemática como objeto de enseñanza

En lo que va del presente siglo y hasta hace poco tiempo, la concepción filosófica dominante sobre la matemática ha sido formalista que, *grosso modo*, nos presenta a esta disciplina como un cuerpo estructurado de conocimientos; dicho cuerpo está conformado por los objetos matemáticos, las relaciones entre ellos y los criterios para validar resultados dentro de un marco axiomático-deductivo. El formalismo exige extirpar el significado de los objetos a fin de trabajar exclusivamente con las "formas" y con las relaciones entre dichos objetos que se derivan de la base axiomática de las teorías. La actividad matemática, producto de esta concepción, ha sido sumamente fructífera, baste observar la gran cantidad de resultados surgidos en el presente siglo. Sin embargo, esto mismo no se puede decir de la práctica educativa que se deriva de una concepción formalista de la matemática.

Respecto a la epistemología de la matemática que domina la "enseñanza tradicional", ésta tiene raíces históricas mucho más lejanas, que se remontan a la época de la antigua Grecia.

Para Platón, los objetos matemáticos, así como las relaciones entre ellos, tienen una realidad externa e independiente de quien conoce, en el mundo de las ideas. Conocer para Platón significa **re-conocer**, trasladar este cuerpo de objetos y relaciones preexistentes en un mundo exterior e implantarlos en el intelecto del individuo. La tesis fundamental de esta postura epistemológica —que llamaremos realismo matemático— es la separación explícita entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento.

Este realismo epistemológico es modificado por Aristóteles, quien le da un matiz empírico, al trasladar los objetos de la matemática del mundo de las ideas de Platón a la Naturaleza material: conocer ahora significa re-conocer los objetos matemáticos —mediante procesos de abstracción y generalización— en los objetos corpóreos de la Naturaleza.

Ambas concepciones —la idealista de Platón y la empirista de Aristóteles— parten de la premisa fundamental de que los objetos de la matemática y sus relaciones están dados, su existencia no depende del sujeto que conoce, ya que preexisten a él.

Bajo esta concepción, la matemática puede ser vista como un "objeto de enseñanza": el matemático la "descubre" en una realidad externa a él, una vez descubierto un resultado matemático, es necesario "justificarlo" dentro de una estructura formal y queda listo para ser enseñado. Esta concepción epistemológica, en una especie de simbiosis con el formalismo, encaja dentro de la oposición formulada por el empirismo lógico del siglo veinte, “contexto de descubrimiento/contexto de justificación”: el realismo suministra el contexto de descubrimiento, mientras que el formalismo nos da el contexto de justificación.

La transmisión del conocimiento

Considerando que la matemática es un “objeto de enseñanza”, éste puede transmitirse. Quien posee el conocimiento puede ofrecerlo a quien no lo posee[1], sin riesgo de que el conocimiento se modifique en el proceso de transmisión.

La tarea del profesor consiste en “inyectar” el conocimiento en la mente del estudiante a través de un discurso adecuado. El estudiante, por su parte, no puede modificar la estructura del discurso, su tarea consiste en decodificarlo. La didáctica, bajo este punto de vista, busca optimizar la tarea del profesor mediante una especie de combinatoria de contenidos, generalmente apoyada en preceptos universales —como el paso de lo simple a lo complejo, de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto, del análisis a la síntesis— y poniendo especial énfasis en el contexto de la justificación, como estado superior del conocimiento.

La evaluación del aprendizaje, bajo esta concepción, queda definida de manera clara: los mismos contenidos que el profesor transmite inequívocamente mediante su discurso, serán demandados al estudiante quien deberá responder con un discurso análogo. Aunque se reconocen diferencias entre los estudiantes (de inteligencia, de actitud, de motivación), estas diferencias se borran al solicitar respuestas únicas y universales, centradas, principalmente, en el contexto de justificación.

1 Ofrecer un curso, dictar un curso, dar una lección, son expresiones reminiscentes de esta concepción.

Frente a un formalismo exacerbado en la educación matemática, como el que se dio alrededor de los años cincuenta, han habido reacciones significativas: aquellas que admiten un cierto trabajo heurístico previo a la formalización, en particular nos referimos a la llamada pedagogía del descubrimiento, impulsada de manera brillante por Pólya[2]. Sin embargo, esta pedagogía no logró escapar de una concepción realista, claramente explicitada en la idea de que la matemática "se descubre", es decir, preexiste en algún lugar.

Algunas otras teorías del aprendizaje, desarrolladas en épocas recientes, propiciaron la introducción de innovaciones en la didáctica que ofrecían optimizar el proceso de "transmisión y adquisición" del conocimiento. Por ejemplo, las didácticas basadas en las teorías conductistas, que alcanzaron su auge en la década de los setentas, proponían una serie de técnicas —máquinas de enseñanza, textos programados, programación por objetivos, etcétera— bajo el supuesto de que el aprendizaje consiste en la modificación de ciertas conductas observables, provocada por un programa de enseñanza basado en el binomio estímulo-reforzamiento. Estas teorías conductistas tampoco lograron escapar de la concepción realista de la matemática; detrás de la tecnología educativa derivada de ellas, está la idea de que el conocimiento es una especie de "paquete" que se transmite y se adquiere tanto mejor cuanto mejores sean los vehículos que lo transportan.[3]

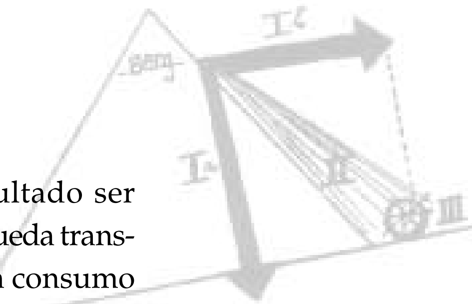
La conjunción realismo-formalismo ha dominado la educación matemática durante el presente siglo: subyace a la mayoría de los textos y de los planes de estudio de todos los niveles escolares, a la actividad de muchísimos profesores, a los métodos de evaluación y clasificación y a muchos de los trabajos de investigación educativa. No obstante, los resultados no han sido del todo satisfactorios: el sentimiento de fracaso en profesores y estudiantes parece ir en aumento. Parece necesario revisar las

2 Véase, por ejemplo Pólya, G., *Matemathical Discovery*, Wiley, N. York,. 1962.

3 La expresión "proceso de enseñanza aprendizaje" empleada indiscriminadamente en la actualidad, proviene de estas teorías: hay un proceso único en cuyos extremos están la enseñanza y el aprendizaje que, en términos generales, vienen a ser una y la misma cosa.

hipótesis (explícitas e implícitas) sobre las que se apoyan nuestros esfuerzos.

La primera pregunta al ver el esquema tradicional:



$$\text{profesor} \xrightarrow{\text{conocimiento}} \text{alumno}$$

es: ¿Qué es el "conocimiento"? "Eso" que no ha resultado ser tan fácil de transmitir quizá se deba a que no es algo que pueda transmitirse, debido a que el profesor no lo tiene "hecho" para consumo de sus alumnos, sino que los alumnos lo construyen. Esta última es la tesis de las epistemologías constructivas que trataremos a continuación.

La matemática como objeto de aprendizaje

Un cambio fundamental en la tesis del realismo matemático se presenta con la *Crítica de la razón pura*, de Immanuel Kant (1724-1804), en donde de manera brillante entra en cuestionamiento la "objetividad" del conocimiento, sin caer en la trampa de la autoconciencia que imponía el racionalismo cartesiano. La tesis kantiana postula que cuando el sujeto cognoscente se acerca al objeto de conocimiento (sea éste material o ideal), lo hace a partir de ciertos supuestos teóricos, de tal manera que el conocimiento es el resultado de un proceso dialéctico entre el sujeto y el objeto, en donde ambos se modifican sucesivamente. Conocer para Kant significa **crear** a partir de ciertos *a prioris*, que permiten al sujeto determinar los objetos en términos del propio conocimiento y no, como suponían los filósofos griegos, el conocimiento en términos de los objetos.[4]

La concepción epistemológica de Kant sirve como punto de partida —aunque las teorías después difieren sustancialmente— para las reformulaciones constructivistas del presente

4 En una formulación célebre, Kant, en el prólogo de la segunda edición de la *Crítica de la razón pura*, ha expresado el nuevo significado del experimento para la indagación científica: "Entendieron [los hombres de ciencia] que la razón sólo reconoce la que ella misma produce según su bosquejo, que la razón tiene que anticiparse con los principios de sus juicios de acuerdo a leyes constantes y que tienen que obligar a la naturaleza a responder sus preguntas... De lo contrario, las observaciones fortuitas y realizadas sin un plan previo no van ligadas a ninguna ley necesaria, ley que, de todos modos, la razón busca y necesita. La razón debe abordar la naturaleza llevando en una mano los principios según los cuales sólo pueden considerarse como leyes los fenómenos concordantes, y en la otra, el experimento que ella haya proyectado a la luz de tales principios..." Kant, I. *Crítica de la razón pura*. Ediciones Alfaguara, Madrid, 1987, p. 18

siglo. Notablemente, Jean Piaget establece su Epistemología Genética sobre la base de que el conocimiento se construye mediante la actividad del sujeto sobre los objetos. Los objetos matemáticos ya no habitan en un mundo eterno y externo a quien conoce, sino que son producidos, construidos por él mismo en un proceso continuo de asimilaciones y acomodaciones que ocurren en sus estructuras cognoscitivas.

Para Piaget (y, en esencia, para todos los constructivistas), el sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten "ver" al objeto de cierta manera y extraer de él cierta información, misma que es asimilada por dichas estructuras. La nueva información produce modificaciones —acomodaciones— en las estructuras intelectuales, de tal manera que cuando el sujeto se acerca nuevamente al objeto lo "ve" de manera distinta a como lo había visto originalmente y es otra la información que ahora le es relevante. Sus observaciones se modifican sucesivamente conforme lo hacen sus estructuras cognoscitivas, construyéndose así el conocimiento sobre el objeto.

De una forma u otra, el propósito de todas las epistemologías ha sido el análisis de las relaciones entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento, y la forma en que se genera el conocimiento mediante tal interacción. El modelo de enseñanza tradicional —soportada por el realismo matemático— que hemos descrito anteriormente, privilegia el objeto de conocimiento y concede un papel pasivo al sujeto. En la perspectiva constructivista, es la actividad del sujeto lo que resulta primordial: no hay "objeto de enseñanza", sino "objeto de aprendizaje".

La construcción del conocimiento

Diversos estudios relativos a la forma en que los estudiantes resuelven problemas matemáticos, han llevado a la explicación, de corte constructivista, de que la estructura de la actividad de resolución de problemas surge como un objeto cognoscitivo (un esquema) a partir de la reflexión que el sujeto hace sobre sus propias acciones. El “conocimiento matemático”, para la epistemología genética, es resultado de esta reflexión sobre acciones interiorizadas —la abstracción reflexiva—. La matemática no es un cuerpo codificado de conocimientos (así como una lengua no es el texto de su enseñanza), sino esencialmente una actividad.

El conocimiento, desde la perspectiva constructivista, es siempre contextual y nunca separado del sujeto; en el proceso de conocer, el sujeto va asignando al objeto una serie de significados, cuya multiplicidad determina conceptualmente al objeto. Conocer es actuar, pero conocer también implica comprender de tal forma que permita compartir con otros el conocimiento y formar así una comunidad. En esta interacción, de naturaleza social, un rol fundamental lo juega la negociación de significados.

Una tesis fundamental de la teoría piagetiana es que todo acto intelectual se construye progresivamente a partir de estructuras cognoscitivas anteriores y más primitivas. La tarea del educador constructivista, mucho más compleja que la de su colega tradicional, consistirá entonces en diseñar y presentar situaciones que, apelando a las estructuras anteriores de que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él. El siguiente paso consistirá en socializar estos significados personales a través de una negociación con otros estudiantes, con el profesor, con los textos.

Al poner el énfasis en la actividad del estudiante, una didáctica basada en teorías constructivistas exige también una actividad mayor de parte del educador. Ésta ya no se limita a tomar el conocimiento de un texto y exponerlo en el aula, o en unas notas, o en otro texto, con mayor o menor habilidad. La actividad demandada por esta concepción es menos rutinaria, en ocasiones impredecible, y exige del educador una constante creatividad.[5]

Temporalidad y viabilidad del conocimiento

Si la matemática fuera un cuerpo codificado de conocimientos —y por lo tanto un "objeto de enseñanza", como lo hemos definido en los capítulos precedentes— entonces la matemática estaría compuesta de verdades atemporales y la historia nos daría cuenta de ello.

No hay duda de que las ciencias naturales han evolucionado y que, con tal evolución, ha ocurrido un cambio en sus **normatividades**, es decir, en la forma en la que se conciben y validan los resultados. Ejemplos de esta evolución son la revolución copernicana, la revolución darwiniana del siglo diecinueve y, en el siglo veinte, las revoluciones relativista y cuántica. La pregunta que nos interesa contestar es si no ha habido un cambio equivalente en la matemática.

Hermann Hankel, matemático notable del siglo diecinueve, dijo en una ocasión que en la mayoría de las ciencias una generación deshace lo que hizo la generación precedente, y que sólo en matemáticas cada generación construye una nueva historia sobre la vieja estructura[6]. La epistemología genética, mediante su método histórico-crítico (que considera a la historia como un "laboratorio epistemológico" en el que se ratifican o rectifican ciertas hipótesis) invalida —parcialmente— este punto de vista

5 Un intento, aunque ya rebasado de lo que podría ser una didáctica constructivista, ha sido el desarrollo por Hans Aebli en su libro *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*, Kapelusz, B. Aires, 1973.

6 Citado por Grabiner, J. V. en *Is Mathematical Truth Time-Dependent?* American Mathematical Monthly 81 (1974) pp. 354-365.

y muestra que hay cambios en el desarrollo de la matemática que no corresponden a una mera acumulación de nuevos "descubrimientos". Como resultado de estos cambios, la colectividad matemática, vista como sujeto cognoscente, crea en su actividad una nueva semántica, una nueva manera de "ver" a los objetos y a la misma disciplina.

Tomemos, por ejemplo, la axiomatización de la geometría euclideana en la Grecia antigua. Tal axiomatización transformó la actividad matemática empírica, tal y como se realizaba en Egipto y Mesopotamia, en una actividad **teórica**. Los resultados geométricos y aritméticos encontrados a partir de múltiples observaciones —mediciones y sistematizaciones de ensayos y errores— por egipcios y babilonios, fueron concebidos por los griegos como conceptos abstractos, cuyo tratamiento requería de un marco metodológico y conceptual diferente.

Asimismo, la creación (no el descubrimiento) de las geometrías no-euclideanas y de las álgebras no conmutativas durante el siglo diecinueve, transformó la actividad matemática en una actividad sobre **lo posible**, ya no sobre **lo necesario**. Es decir, la idea —predominante en un momento dado— de que existe un único modelo matemático para describir una realidad física única, se desplomó ante la evidencia de ciertos modelos, igualmente coherentes y válidos dentro de la estructura de la matemática, que no parecían describir al mundo físico. El modelo tradicional abandonó su carácter de necesidad, y se concibió sólo como **uno** de los modelos entre otros posibles.

De acuerdo a la interpretación constructivista, todo esto permite cambiar las concepciones de la colectividad (sujeto cognoscente) sobre la disciplina: la matemática se reconoce como una actividad esencialmente abstracta, en donde la abstracción reflexiva es el eje de la actividad, y la interiorización de las acciones es su punto de partida.

Estos ejemplos tomados de la historia llevan a sostener que el conocimiento matemático es siempre contextual: como actividad de una sociedad, la matemática no puede desprenderse de su condicionamiento histórico. Consideremos, para reforzar esta idea, la evolución histórica de la noción de "axioma" (o postulado). Esta noción, asociada a las formas de "ver", a la normatividad de la disciplina[7], ha experimentado cambios a lo largo de la historia. En la matemática euclideana, un postulado expresa una **verdad** evidente por sí misma. Subrayamos "verdad" para hacer notar el contenido semántico de la axiomática griega, por oposición al sistema hilbertiano en donde los postulados no se refieren a verdades, sino a relaciones entre los conceptos involucrados. El desalojo del contenido semántico de un sistema axiomático, fue resultado de un larguísimo proceso de análisis sobre la axiomática euclideana, desarrollado en torno del postulado de las paralelas, que muestra claramente el cambio en la normatividad que subyace a la propia evolución de la disciplina.

De este desarrollo de la matemática se desprende que el conocimiento matemático no necesariamente es "verdadero": más bien diremos que es viable en el sentido que "cuadra" con la experiencia. Aclaremos esto con un ejemplo: los esquemas que una persona desarrolla para conducir un automóvil pueden ser diferentes a los desarrollados por otra persona. No tiene sentido considerar que unos son más "verdaderos" que los otros; sólo tiene sentido preguntarse cuáles esquemas de conducción son más adecuados a las condiciones de manejo a las que esas personas se ven enfrentadas. Diremos entonces que cierta forma de conducción es más viable que la otra, que una de estas personas ha construido una forma de conducción viable. Ésta es una forma de conocimiento viable en cuanto a la experiencia pertinente.

7 Decimos "normatividad" y no "criterios de justificación" porque la forma de validar es consustancial a la naturaleza de los objetos matemáticos, naturaleza vinculada orgánicamente a la forma de actividad del sujeto.

La concepción educativa enraizada en las modalidades del formalismo matemático a que hemos aludido, no sólo concibe el conocimiento matemático como un cuerpo de conocimientos que anteceden al estudiante, sino que además traslada la normatividad de la matemática al proceso de evaluación del aprendizaje. El estudiante debe asimilar el conocimiento que le es transmitido y simultáneamente debe desarrollar un comportamiento cognoscitivo acorde con la normatividad de la disciplina matemática. Este grado de exigencia olvida que la normatividad de una ciencia es consustancial al proceso histórico de su desarrollo. La temporalidad de las "verdades" matemáticas viene en apoyo a esta posición. Los criterios normativos no le pueden ser impuestos desde fuera a una ciencia. El riesgo de hacerlo, en didáctica, consiste en imponer un proceso lógico —la justificación— a un proceso cognoscitivo —la construcción del conocimiento matemático—. Este último tiene su propia lógica.

La construcción del significado

El núcleo de la actividad constructiva por parte del estudiante consiste en construir significados asociados a su propia experiencia, incluyendo su experiencia lingüística. La socialización de este proceso consiste en la negociación de tales significados en una comunidad —el salón de clase— que ha hecho suyo ese proceso constructivo. La sensación de objetividad que se desprende del proceso negociador, induce a la creencia que este conocimiento compartido preexiste a la comunidad que se dedica a su construcción. Es necesario analizar con cuidado las relaciones entre matemática y lenguaje. Este último es un campo de experimentación para el estudiante.

Para el constructivismo es importante distinguir entre "concepciones" y "conceptos".[8] Estos términos se emplean con un sentido próximo a lo que Freudenthal denomina "objetos mentales" y

8 Véase por ejemplo, Sfard, Anna: *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processer and Objets as Differents Sides of the Same Coin.* Educational Studies, 22 pp. 1-36, 1991.

“objetos formales”.[9] La experiencia del estudiante, su punto de partida, es una red de información, de imágenes, de relaciones, de anticipaciones y de inferencias alrededor de una idea. Este complejo cognoscitivo es lo que llamamos su concepción. El trabajo del estudiante consiste entonces, en extraer de tal concepción relaciones y patrones: un conjunto coordinado de acciones y esquemas que conducen al conocimiento viable, a los conceptos y a la generación de algoritmos. El proceso de construcción de significados es gradual, pues el concepto queda, por así decirlo, “atrapado” en una red de significaciones.

A lo largo del proceso constructivo —que es permanente— el estudiante encuentra situaciones que cuestionan el “estado” actual de su conocimiento y le obligan a un proceso de reorganización; con frecuencia el estudiante se ve obligado a rechazar, por inviable, mucho de lo que ya había construido.

Durante el proceso de construcción de significados, el estudiante se ve forzado a recurrir a nociones más primitivas que expliquen la situación que estudia. Esta situación es análoga al desarrollo de una ciencia durante la búsqueda de sus principios. En la física, por ejemplo, el estudio de las leyes generales del movimiento condujo a la formulación de la ley de la inercia; en matemáticas, el estudio de la geometría condujo primero a las organizaciones locales y, posteriormente, a la axiomática de Euclides.[10] Claro que esto sólo es una analogía: el estudiante no está conscientemente buscando esquemas lógicos. Más bien, está tratando de encontrar el sentido de aquello a lo que se ve enfrentado.

Esta búsqueda del sentido es una necesidad cognoscitiva, porque la matemática se desarrolla en un escenario ideal. Los términos “conjunto”, “función”, etcétera, corresponden a experiencias mentales. Es imposible, en este punto, dejar de reconocer el

9 Freudenthal, H., *Didactical Phenomenology of* Mathematical Structures, Holanda, Ridel, 1983.

10 Véase Bromberg, S., Moreno, L. *Tres hitos en la historia de la fundamentación de la geometría*. Mathesis, vol. VI, No. 3, pp. 281-306, Agosto 1990.

papel central de la abstracción reflexiva, como el mecanismo que da lugar a las experiencias del mundo matemático.

Las ciencias naturales dan cuenta de fenómenos que se observan —siempre desde una interpretación preliminar por parte del sujeto— en el mundo material; la matemática, por su parte, da cuenta de la estructura de un mundo ideal, cuya "materia prima" son las acciones interiorizadas del sujeto. Es necesario el empleo de un lenguaje formal para hablar de este mundo ideal. En la versión de la didáctica derivada del formalismo, existe la tendencia a identificar los objetos de la matemática (que son objetos epistémicos, pues ellos constituyen nuestro saber) con los nombres que usamos para referirnos a tales objetos en la lengua formal. De este modo, la realidad epistémica queda oculta; pero la necesidad de construir el sentido la trae de vuelta. ¿Por qué no aprovechar plenamente esta situación ineludible?

Concreción y representación

Hemos aludido ya a la sensación de concreción que suele acompañar a los objetos matemáticos cuando cedemos al impulso de identificarlos con los términos del lenguaje formal mediante el cual los denotamos. Tomando en cuenta que el lenguaje natural y los lenguajes formales son parte de la experiencia del sujeto —el sujeto posee un impulso simbólico— cabe entonces la pregunta: ¿En qué sentido son abstractos los objetos matemáticos?

Mediante el lenguaje formal (simbólico) se opera un cambio en el plano de representación que, en primera instancia, permite explicar que las acciones, que en el plano material se realizan con objetos concretos, en el plano ideal se realizan con símbolos. Parece desprenderse de aquí un criterio sobre el grado de abstracción de los objetos de la matemática: la abstracción es resultado de un cambio en el nivel de representación.

Los objetos de la matemática se manipulan, se operan al nivel de lo simbólico; estas acciones en el nivel simbólico permiten ir generando una red de relaciones entre diversos objetos. Mediante el paso a un nuevo nivel de representación, esto se lleva hasta las estructuras mismas por la vía de la organización de las acciones interobjetales. Las sucesivas fases en el tránsito de lo concreto hacia lo abstracto, van sustancialmente vinculadas a las posibilidades de generar relaciones y estructuras a partir de la operación de los objetos matemáticos.

En la medida en que operamos tales objetos crece la red de significaciones que los vincula y con ello, el grado de objetividad con el que aparecen en nuestras estructuras cognoscitivas. En otros términos: tales objetos han devenido para nosotros más concretos. Por ello, los criterios que refieran el grado de concreción de una idea —de un referente conceptual— al número de objetos materiales que podamos asociarle, sin tomar en cuenta la actividad operatoria, son insuficientes. Éste es el punto de vista de la didáctica a la que subyace una "ontología realista", que pretende que los objetos matemáticos existen en sí; que se trata de ir descubriendo sus características hasta que el estudiante los "capte en su verdadera naturaleza", la abstracta, desvinculada de lo real. No parece necesario insistir, a estas alturas, sobre lo equívoco de este enfoque. Se trata, más bien, de reconocer la naturaleza dual, simbólica y operatoria que hace concretos a los objetos matemáticos. Que permite la actividad básica del estudiante: utilizar los diversos niveles de representación para la construcción del sentido.

Tomado de la revista: *Educación matemática,*
vol. 4, núm. 2, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1992.

BIBLIOGRAFÍA

BROMBERG, S., MORENO, L. (1990). *Tres hitos en la historia de la fundamentación de la geometría*. Mayhesis. Vol. VI. núm. 3. México.

FREUDENTAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel. Holanda.

GRABNER, J.V. (1974). *Is mathematical truth time-dependent?* American mathematical monthly 81.

HANS AEBLI (1973). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget.* Kapelusz. Buenos Aires.

KANT, I. (1978). *Crítica de la razón pura.* Ediciones Alfaguara. Madrid, España.

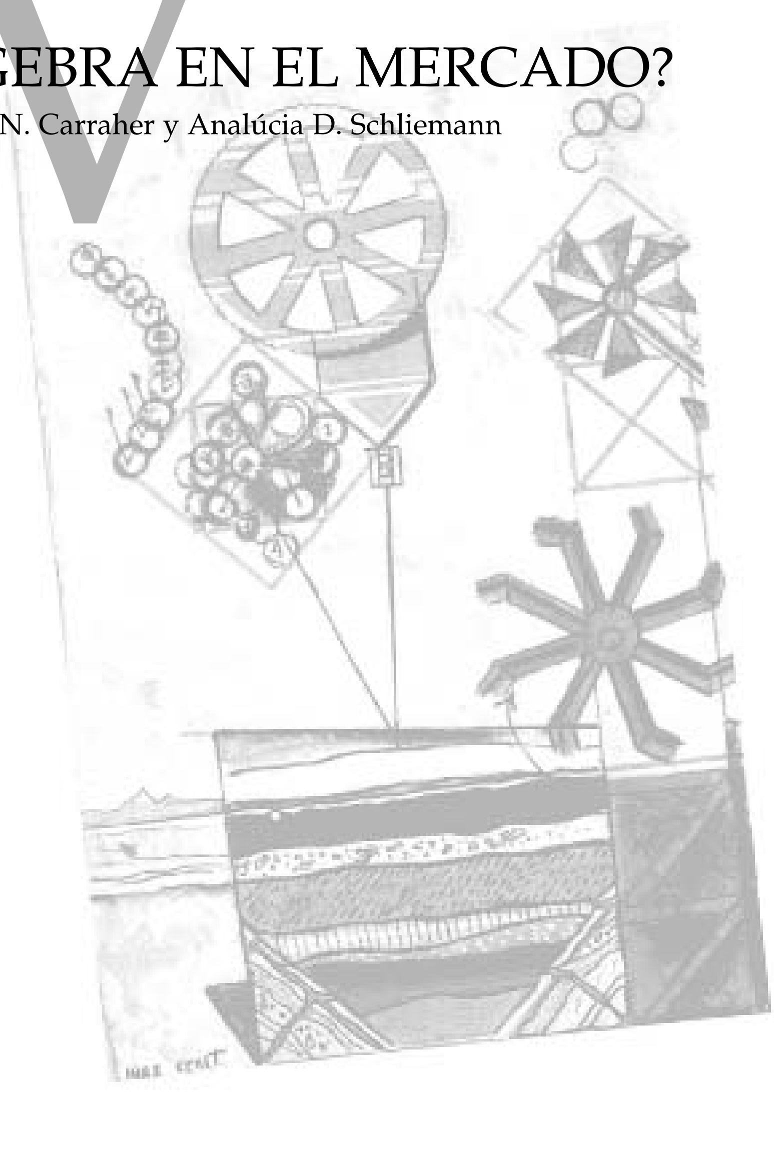
PÓLYA, G. (1962). *Mathematical discovery.* Wiley, New York.

SFARD, ANNA (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processer and objects as differents sides of the same coin.* Educational Studies.

IV

¿ÁLGEBRA EN EL MERCADO?

Terezinha N. Carraher y Analúcia D. Schliemann



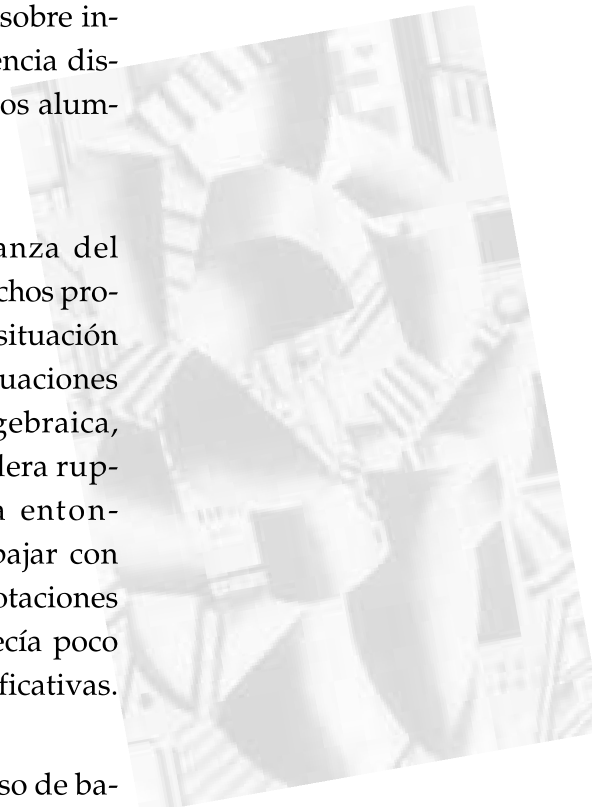
¿ÁLGEBRA EN EL MERCADO? [1]

Terezinha N. Carraher y Analúcia D. Schliemann

(...) Los conceptos y habilidades matemáticos pueden desarrollarse en el trabajo, generando estrategias eficientes de resolución de problemas. Sin embargo, la naturaleza del conocimiento matemático desarrollado informalmente todavía no está del todo esclarecida. Conceptos diferentes que forman parte del conocimiento matemático pueden no tener las mismas posibilidades de construcción dentro y fuera de la escuela, en situaciones informales y formales de aprendizaje, con o sin la ayuda de un profesor que introduce una simbolización que facilite la comprensión del modelo. Cada modelo matemático debe ser detalladamente analizado en cuanto a las posibilidades de construcción fuera del salón de clases. Hasta cuando una situación parece ideal para la comprensión de un modelo matemático específico, es posible que la comprensión que el sujeto desarrolla en la vida cotidiana se base sólo en la adquisición de rutinas de trabajo; este tipo de utilización de estrategias de solución de problemas debe ser diferenciado de la comprensión real de modelos matemáticos.

1 Agradecemos a VITAE el auxilio para el viaje que posibilitó la presentación de este trabajo en el XI Annual Meeting del International Group for the Psychology of Mathematics Education, Montreal, julio de 1987.

Filloy y Rojano (1984), Vergnaud y Cortés (1986) argumentaron que la presentación de situaciones-problema usando la balanza de dos platillos es extremadamente útil para la introducción del álgebra, auxiliando al estudiante a vencer dos obstáculos que interfieren significativamente en la



comprensión del álgebra en la escuela: 1] la operación sobre incógnitas y 2] la utilización de un concepto de equivalencia distinto de los significados anteriormente atribuidos por los alumnos al signo igual.

El uso de situaciones significativas para la enseñanza del álgebra es particularmente interesante porque existen muchos profesores de matemáticas que consideran al álgebra una situación muy abstracta, sin ninguna correspondencia con situaciones concretas. Cuando se introduce la simbolización algebraica, se nota en la enseñanza de las matemáticas una verdadera ruptura en el progreso de ciertos alumnos que hasta entonces, por su habilidad, parecían muy capaces de trabajar con operaciones aritméticas. El álgebra, por introducir notaciones todavía más distantes de significados específicos, parecía poco susceptible de ser enseñada mediante situaciones significativas.

Este estudio analiza las habilidades subyacentes en el uso de balanzas de dos platillos en la vida cotidiana. Esas balanzas son utilizadas con mucha frecuencia en los mercados libres de ciudades pequeñas del noreste de Brasil, adonde todavía no llega la tecnología de las balanzas digitales a todas las actividades. En las situaciones más comunes, en uno de los platillos de la balanza se colocan las pesas y en el otro la mercancía que se va a pesar. Cada balanza tiene un conjunto de pesas apropiadas para el tipo de mercancía que se vende. Para las mercancías vendidas en mayores cantidades, como harina, maíz o frijol, la serie de pesas incluye 50, 100, 200, 500, 1000, 2000 y 5000 gramos. Si un cliente desea comprar 350 gramos, se colocan en un platillo las pesas de 50, 100 y 200 gramos, y se va agregando la mercancía en el otro platillo hasta que la balanza queda equilibrada. Existe también una solución sustractiva que podría ser usada en este caso, la cual consiste en colocar 500 gramos en un platillo y 150 gramos donde se coloca la mercancía. Estas soluciones proporcionan la práctica con operaciones numéricas que incluyen incógnitas y con una noción subyacente de equivalencia. En la solución aditiva, en que de un lado del platillo se colocan tres pesas, una de 200, otra de 100 y otra de 50 gramos, el sujeto sólo necesita sumar 200 y 150 para saber cuál es el peso de la mercancía del otro lado. La ecuación correspondiente sería $200 + 100 + 50 = x$, lo que no exige que el sujeto opere sobre la incógnita. En la solución de resta, sin embargo, la ecuación correspondiente es $500 = x + 100 + 50$, o sea, sumando 150 y x se obtiene 500, lo cual significa operar con una incógnita.

Diferentes habilidades cognoscitivas pueden desarrollarse como resultado de esa experiencia práctica. Una de las posibilidades es que los sujetos aprendan sólo una rutina para pesar mercancías, dado que existen pocas variaciones en la situación práctica. Por ejemplo, el vendedor que trabaja con pesas de 50, 100, 200, 500 y 1000 gramos, sólo necesita aprender las siguientes situaciones de resta: a] 400 gramos se pesan colocando 500 de un lado y 100 del otro; b] 450 gramos se pesan colocando 500 de un lado y 50 del otro; c] 900 gramos se pesan colocando 1 kilogramo de un lado y 100 gramos del otro; d] 950 gramos se pesan colocando 1 kilogramo de un lado y 50 gramos del otro. Dado el pequeño número de reglas para pesar y la poca frecuencia de estas situaciones, es efectivamente posible que los sujetos, a pesar de trabajar en una situación que puede ser descrita por un modelo matemático más complejo, no comprendan ese modelo a partir de su experiencia. La memorización de un conjunto tan pequeño de reglas para pesar no está por cierto más allá de la capacidad de memoria de ninguno de los vendedores. Sin embargo, por su propia organización, la situación podría también proporcionar el aprendizaje de un modelo matemático de equivalencias y manipulación de incógnitas, el cual podría ser transferido a otras situaciones más complejas.

Suponiendo que el vendedor llegase a comprender las relaciones entre las pesas como relaciones de equivalencia, en lugar de sólo manipular reglas, todavía es posible pensar en dos formas diferentes de organización de esta comprensión, en diversos niveles de complejidad. En un nivel más simple, el sujeto comprendería sólo que las equivalencias podrían ser transferidas a otras medidas, como litros, y a valores básicos diferentes. En este caso podemos caracterizar la competencia de los sujetos como suficiente para resolver incógnitas, pero no para operar sobre incógnitas; la resolución sería, de hecho, lograda intuitivamente, de la misma forma que hacemos cuando resolvemos un problema muy sencillo representado en álgebra (por ejemplo $4+x = 6$). Un segundo nivel más complejo, sin embargo, es también posible, el cual sería definido por una comprensión profunda de equivalencias y cancelaciones, que puede ser aplicada en la solución de ecuaciones tal como Filloy y Rojano (1984) y Vergnaud y Cortés (1986) utilizan en situaciones de enseñanza. Si este tipo de conocimiento más profundo fue adquirido al trabajar con la balanza, los vendedores que tienen esa práctica deberían ser capaces de resolver espontáneamente problemas más complejos con incógnitas, o aprenderían a resolver esos problemas mediante la cancelación con relativa facilidad.

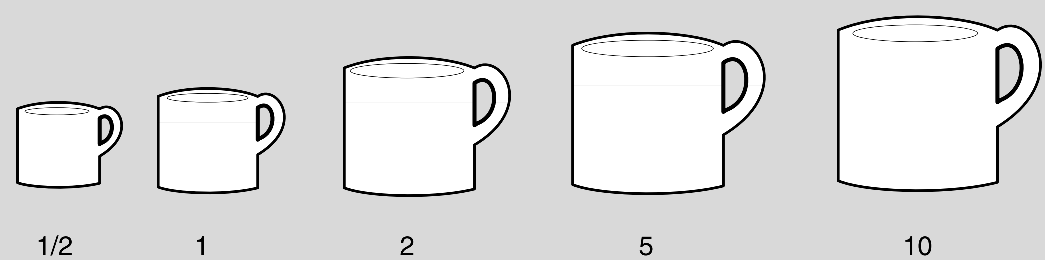
La utilización de entrevistas clínicas en que se averigua tanto la capacidad de utilización espontánea de una estrategia de operación sobre incógnitas, como la posibilidad de un aprendizaje rápido, está ligada al concepto de zona cercana al desarrollo, de Vigotsky (1978). Cuando un sujeto no usa un concepto que le posibilite la solución independiente de un problema, pero se muestra capaz de aprenderlo con facilidad, Vigotsky propone que este concepto se sitúa en su zona cercana de desarrollo. Ésta es una situación ideal para la actuación de la escuela.

MÉTODO

El estudio fue realizado en Gravatá, ciudad del interior de Pernambuco, de aproximadamente 70,000 habitantes. Los sujetos fueron seleccionados en los puestos de la feria o en el interior del mercado durante las horas de trabajo, después de que los examinadores observaron que trabajaban con las balanzas de dos platillos. No hubo ningún intento de seleccionarlos por sexo, edad o nivel de escolaridad.

La recolección de datos fue realizada en dos fases. En la primera, en situación natural de compra y venta se pedía al sujeto que pesara 400 o 900 gramos de cualquier mercancía que estuviese vendiendo. Se justificaba la cantidad poco común, para el caso de algunas mercancías, diciendo que aquella cantidad era para hacer una receta y no se podían cambiar las cantidades. Dentro de todos los sujetos seleccionados, sólo uno, que hacía poco tiempo que trabajaba en la feria, no utilizó la solución de la resta en este primer momento. Después de comprar uno o dos *ítems* al vendedor, las examinadoras se presentaban como profesoras interesadas en los usos de las matemáticas en la vida diaria y pedían permiso para presentar otros problemas. Tres vendedores se rehusaron a participar y 28 (6 mujeres y 22 hombres, de niveles de escolaridad que iban desde analfabetas hasta curso secundario completo) aceptaron intentar resolver los problemas. En la segunda fase del estudio se aplicaron dos tareas de transferencia. Una de ellas con volúmenes y la otra con pesos. La tarea de volúmenes era de transferencia sencilla, y consistía en cambiar la dimensión de los problemas de peso en volumen evaluado en litros, manteniéndose la misma estructura general de los problemas de la vida cotidiana, o sea, utilizando sólo una incógnita y la misma estructura de valores. Se pedía a cada sujeto que dijera cómo obtendría cinco cantidades (3, $6\frac{1}{2}$, 4, 9 y $9\frac{1}{2}$ litros) utilizando jarros que permitían medir exactamente $\frac{1}{2}$, 1, 2, 5 y 10 litros, pudiendo usar cada jarro sólo una vez. Para ayudar a la comunicación entre el examinador y el sujeto, se hizo un diseño de los jarros, con sus respectivas capacidades en litros (Figura 1), el cual era mostrado al sujeto durante la explicación y resolución del problema. Dos de esos problemas podían ser resueltos (obtener 3 y $6\frac{1}{2}$ litros) mediante soluciones aditivas. Los demás problemas requerían soluciones de resta, paralelas a las utilizadas en situación natural con pesas (40, 400, 90, 900 y 950 gramos siempre se obtienen por medio de sustracción). Puesto que no había ninguna razón para esperar diferentes niveles de dificultad entre los *item*, se adoptó un orden fijo de presentación que permitía analizar los efectos de la práctica sobre la tarea.

FIGURA 1
Diseños mostrados a los sujetos en la tarea de volúmenes.



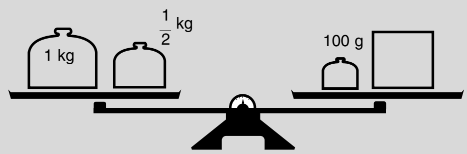
La tarea de pesar consistía en presentar al sujeto diseños de balanzas de dos platillos en equilibrio, con pesas y paquetes de mercancías colocados sobre ellas (véase en la Figura 2 la lista de problemas con los respectivos diseños). El problema consistía en encontrar el peso exacto de los paquetes para que la balanza estuviese, de hecho, en equilibrio. Inicialmente se investigó la necesidad de utilizar materiales concretos (paquetes colocados sobre la balanza) para la aplicación de la tarea. Sin embargo, la situación fue que los diseños mostraron ser de fácil comprensión por los sujetos en una investigación inicial, siendo de aplicación más sencilla.

Se utilizaron tres tipos de problemas. Del primer tipo formaban parte los dos primeros *item* de la lista, que tenían sólo una incógnita en uno de los platillos y cuya finalidad era presentar al sujeto una situación formal de tarea. En el primer *item*, el problema (1 500g = 100 + x) era en lo esencial paralelo a aquellos que pueden observarse en la vida diaria; en el segundo, la incógnita era presentada por dos paquetes (2x), lo cual ya no representa una situación habitual; pero la estructura del problema seguía siendo la misma en términos de complejidad del modelo (2000g = 800g + 2x), porque hay sólo una incógnita en uno de los dos lados de la ecuación. El segundo grupo de *items* estaba formado por los problemas *c* y *e* de la Figura 2, que son problemas con dos incógnitas (500g + x = 100 + x + y; x + y + 900g = x + 1000g), una de las cuales no precisaba ser resuelta y podía ser cancelada, simplificando el problema y transformándolo en un problema más sencillo, con una incógnita. De hecho, el sujeto sólo necesitaba comprender que, retirando de la balanza los dos paquetes iguales cuyo peso no le interesaba descubrir, la balanza permanecería en equilibrio (o sea, si 500g + x = 100 + x + y, entonces sustrayendo x de los dos platos tenemos que 500g = 100 + y, y la balanza continúa en equilibrio). En este caso, las diferencias advertidas entre los paquetes cuyo peso no necesita descubrir el sujeto y el del paquete cuyo peso debería ser encontrado podría facilitar la tarea. Finalmente en el tercer grupo de *item* fueron incluidos tres problemas (como el *a*, *b* y *d* de la Figura 2) con una incógnita en ambos lados de la ecuación (750 + x = 500 + 2x; 300 + 2x = 100 + 3x; 3x + 250g = 2x + 500g), los cuales mostraban si el sujeto había desarrollado un modelo lógico-matemático más general para comprender la situación, siendo capaz de manipular incógnitas y comprender equivalencias algebraicas.

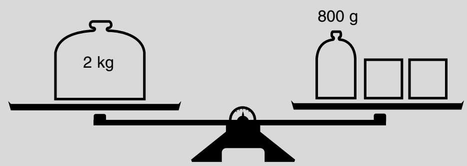
FIGURA 2

ecuaciones | **diseños mostrados a los sujetos**

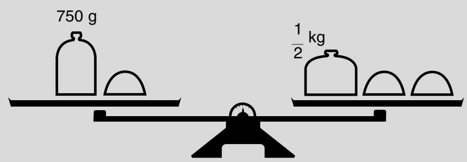
1 500 = 100 + x



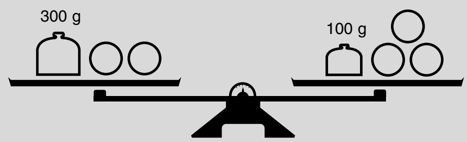
2 000 = 800 + 2x



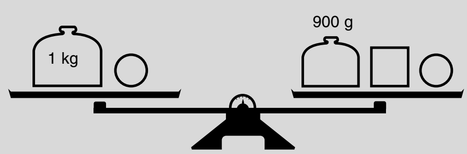
a) 750 + x = 500 + 2x



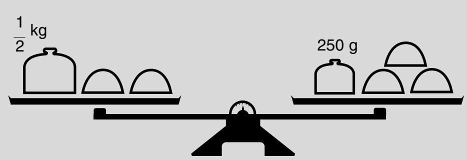
b) 300 + 2x = 100 + 3x



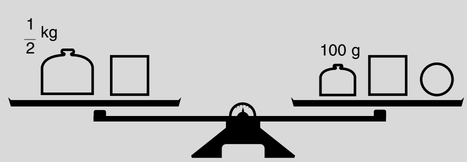
c) 1 000 + x = 900 + x + y



d) 500 + 2x = 250 + 3x



e) 500 + x = 100 + x + y



PROBLEMAS PRESENTADOS A LOS SUJETOS EN LA TAREA DE PENSAR

Siempre fueron presentados en primer lugar los dos *item* de adaptación a la tarea. Los demás fueron organizados en forma aleatoria como la figura 2 y presentados a los sujetos en orden directo, de *a* a *e*, o en orden inverso, de *e* a *a*. Después de la resolución correcta o incorrecta de los *item* presentados en tercero y cuarto lugares, el examinador mostraba el uso de un método más general (denominado "manipulación de incógnitas") para la solución de los problemas por sustracción de paquetes iguales de los dos platillos de la balanza, simplificando el problema. Ese método era presentado como si fuese el método de resolución usado por otro vendedor examinado antes, el cual nos había dicho que su método era muy fácil. La presentación de una estrategia como modelo por el examinador intentaba evaluar si los sujetos que no habían adoptado espontáneamente esta estrategia conseguían aprenderla sólo después de dos demostraciones.

El orden de las dos tareas formales (volúmenes y pesos) varió entre los sujetos. Algunos respondieron a las dos tareas en el mismo día. Otros fueron examinados en días diferentes con un intervalo máximo de una semana entre las tareas. A tres sujetos, después de que realizaron la tarea de volúmenes, no se les encontró para realizar la del peso y a otros dos no se les encontró para hacer la tarea de volúmenes después de haber resuelto la de pesar.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la tarea de volúmenes, todos los problemas de suma fueron resueltos correctamente y sólo un sujeto no resolvió ninguno de los dos problemas que exigían sustracción. Probablemente este vendedor había aprendido, en su trabajo con la balanza, sólo una rutina que le permitía obtener los pesos deseados. Dado que el orden de presentación era fijo, se obtuvieron diferentes resultados para los *item* como 4, 9 y 9 $\frac{1}{2}$ litros. Los resultados referentes a los *item* sustractivos están contenidos en el cuadro 1.

CUADRO 1

PORCENTAJE DE RESPUESTAS CORRECTAS E INCORRECTAS POR *ITEM* EN LA TAREA DE VOLÚMENES (N = 26)

	aciertos inmediatos	aciertos después de dar pistas	errores
4 *l*		46.1	46.1 7.8
9 *l*		88.5	7.7 3.8
9 $\frac{1}{2}$ *l*		96.2	- 3.8

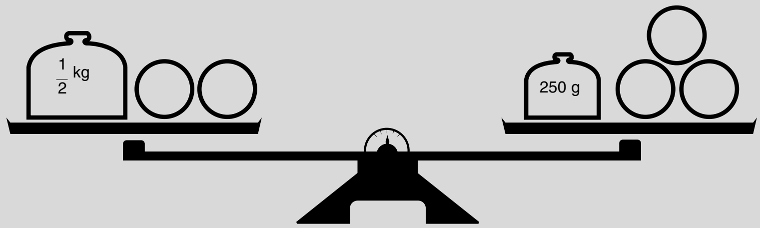
Se ve claramente el efecto de la práctica en la tarea por el aumento en el porcentaje de respuestas correctas del problema con 4 litros, para el problema de 9 $\frac{1}{2}$ litros, en el cual sólo el sujeto que no resolvió ninguno de los dos problemas de resta no pudo presentar la solución correcta de inmediato. Aunque las respuestas correctas en esta tarea pudiesen ser dadas independientemente de la experiencia de la balanza de dos platillos, el hecho de que la sugerencia para resolver el problema de 4 litros por analogía, como la forma de pesar 400 gramos haya ayudado a encontrar la solución puede ser interpretado como una indicación de transferencia de una tarea a la otra. Sin embargo, nuestra posibilidad de llegar a la conclusión de que los sujetos de hecho aprendieran por lo menos un modelo sencillo de equivalencias resulta perjudicada en este caso por la ausencia de un grupo apropiado de control. En un estudio posterior, esa comparación será introducida y las conclusiones podrán ser presentadas de modo más positivo.

La tarea con pesas mostró una fácil adaptación de los sujetos en los dos primeros *item*: todos los sujetos resolvieron el primer *item* correctamente y 96% resolvió los dos. Este resultado indica que los sujetos reconocieron la tarea como semejante a la de su trabajo con la balanza. Los demás *item*, donde los paquetes de valor desconocido aparecían en ambos platillos, variaron en dificultades. Los *item* del segundo tipo, donde una de las incógnitas no precisaba ser resuelta, fueron más fáciles (72.9% de repuestas correctas) que las del tercer tipo, donde la misma incógnita aparecía en los dos platillos (65.3% de respuestas correctas).

En la resolución de los problemas se observaron dos estrategias diferentes, indicando ambas transferencias de la situación de trabajo a la situación formal. Sin embargo, cada estrategia parece indicar la transferencia de conocimientos diferentes formados en la misma situación de trabajo.

Una de las estrategias, que denominamos *manipulación de incógnitas*, consiste en tratar al problema como una situación en que se puede operar sobre las incógnitas sin destruir las equivalencias. En este caso los sujetos comprendían espontáneamente o después de habérselo sugerido, que el equilibrio de la balanza (o sea, la equivalencia entre los pesos de los dos platillos) se mantendría si de ambos lados se retirasen paquetes de igual valor, aun cuando ese valor fuese desconocido. Esa estrategia fue utilizada por lo menos una vez por ocho sujetos (cuatro espontáneamente y cuatro después de habérselo demostrado el examinador) y llevaba a una rápida solución de cualquier problema. Los sujetos que utilizaron esta estrategia espontáneamente lo hicieron en todos los *item*. Aquellos que sólo utilizaron la estrategia de manipulación de incógnitas después de la demostración del examinador tendían a generalizarla en todos los problemas subsiguientes. El ejemplo de la Figura 3 ilustra la estrategia de manipulación de equivalencias.

FIGURA 3



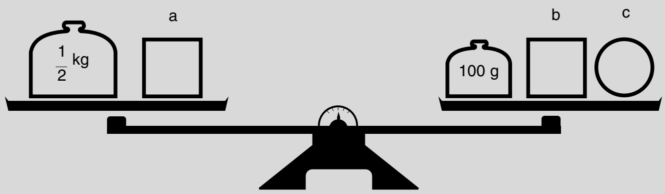
Problema: 500 g + 2x = 250 g + 3x

Sujeto núm. 20; sexo: femenino; escolaridad: 5a. serie
S (sujeto): Son iguales, ¿no? Pronto, ahí quedan doscientos cincuenta gramos.
E (examinador): ¡Caray, qué rápida es la señora! ¿Cómo lo sabe hacer tan rápido?
S: Porque los dos son iguales (muestra los dos paquetes a cada lado de la balanza). Aquí, 250 quiere decir que el paquete está pesando 250. Porque aquí tiene 500 menos 250 y ahí queda 250.

El segundo tipo de estrategia, denominado prueba de hipótesis, revelaba un enfoque diferente del problema. En esa estrategia los sujetos comprendían que debían mantenerse las equivalencias, pero no realizaban ninguna manipulación de incógnitas. En este caso, intentaban descubrir el valor de las incógnitas probando las hipótesis razonables sobre los lados. Las hipótesis podían ser de dos tipos: sobre el valor de cada paquete o sobre el valor total en cada platillo. Cuando la hipótesis se refería al valor total del peso en cada platillo, éste tendía a ser de un kilo, dos kilos, etcétera, o sea, cantidades habitualmente compradas por los clientes en las ferias; cuando la hipótesis era sobre el valor de los paquetes, se utilizaban valores menores, como 100, 200 y 500 gramos, correspondiendo frecuentemente a los valores de las pesas usadas en la balanza. El uso de la prueba de hipótesis sobre los valores de cada paquete está ilustrado en el ejemplo de la Figura 4.

FIGURA 4

PROBLEMA

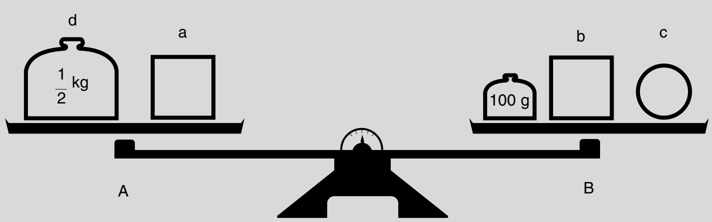


Problema: 500 g + x = 100 + x + y

Sujeto núm. 17; sexo: masculino; escolaridad: 3a. serie.
S: 150g cada paquete y sin ése aquí. Quiere decir que 150 más 150, da 300. Con 100, 400, con 100, 500, $\frac{1}{2}$ kg
E: Pero espera, ese paquete está del lado de acá. Ése está en el platillo del $\frac{1}{2}$ kg
(E explica el problema otra vez).
S: También se puede hacer así, ¿no? Son 500, 600, puede hacer ése aquí, puede hacer 600. Éste aquí (a) da 100, éste aquí (b) da 100 (refiriéndose a los paquetes representados por la x en la ecuación)...ése aquí (c) da...
E: Ése es igual a éste (confirmando que a y b deben ser iguales).
S: ¡Pronto! Ése aquí puede ser 300... 200, ¿no es eso?
E. Entonces ése aquí ya estaba como 100 ¿no? Usted hace 100 a ése.
Ahí, ahora ¿cuánto va a ser ése (c)?
S: 300 (c), 400 (a), 500 (100)...(sumando los valores en un lado). Quiere decir que ése aquí (c) puede dar 400, ¿no?
E: Vamos a ver. Vea si con 400 acertó.
S: Porque vea, 500 con 100 dan 600, ¿no? 600. Ahora tiene 100, 200 (b) con
400 (c) da 600.

Ese método permitió que los sujetos solucionasen varios problemas, aunque les llevaba mucho más tiempo que el método anterior, dado que implicaba un proceso de prueba y error. Once sujetos usaron este método por lo menos una vez. En la prueba de hipótesis sobre el valor de cada platillo, los valores probados eran siempre los más comúnmente encontrados en las situaciones de venta como un kilo o medio kilo. Aunque comprendían las instrucciones en el sentido de que todos los paquetes deberían tener el mismo peso, los sujetos que trabajaban con este método intentaban ajustar el peso del paquete para obtener el equilibrio de la balanza. Un ejemplo de este método puede verse en la Figura 5.

FIGURA 5



Problema: 500 g + x = 100 + x + y

Sujeto núm. 16; sexo: masculino; escolaridad: analfabeto.
S: Bien, yo voy a completar el kilo ahí (A). Completar el kilo. Aquí es 500 (a), con 500 (d), son 1 kg, ¿no?
S: Y si ese cuadrado es 500 (a), ése también tiene que ser 500 (b).
S: Tiene que ser 500. Es 500... y 400... y 100.
Ése (c) es 400.
E: ¡Ya lo descubrió! ¿Cómo descubrió el señor que aquí es 400?
S: Porque tiene que ser. Porque aquí (B) es el peso de ése (A), ¿no? Coloqué ése de 500 para completar el kilo. Aquí (B), para completar el kilo tengo que colocar éste de 400 (c) y ése de 100 y ése (b) de 500, lo mismo de aquí.

Quizás esta estrategia no sea la más adecuada para resolver los problemas de la tarea formal, pero es congruente con las exigencias de la situación de trabajo donde el cliente solicita pesos globales de una mercancía, como un kilo o un medio kilo, o le entrega al vendedor una porción de mercancía y el vendedor va colocando o retirando mercancía hasta obtener, por ejemplo, un kilo. Ese método fue usado por lo menos una vez por cada diez sujetos.

Los sujetos que utilizaron los métodos de *prueba de hipótesis* mostraron menos congruencia que quienes utilizaron la manipulación de equivalencias. En el tipo de prueba de hipótesis utilizado influyeron fuertemente los valores contenidos en el problema. Las hipótesis sobre los valores de los paquetes eran utilizadas con más frecuencia en los problemas con dos incógnitas, de las cuales sólo una precisaba ser resuelta. Las hipótesis sobre el peso total en un platillo eran más comunes cuando los valores en el problema incluían 250, 500 g, y el total en un platillo era realmente de 1 000 gramos.

Las estrategias diferían claramente en términos de eficiencia, a pesar de ser posible obtener respuestas correctas con cualquiera de los tres métodos. Cuando la manipulación de incógnitas era utilizada, no se observaban errores, para la prueba de hipótesis sobre los valores de los paquetes, el porcentaje de aciertos fue sólo de 56%. Para las hipótesis sobre el peso total de los platos, este porcentaje fue de 65.

El desempeño en la tarea de pesar fue mejor para los sujetos con niveles más altos de escolaridad. Sin embargo, aun los sujetos analfabetas (tres dentro de los cuatro examinados) consiguieron aprender el método de manipulación de equivalencias. Los resultados de un análisis de las relaciones entre escolaridad y desempeño en esta tarea están contenidos en el cuadro 2, donde aparecen los 22 sujetos de quienes dispusimos de información sobre escolaridad.

La observación del cuadro 2 muestra que el efecto positivo de la escolaridad no puede ser explicado por la enseñanza del álgebra en la escuela, dado que ese efecto se hace sentir a partir de la segunda o tercera serie y la enseñanza del álgebra aparece sólo a partir de la quinta o sexta serie en las escuelas públicas, que sirven a los estratos de ingresos a los cuales pertenecen los sujetos.

CUADRO 2

FRECUENCIA DE SUJETOS POR NÚMERO DE ERRORES Y NIVEL DE ESCOLARIDAD EN LA TAREA DE PESAR

número de años de escolaridad								
errores*	años							
	0	**1/2**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**11**
0	-	-	-	1	2	1	2	2
1	2	-	-	-	1	-	-	-
2	1	1	3	-	1	-	-	-
3	1	3	-	-	-	-	1	-

* Número total de *item:* 7.

CONCLUSIONES

La primera conclusión de este estudio es que la mayoría de los sujetos que trabajan con balanzas de dos platillos no aprenden sólo una rutina automática para pesar, sino que desarrollan por lo menos una comprensión sencilla de equivalencia de medidas, comprobada en la tarea de volúmenes. A pesar de que no se puede atribuir el éxito en la tarea de volúmenes exclusivamente a la transferencia de la experiencia de trabajo, una simple referencia a la forma de pesar vía sustracción fue suficiente para mejorar el desempeño de los sujetos que dudaban de la resolución del primer *item* de naturaleza sustractiva. En segundo lugar, la transferencia de un contexto práctico a un contexto hipotético, donde el problema era representado mediante diseños y tenía una incógnita en sólo uno de los dos lados de la balanza, fue observada en todos los casos. Como tercera conclusión, observamos que la transferencia hacia situaciones con incógnitas en ambos lados de la balanza fue menos frecuente y no siempre se lograba por medios equivalentes al modelo matemático enseñado en la escuela para resolver problemas de álgebra. Otros métodos que evitan las dificultades de esas situaciones surgieron durante la tarea. Finalmente, se debe hacer notar que aunque la experiencia de trabajo no pueda garantizar la comprensión de la manipulación de equivalencias en este tipo de problema, el porcentaje de sujetos que aprendió este método espontáneamente, y después de una demostración en uno o dos *item*, puede ser considerada alta, teniendo en cuenta la poca o ninguna experiencia escolar de la mayoría de ellos.

Tomado de: Terezinha N. Carraher, David Carraher
y Analúcia Schliemann. *En la vida diez, en la escuela cero*.
Siglo XXI Editores, México, 1991.

BIBLIOGRAFÍA

FILLOY, E. y ROJANO, T. (1984). "From an arithmetical to an algebraic thought. A clinical study with 12-13 years old", en *Proceedings of the 6th Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education* (North American Chapter), Madison, pp. 51-56.

VERGNAUD, G. (1986). "Introducing algebra to 'low level' 8th and 9th graders", en *Proceedings of the 10th International Conference of Psychology of Mathematics* Educational, Londres, pp. 319-324.

VYGOTSKY, L. S. (1978). *Mind in socety: the development of higher psychological proceses*, Cambridge University Press. Cambridge.

V

LA CALCULADORA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Elfriede Wenzelburger Guttenberger

LA CALCULADORA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Elfriede Wenzelburger Guttenberger

La disponibilidad cada vez mayor de calculadoras electrónicas las hace una herramienta natural para estudiar y aplicar aritmética (ICMI, 1986). Aprender a usar una calculadora debe ser parte de una clase de matemáticas. No se pueden ignorar ni prohibir porque se alejaría más a los estudiantes de la matemática. La calculadora puede ayudar a mejorar la actitud de los estudiantes hacia la aritmética, ya que los capacita para hacer operaciones de cálculos relacionados con la vida real, y permite trabajar con números grandes y pequeños; pueden generarse patrones numéricos, explorar propiedades de los números, formular y probar hipótesis. Las calculadoras ayudan a desarrollar las habilidades de estimación y aproximación. En la enseñanza secundaria no se presenta la pregunta de en qué grado hay que introducir la calculadora y cómo puede ayudar en la enseñanza de las matemáticas, sino de cuánto tiempo se puede disponer para explorar todas las posibilidades que representa su uso.

Las calculadoras deben desempeñar un papel decisivo en el currículo o plan de estudios de la matemática en los años noventas y no hay peligro de que reemplacen a las microcomputadoras. La popularidad e importancia de este auxiliar didáctico se refleja en el hecho de que el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM) dedicó a las calculadoras su anuario de 1992.

Cómo afecta la calculadora a la enseñanza de la matemática

La calculadora va a producir cambios en la educación matemática; no sólo vuelve obsoletos a los auxiliares anteriores (regla de cálculo, tablas numéricas), sino también abre nuevas perspectivas (Cheung, 1981).

De acuerdo con Johnson (1978), el área más fructífera y rica para desarrollar actividades con las calculadoras está en la exploración. El estudiante usa la calculadora para generar resultados, con la intención de que éstos muestren un concepto o relación, o que ayuden en la resolución de problemas matemáticos. En otras palabras, la calculadora puede ser utilizada para desarrollar conceptos, retroalimentar aprendizaje y adquirir habilidades que ayuden a la resolución de problemas. Una modalidad de enseñanza para lograr esto consiste en los juegos matemáticos con calculadora (Judd, 1976; Imerzed, Ockenga, 1977).

Bitler (1987) afirman que el tema fundamental que subyace a los cambios curriculares en matemáticas, causados por el uso de nuevas tecnologías, es el surgimiento de una nueva relación de profesores, estudiantes y la ciencia matemática. La presencia de calculadoras (y/o computadoras) para demostraciones, resolución de problemas, práctica y evaluación, crea una nueva dinámica en el salón de clase, en el cual profesores y estudiantes son compañeros naturales en la búsqueda de la comprensión de ideas matemáticas y de la resolución de problemas. Si los profesores están preparados para aceptar el reto de esta nueva tecnología, entonces la educación cambiará.

En estudios de investigación se encontró que las calculadoras ayudan al aprendizaje de la matemática. En más de 100 de estos trabajos sobre calculadoras en el salón de clase, se comparó el desempeño de grupos que usan calculadoras, con los que no las utilizan. En la gran mayoría de los casos, los grupos con calculadoras trabajaron mejor o igual que los grupos que no las emplearon (Hembree, 1986).

Shumway (1976) presenta un resumen de argumentos a favor y en contra del uso de la calculadora. Los argumentos más importantes se relacionan con el efecto de la calculadora sobre el aprendizaje de los niños, acerca de los hechos básicos y su actitud hacia la matemática (Koop, 1979). Un estudio con 50 grupos de segundo a sexto año, con duración de un año, indica que el uso de la calculadora en la primaria no inhibe el aprendizaje de hechos y operaciones básicas. Además, parece que a los niños les gusta usar ese dispositivo (Gibb, 1975), los motiva y les despierta mayor interés por la matemática (Sullivan, 1976). En lo que se refiere al desarrollo de conceptos de numeración, la calculadora no es una amenaza sino la clave para el aprendizaje (McCrae, 1979).

Recomendaciones para el uso de las calculadoras

En la *Agenda for Action* (NCTM, 1981) se recomienda que todos los estudiantes tengan acceso a calculadoras en la clase de matemáticas en la primaria y secundaria. Éstas deben ponerse a disposición de los alumnos por parte de las escuelas, y los objetivos de la enseñanza deben incluir la aptitud de determinar los usos apropiados de una calculadora. Éstos pueden ser, por ejemplo, maneras ingeniosas de explorar, descubrir y desarrollar conceptos matemáticos y no solamente para cálculos aritméticos.

En los primeros años de la primaria es importante que el alumno adquiera el concepto de número y aprenda las operaciones básicas; pero cuando los cálculos aritméticos empiezan a ser una carga en vez de una contribución al proceso educativo, es tiempo de recurrir a la calculadora.

En un documento reciente del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 1989) se reafirma esta consideración. La calculadora debe integrarse a la matemática escolar en todos los grados, para trabajos en clase, tareas y exámenes. Fuera de la escuela, las calculadoras se usan ampliamente, y dentro su uso hace posible ahorrar mucho tiempo dedicado a practicar cálculos. Este tiempo se debe utilizar para ayudar a que el alumno comprenda mejor la matemática, a que sepa razonar y resolver problemas, así como aplicar lo aprendido.

Específicamente se recomienda que todos los estudiantes deben usar calculadoras para:

- Concentrarse en el proceso de resolución de problemas y no en las operaciones aritméticas.
- Lograr acceso a matemáticas que van más allá de cálculos aritméticos.
- Explorar, desarrollar y reforzar conceptos, incluídos la estimación, el cálculo y la aproximación.
- Experimentar con ideas y patrones matemáticos.
- Hacer cálculos con datos de la vida real.

Otra publicación reciente del NCTM, “Los estándares curriculares y de evaluación de la matemática escolar” (1989), hace referencia a las calculadoras. Se reafirma nuevamente que todo estudiante debe disponer de una calculadora en cualquier momento. Sin embargo, esto no elimina la necesidad de aprender los algoritmos. Alguna práctica con lápiz y papel es importante. Si se requiere una respuesta aproximada, hay que estimar si se puede escoger el método apropiado: cálculo mental, lápiz y papel, calculadora, o bien computadora. La calculadora se escogerá para operaciones y cálculos complicados. La estimación del resultado debe acompañar a cualquier método de cálculo. Hasta ahora no hay evidencia de que las calculadoras impidan que los alumnos aprendan y utilicen algoritmos básicos para cálculos simples. Es para resolver problemas complicados por lo que se recurre al medio electrónico.

Se destaca también en la publicación mencionada que la calculadora es un medio valioso para aprender matemáticas, para explorar ideas y patrones, desarrollar conceptos, resolver problemas e investigar aplicaciones. El uso bien planeado de calculadoras puede mejorar la calidad del plan de estudios y del aprendizaje. La experiencia ha demostrado que los alumnos no usan la calculadora si hay otras maneras de realizar cálculos. Sin embargo, la práctica excesiva y repetitiva de cálculos muy laboriosos con lápiz y papel ya pasó de moda y es contraproducente.

Encuestas realizadas en Estados Unidos (Eric, 1981) demuestran que de los primeros nueve años escolares en matemáticas, dos se dedican a la enseñanza y práctica del algoritmo de la división. A pesar de toda esta inversión de tiempo y esfuerzo, los alumnos en diagnósticos nacionales y locales no manejan bien el algoritmo. Concretamente se propone (Weatley, 1979) eliminar a nivel de primaria cálculos del tipo 296 : 37, 426 x 89, 3/7 + 4/12, 3.45 x 0.865, o bien 456.78 : 6.7. Estos tópicos consumen muchísimo tiempo, los alumnos nunca los dominan bien y los hace mejor una calculadora. Lo que es importante es un dominio de las operaciones básicas con números del 1 al 100, estimación y aritmética mental, aplicaciones, medición, estadística, probabilidad y resolución de problemas.

Resumiendo lo anteriormente dicho, afirmamos que la calculadora es mucho más que un sustituto para efectuar cálculos con pluma (o lápiz) y papel; es una ayuda didáctica para desarrollar conceptos y explorar.

Preguntas abiertas acerca del uso de las calculadoras

Algunas preguntas que necesitan más reflexión para encontrar respuestas adecuadas son las siguientes:

- ¿Cómo se puede instruir y convencer a los profesores de matemáticas de la importancia de la calculadora como auxiliar didáctico?

- ¿Qué tipo de calculadora conviene elegir?
- ¿Cómo puede lograrse en la matemática escolar una introducción temprana de los números decimales y la notación científica?
- ¿Cuál es el papel de las fracciones?
- ¿Qué tipo de material didáctico se necesita para hacer mejor uso de la calculadora?
- ¿Cómo asegurar una posición crítica de los usuarios hacia los resultados que produce la calculadora?
- ¿A partir de qué grado escolar se debe permitir la calculadora en los exámenes?

Conclusión

La calculadora electrónica es un excelente recurso didáctico que hace mucho más que las operaciones básicas. Usarla nada más como simple "calculadora" sería desperdiciar una oportunidad de hacer que la matemática sea más atractiva para muchos estudiantes, pues la máquina es una memoria electrónica que nos libera de cálculos tediosos y del uso de tablas anticuadas. Con ella es posible la experimentación con patrones numéricos, exploración de relaciones funcionales, desarrollo de conceptos y resolución de problemas con datos reales.

La investigación educativa ha comprobado que la calculadora puede mejorar el aprovechamiento de los estudiantes que la utilizan en el salón de clases (López, 1988). El mejoramiento general de los niveles de aprendizaje aparentemente es el resultado de un aumento de capacidad de los estudiantes para realizar sus cálculos matemáticos, y escoger adecuadamente las estrategias a seguir en la resolución de problemas. Pero la calculadora puede enriquecer el estudio de las matemáticas únicamente si logramos aplicarla correctamente en las situaciones didácticas en las cuales es conveniente.

Tomado de: Wenzelburger, Elfriede, *Calculadora Electrónica*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1993.

BIBLIOGRAFÍA

BITTER, G. (Oct. 1987). *Educational technology and the future of mathematics education.* Scool Science and Mathematics, vol. 87 (6).

CHEUNG, Y. L. (1982). "Learning mathematics with the calculator" en *Math. Educ. Sci. Techno.,* Vol. 13, núm. 5, 593-597.

GIBB, E. G. (1975). *Calculators in the classroom. Today's Education*, 64, 42-44.

HEMBREE, RAY (Sep. 86). "Research gives calculators a green light" en *Arithmetic Teacher*, vol. 34, núm. I, 18-21.

ICMI STUDY SERIES (1986). *School mathematics in the 1990's*. Cambridge University Press.

IMERZEEL, G. OCKENGA, E. (1977). *Calculator activities for the classroom*, Books 1 and 2, Palo Alto California, Creative Publications INC.

LÓPEZ, J. M. (1988). *Manual para la utilización de la calculadora*, Departamento de la Instrucción Pública, Hato Rey, Puerto Rico.

NCTM (1980). *An agenda of action.*

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.*

McCRAE, B. (4, NOV. 1979). "Calculators and numeracy". *The Australian Mathematics Teacher,* vol. 33, pp. 24-25.

JUDD, W. (1976). "Instructional games with calculators". *The Arithmetic Teacher*, 23, pp. 516-518.

KOOP, A. I. (NOV. 1979). "Calculators in schools; Somo curriculum issues", *The Australian Mathematics Teacher*, vol. 35, núm. 6.

SHUMWAY, R. J. (NOV. 1976). *Hand-hold calculators, where do you stand. The Arithmetic Teacher,* 23, pp. 569-572.

SULLIVAN, J. I. (NOV. 1976). *Using hand-held calculators in sixth grade classes. Arithmetic Teacher*, 23 pp. 551-552.

JOHNSON, D. C. (1979). "Calculators abuses and uses". *Mathematics Teaching*, 85, pp. 50-56, DEC.

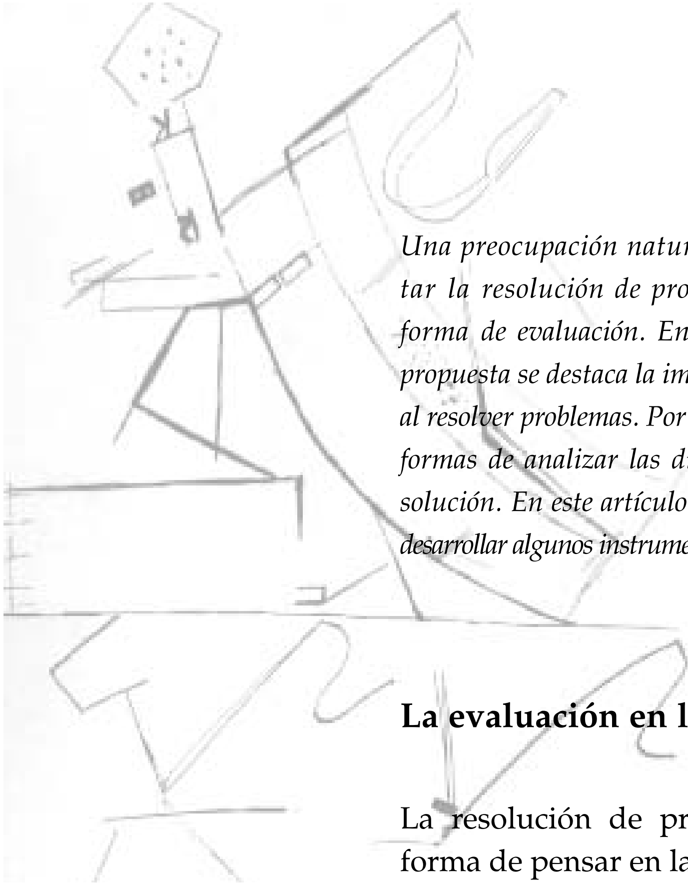
VI

HACIA UNA PROPUESTA DE EVALUACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Luz Manuel Santos Trigo

HACIA UNA PROPUESTA DE EVALUACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Luz Manuel Santos Trigo



Una preocupación natural por parte de la gente interesada en implantar la resolución de problemas en el salón de clases se relaciona con la forma de evaluación. En la discusión de los elementos asociados con esta propuesta se destaca la importancia del proceso que muestran los estudiantes al resolver problemas. Por tanto, la evaluación necesariamente debe considerar formas de analizar las diversas fases que se involucran en ese proceso de solución. En este artículo se presentan algunas propuestas de cómo se pueden desarrollar algunos instrumentos que tiendan a ese tipo de evaluación.

La evaluación en la resolución de problemas

La resolución de problemas, en términos generales, es una forma de pensar en la que el estudiante muestra una diversidad de estrategias en los diferentes momentos del proceso de resolver algún problema. Por ejemplo, el estudiante puede usar diagramas, tablas, o gráficas para representar la información como un medio para entender el problema. El diseño de un plan y su implantación pueden incluir el uso de métodos algebraicos, el descomponer el problema en problemas más simples, o el transportar el problema a otro contexto (geométrico o numérico). En la fase de revisión es importante analizar el significado de la solución, verificar las operaciones, y pensar en conexiones o extensiones del problema. Además, la presencia de estrategias metacognitivas ayuda a que el estudiante explore algunos caminos más eficientemente. En este sentido será importante que la evaluación del proceso proporcione información relacionada con las diversas actividades que el estudiante desarrolla al resolver problemas.

Un modelo de evaluación que intenta analizar el proceso utilizado por los estudiantes al resolver problemas incluye tres componentes:

i. El primer momento se centra en la parte relacionada con el entendimiento del problema. Es decir, el estudiante debe demostrar que ha entendido el problema. Por ejemplo, se debe enunciar el problema (con palabras propias) o representar el problema usando diversos caminos. El estudiante debe juzgar cuándo las condiciones dadas del problema son razonables y si es posible estimar alguna solución.

ii. Un segundo momento se relaciona con la habilidad del estudiante para seleccionar y usar estrategias de solución. Así como para presentar un plan y llevarlo a cabo.

iii. Finalmente es importante revisar los aspectos relacionados con lo razonable de la solución y la extensión del problema.

En los tres componentes mencionados, la presencia de aspectos metacognitivos también debe incorporarse al modelo. Shoenfeld (1967), el cual menciona que la metacognición se relaciona con tres aspectos:

i. El conocimiento de tu propio proceso. ¿Qué tan preciso uno describe su propio proceso de pensar?

ii. Control o autorregulación. ¿Qué tan bien se puede seguir lo que uno hace?

iii. Creencias e intuiciones. ¿Qué ideas acerca de las matemáticas aparecen en la interacción de uno con esta disciplina? ¿Cómo éstas dan forma al proceso que uno utiliza al resolver problemas?

La evaluación de los aspectos mencionados anteriormente no puede ser realizada usando solamente ejercicios a resolver con lápiz y papel. Es decir, es importante diseñar actividades adecuadas que capturen información de los momentos identificados en el modelo. Las entrevistas desempeñan una herramienta importante en esta forma de evaluación.

Davis (1984) describe lo que llama la entrevista a través de un problema (*task based interview*), y se define como sigue:

> Un estudiante o un grupo de estudiantes se sienta alrededor de una mesa, se le proporciona papel, lápiz, calculadora, u otros instrumentos. Se le presenta un problema a resolver. Una o más personas están presentes para recabar información. Normalmente, antes de empezar a trabajar se le pide al estudiante que hable en voz alta y explique tan detalladamente como pueda lo que está haciendo y por qué decide hacerlo. Todo este proceso puede ser grabado o incluso filmado. El observador(es) toma(n) nota durante el transcurso de la sesión e inmediatamente después de ésta puede(n) sumar algunos comentarios que hayan resultado importantes durante el desarrollo de ésta (pp. 87-88).

Davis también sugiere que algunos aspectos relacionados con la estructura y desarrollo de este tipo de entrevistas puede variar. Por ejemplo, el grado en que se pide a los estudiantes describir sus ideas, el tiempo de verbalización, y la profundidad de las ideas; el tipo de materiales o equipo que se le proporciona al estudiante, y el formato preparado por el observador o evaluador antes de la entrevista, y el nivel de intervención por parte del observador son aspectos que determinan el desarrollo de una entrevista.

Perkins (1981) sugiere algunas ideas que pueden ser de utilidad en el uso de este tipo de entrevistas. Se dice al estudiante antes de empezar la entrevista que:

i. Diga lo que esté en su mente. No te guardes (lo que tu consideres como) conjeturas, ideas vagas, imágenes, o intenciones

ii. Habla tan continuo como puedas. Di algo al menos cada cinco segundos, aun si dices: "estoy en blanco"

iii. Habla en tono que se oiga

iv. Habla tan telegráfico como puedas. No te preocupes si tus oraciones no son completas ni elocuentes

v. No sobre expliques o justifiques. Trata de analizar las cosas como normalmente lo haces

vi. No trates de describir eventos pasados. Describe lo que haces en el momento. No pienses por un momento y luego trates de describirlo

En este plan general para realizar una entrevista es importante señalar que un ingrediente importante es el tipo de problema que el estudiante trabajará. Algunas características que estos problemas deben presentar incluyen:

i) Que impliquen un reto, que sean difíciles pero accesibles

ii) Que demanden un plan y una reflexión. Es decir, que no se puedan resolver instantáneamente

iii) Que permitan diferentes métodos (estrategias) de solución

iv) Que algunos incluyan varias soluciones. Así, una solución completa puede requerir encontrar todas las soluciones o decidir cuántas soluciones existen

v) Que incluyan una variedad de procesos matemáticos y operaciones, pero no en formas obvias o rutinarias

vi) Que cuando un estudiante los resuelva, debe ser posible identificar los procesos y operaciones empleadas, así como el plan para resolverlos y las estrategias usadas

Al seleccionar los problemas y realizar las entrevistas, el reporte de las cualidades mostradas por los estudiantes debe discutirse alrededor de los siguientes puntos:

i) El nivel de desarrollo de las fases de entendimiento, diseño de un plan y su implantación, y de la visión retrospectiva

ii) El tipo de estrategias usadas en la resolución del problema

iii) La presencia de conceptos y procedimientos matemáticos. Cuando un problema puede ser resuelto por medio de la aplicación de diferente contenido matemático es importante mencionar qué contenido fue usado y qué tipo de conexiones fueron explotadas

iv) El tipo de control y automonitoreo usado por el estudiante al resolver el problema

v) Las influencias del entrevistador. Es decir, el tipo de intervenciones y los efectos producidos en el trabajo del estudiante

Finalmente, se debe reportar si el estudiante obtuvo la respuesta correcta al problema, si lo hizo con o sin ayuda del entrevistador. Indicar la cantidad de tiempo en cada fase para obtener la solución y los comentarios pertinentes adicionales.

Las ideas anteriores resaltan los aspectos cualitativos de la evaluación. Sin embargo, para aspectos de carácter cuantitativo es posible también diseñar un instrumento que se asocie a algún número determinado. Es importante mencionar que en la construcción del instrumento se analizaron diversos trabajos, en los que existe interés por cuantificar el proceso de solución (Charles, Lester, y O'Daffer, 1987; Santos, 1993). El instrumento puede incluir los siguientes componentes:

El profesor deberá hacer su escala de interpretación, de acuerdo con la norma de evaluación que esté vigente en su momento.

puntos	trabajo mostrado por los estudiantes
0-1	Nada de trabajo o ideas sin relación
2-3	Identifica los datos pero sin procedimiento alguno
4-5	Usa los datos pero la estrategia no es clara
6-7	Introduce un plan apropiado, pero éste es incompleto o pobremente aplicado
8-9	Existe un plan claro y apropiado, pero hay un error en los cálculos o la respuesta es incompleta
10	Solución completa y correcta

Además, en el proceso de evaluación se puede identificar algunos indicadores asociados con la solución del problema, el desarrollo de la solución, y respecto de la identificación de las estrategias principales empleadas en cada solución.

solución	desarrollo	estrategias usadas
correcta incorrecta indeterminada en blanco	completo incompleto no requerido sin unidades sin contexto sin desarrollo	operaciones numéricas uso del álgebra lista sistemática lista sistemática, una tabla, o un diagrama ensayo y error búsqueda de patrones casos simples indeterminada

En este instrumento se han identificado algunos componentes que pueden ayudar al instructor a tener una idea global del proceso de solución del problema. Además, la identificación de los diversos momentos genera información relacionada con las dificultades que puedan mostrar los estudiantes en cada una de las fases. Es decir, entendimiento, uso de estrategias y evaluación de la solución.

Es importante mencionar que estos instrumentos pueden ser ajustados por el instructor de acuerdo con los tipos de problemas que considere en la evaluación. Por ejemplo, si se destaca la importancia de que el estudiante muestre diversos métodos de solución o diversas soluciones, entonces será necesario cuantificar este componente.

Ejemplo de un problema y el tipo de instrumentos para la entrevista

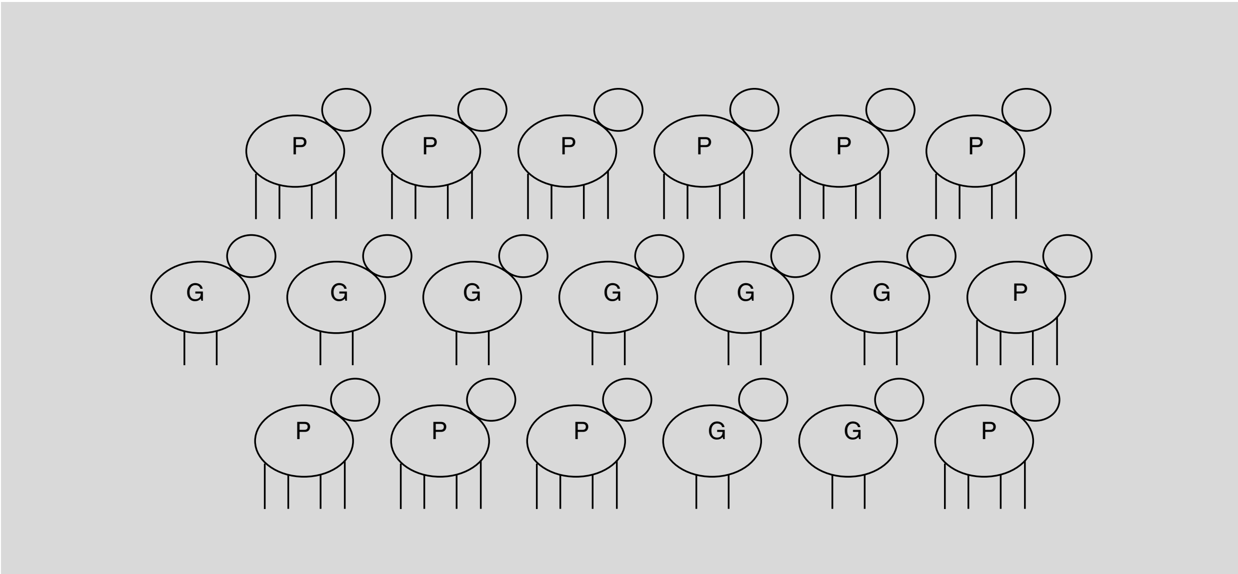
En esta parte se presenta un problema que puede servir de guía para preparar una entrevista. En la presentación se destacan algunas cualidades, como tener diversos métodos o formas de obtener la solución. Sin embargo, los métodos discutidos no son exhaustivos ni tampoco se espera que los estudiantes necesariamente seleccionen alguno de estos caminos. El trabajo alrededor del problema ayuda al maestro a valorar el potencial del problema y a preparar una serie de instrumentos para recabar información del proceso utilizado por los estudiantes al resolverlo.

> El fin de semana, Pedro y María visitaron una granja que produce gallinas y cerdos. Pedro contó un total de 19 cabezas, mientras que María dijo que había 60 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos había en esa granja que visitaron?

Soluciones anticipadas

En esta parte es importante que antes de realizar la entrevista se trabaje el problema con cierto detalle. La idea es que se encuentren algunas soluciones anticipadas. Esto ayudará a entender el trabajo de los estudiantes. Es necesario aclarar que no se espera que el estudiante necesariamente siga algunas de estas formas de solución. Sin embargo, el trabajar en el problema ayuda incluso a orientar al estudiante durante el proceso. A continuación se plantean algunas posibles soluciones al problema planteado.

i) El método pictórico incluye el uso de figuras, dibujos o diagramas como medio para representar el problema. El estudiante puede dibujar los animales o representarlos mediante un diagrama y usar esto como referencia para aumentar la cantidad o eliminar algunos de acuerdo con el número de patas.



ii) El método de ensayo y error puede ser usado originalmente por el estudiante. Además, puede incluir varias direcciones de acuerdo con el tipo de ensayo que se seleccione. Por ejemplo, el estudiante puede usar:

a) Un método de intercambio en el cual fija un número determinado de cerdos o gallinas y los empieza a intercambiar de acuerdo con el número de patas. Así, el estudiante puede iniciar con 19 cerdos y calcular el número de patas y a partir de ellas empezar a disminuir el número de cerdos, de uno en uno, y compensando cada cerdo con las gallinas, correspondientes. Repitiendo este procedimiento se llega a la solución del problema.

b) Un método de conteo puede iniciarse con cualquier número de gallinas y cerdos. Por ejemplo, 10 gallinas y 9 cerdos. Contando el total de patas se tiene que 20 + 36 = 56; se nota que faltan cuatro patas, entonces la siguiente selección puede ser 9 gallinas y 10 cerdos; esto lleva a 18 + 40 = 58 patas. En este caso faltan 2 patas. Naturalmente, la siguiente selección conlleva a considerar 8 gallinas y 11 cerdos, lo que produce la solución deseada.

c) La construcción de una tabla puede también ayudar al estudiante a seleccionar los números sistemáticamente. Por ejemplo, iniciando con los casos extremos (sólo gallinas o cerdos), y tomando en cuenta la información, se puede generar una tabla como la siguiente.

gallinas	cerdos	patas
19	0	36
0	19	76
10	9	56
8	11	60

iii) El método de correspondencia puede también aparecer en la solución del problema. La idea es pensar en una correspondencia entre el número de patas y cabezas. Dos formas similares ilustran este procedimiento.

a) Supongamos que las gallinas se sostienen sólo con una pata y que los cerdos sólo con dos patas. Ahora existe la mitad de las patas pisando tierra, es decir 30 patas. En este número, la cabeza de una gallina se cuenta solamente una vez, mientras que la cabeza de los cerdos se cuenta dos veces. Restándole a 30 el número de cabezas (19) nos resulta el número de cabezas de cerdos. Esto es, 30 – 19 = 11 cerdos y 8 gallinas.

b) Otra variante del método de correspondencia es imaginarse que todos los animales se sostienen con dos patas. Entonces habrá 38 patas tocando tierra y (60 – 38 =) 22 patas en el aire. Estas 22 patas deben ser patas de cerdo. Como sólo dos patas de cada cerdo están en el aire, entonces hay 11 cerdos.

iv) Un método semialgebraico se puede identificar cuando el estudiante, por ejemplo, utilice g = # de gallinas y c = # de cerdos; de aquí puede escribir algo como $g + c = 19$ o $g = 19 - c$ Tomando esto como base, el estudiante puede explorar las posibles combinaciones que puedan satisfacer la expresión en consideración del número de patas.

g	19 – c	2(g) + 4 (19 - c)	patas
4	19 – 4	2 (4) + 4 (15) =	68
6	19 – 6	2 (6) + 4 (13) =	62
8	19 – 8	2 (8) + 4 (11) =	60

v) El método algebraico. El álgebra también puede ayudar a resolver el problema. Una forma puede ser representando la información dada en un sistema de ecuaciones. Este sistema, que incluye dos ecuaciones con dos incógnitas, se puede resolver utilizando los procedimientos rutinarios.

número de gallinas = x; número de cerdos = y
número de cabezas $x + y = 19$ ________________(1)
número de patas $2x + 4y = 60$ ________________(2)

Multiplicando (1) por 2 y restándolo a (2) se obtiene: $2y = 22$;
entonces $y = 11$; $x = 8$

El estudiante puede también decidir usar una representación algebraica donde se incluya solamente una variable. Por ejemplo, x puede representar el número de gallinas y $(19 - x)$ el número de cerdos. Esto lleva a que $2x + 4(19 - x) = 60$, lo cual representa una ecuación lineal; es decir, $2x + 76 - 4x = 60$ de donde $x = 8$.

Preguntas potenciales para ayudar al estudiante en el desarrollo de la entrevista (en caso de que se requiera)	
Entendimiento general del enunciado del problema	*¿Puedes explicar con tus propias palabras de qué se trata el problema? ¿Qué es lo que sabes? ¿Qué es lo que se quiere encontrar?*
Entendimiento de la relación entre el número de cabezas y patas	*¿Qué número de patas le corresponde a cada cabeza?*
Diseño de un plan y su implantación	
Exploración	*¿Tienes alguna idea sobre qué tipo de estrategia puede usarse para resolver este problema?*
Selección y uso de "estimación"	*¿Puedes pensar un número determinado de gallinas y cerdos?*
Selección y uso de "ensayo y error"	*¿Con qué números puedes iniciar?* *¿Qué números siguen ahora?*
Selección y uso de "eliminación de posibilidades"	*¿Podrías tener 10 gallinas (cerdos)?* *¿Por qué? ¿Te podría ayudar una tabla?*
Selección y uso de un método algebraico	*¿Podrías usar el álgebra para resolver este problema? ¿Cuáles son las variables? ¿Cómo las representarías? ¿Qué ecuaciones puedes escribir para representar el problema? ¿Cómo podrías resolver o encontrar el valor de algunas de las variables?*
visión retrospectiva	*¿Cómo sabes que la solución que obtuviste es correcta?*
Búsqueda de conexiones y otras formas de resolver el problema	*¿Puedes pensar en otra forma o método para resolver este problema?* *¿Te ayudaría a resolver el problema si pensamos que todos los animales se sostienen en solamente dos patas? ¿Cuántas patas estarían en el aire y de quién serían? ¿Por qué?*

Hoja de captura de información: evaluación del proceso de los estudiantes al resolver problemas

Nombre(s) ____________________ Escuela ____________________
Fecha de nacimiento __________ Grado _____ Curso ______ Maestro __________
Entrevistador ______________ Fecha __________ Tiempo __________

Problema: El fin de semana, Pedro y María visitaron una granja que produce gallinas y cerdos. Pedro observó en total 19 cabezas, mientras que María dijo que había 60 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos había en esa granja?

Herramientas disponibles:

Enunciado del problema
Calculadora - 5 funciones
Papel, lápiz y colores.

Entendimiento

[ ] Problema entendido rápidamente Evidencia:

Dificultad con [ ] "identificación del número de patas"
[ ] "relación de las cabezas y el número de patas" [ ] otro:
Preguntas, ayudas y comentarios:

Selección de estrategias

Estrategia pictórica: usada [ ] inicialmente [ ] exclusivamente [ ] algunas veces
[ ] lo guiaron a la solución
[ ] con ayuda [ ] sin ayuda
Dibujos o representación sistemática del problema [ ] con ayuda [ ] sin ayuda.
Comentarios.

Método de ensayo y error:
usado [ ] inicialmente [ ] exclusivamente [ ] algunas veces
[ ] lo guiaron a la solución
[ ] con ayuda [ ] sin ayuda
Dibujos o representación sistemática del problema [ ] con ayuda [ ] sin ayuda
Ensayos razonables: [ ] siempre [ ] algunas veces
Comentarios.

Conteo [ ] siempre [ ] algunas veces [ ] con ayuda [ ] sin ayuda
Construcción de tabla [ ] siempre [ ] algunas veces [ ] con ayuda [ ] sin ayuda
Método de conteo [ ] siempre [ ] algunas veces [ ] con ayuda [ ] sin ayuda
Orden en los ensayos: [ ] Siempre [ ] Algunas veces [ ] Con ayuda [ ] Sin ayuda
Posibilidades descartadas (19 gallinas o cerdos) [ ] siempre [ ] algunas veces
[ ] con ayuda [ ] sin ayuda
Comentarios, evidencias:

Ejemplos de ensayos y comentarios:

Método de correspondencia usado
[ ] inicialmente [ ] exclusivamente [ ] algunas veces [ ] lo guiaron a la solución
[ ] con ayuda [ ] sin ayuda
Comentarios

Método algebraico usado [ ] inicialmente [ ] exclusivamente [ ] algunas veces
[ ] lo guiaron a la solución
[ ] con ayuda [ ] sin ayuda
Variables utilizadas [ ] x [ ] y representación de [ ] una ecuación
[ ] un sistema de ecuaciones
[ ] Método usado para resolver el sistema de ecuaciones
Comentarios

Monitoreo o autoevaluación

[ ] planes alternativos; mencionados o considerados comentarios:
[ ] progreso con la estrategia seleccionada evidencia; comentarios:
[ ] conexiones matemáticas consideradas o discutidas; comentarios:
[ ] plausibilidad de la solución; verificación de las operaciones; comentarios:

Resumen [ ] El estudiante resolvió el problema sin ayuda
[ ] El estudiante resolvió el problema, pero necesitó ayuda
[ ] El estudiante no resolvió el problema, aun con ayuda

Tiempo de trabajo:

Solución:______ min_____ visión retrospectiva: ______ min
Descripción de los métodos usados y el orden. Estimación del tiempo

Otros aspectos importantes que deben estar presentes en la evaluación del aprendizaje de los estudiantes incluyen:

i) La participación del estudiante en el diseño de problemas-proyectos. Es decir, problemas en los cuales el estudiante tenga que colectar cierta información de fuentes diversas como periódicos, censos, reportes climáticos, o centros especializados. Esta información le servirá para resolver problemas relacionados.

ii) La escritura de un diario personal. Aquí el estudiante reportará semanalmente sus experiencias en la resolución de problemas y el aprendizaje de las matemáticas. Identificará, por ejemplo, cuáles fueron las dificultades encontradas al resolver los problemas en ese periodo. Además, reportará los aspectos matemáticos que le fueron de mayor o menor interés.

iii) Es importante que el estudiante participe en el proceso de formular problemas durante y fuera de la instrucción. En esta dirección se sugiere que reformule o diseñe problemas que involucren las siguientes variables:

- **a)** Se le dé un problema al estudiante. Con base en el enunciado se le pide que formule un problema similar y que lo resuelva.

- **b)** Se le dé una información incompleta. Se le pide que complete la información, que plantee un problema y que lo resuelva.

- **c)** Se les pide que diseñen sus propios problemas, en los que ellos mismos tengan que seleccionar información adecuada. Aquí puede indicárseles el contexto del problema, es decir, un problema de precios, de tiempo, de patrones, de demostración, etcétera.

d) Se les da problemas con un exceso de información. Se les pide que identifiquen y reestructuren el problema y que lo resuelvan.

e) Se coloca semanalmente en un lugar del salón de clases una lista de 2 o 3 problemas para que se resuelvan (los problemas de la semana); la responsabilidad de diseñar estos problemas puede ser por equipos y se puede dar un espacio en la clase para discutir sus soluciones.

Tomado de: Santos T., Luz Manuel, *La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*, Cuadernos de Investigación, núm. 28. CINVESTAV-IPN, México, 1994.

BIBLIOGRAFÍA

CHARLES, R., LESTER. F. & O'DAFFER, P. (1987). *Problem solving: What why, and how.* Dale Seymour Publications. Palo Alto, California.

DAVIS, R. B. (1986). *Learning Mathematics: The congnitive science approach to mathematics education*. New York: Ablex.

DAVIS, R. B. (1989). The culture of mathematics and the culture of schools. *Journal of Mathematical Behavior*, 8, pp. 143-160.

PERKINS, D. N. (1981). *The mind's best work.* Harvard University Press. Cambridge, Ma.

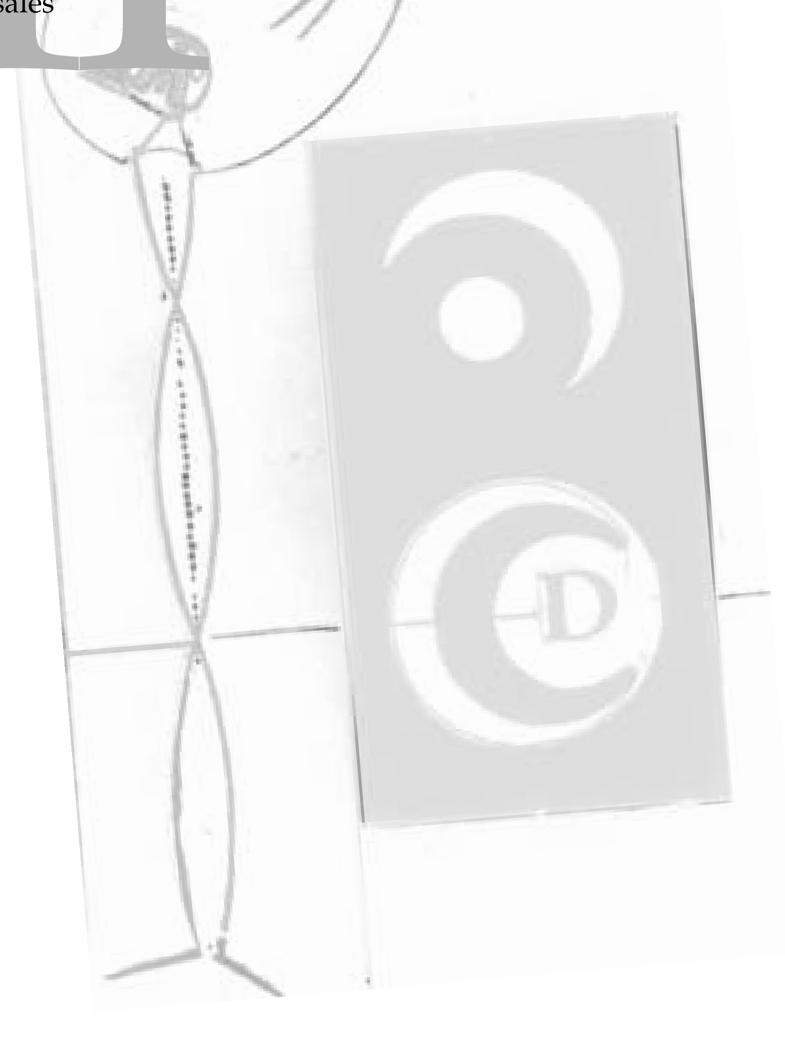
SANTOS TRIGO, L. M. (1993). *La resolución de problemas: Elementos para una propuesta en el aprendizaje de las matemáticas.* Cuaderno de Investigación núm. 25 (7). Programa Nacional de Formación de Profesores de Matemáticas. CINVESTAV. México.

SHOENFELD, A. (1987). "Confessions of an accidental theorist". *For the Learning of Mathematics* 7(1), 30-38.

VII

DIMENSIONES PSICOSOCIALES DE LA EVALUACIÓN

Carlos Rosales



DIMENSIONES PSICOSOCIALES DE LA EVALUACIÓN

Carlos Rosales

Consideraciones generales

Desde una perspectiva psicosocial de la evaluación, se pone de relieve el carácter único de cada proceso de aprendizaje, y por tanto, la imposibilidad de evaluarlo mediante la utilización de instrumentos de aplicación general. Se necesita proceder a una evaluación cualitativa que estudie y explique cada caso. Psicológicamente, cada persona utiliza determinadas estrategias para el tratamiento de información y posee un nivel específico de motivación, lo que origina procesos diferentes de aprendizaje. En el caso de que los resultados de dos alumnos sean semejantes, puede ocurrir que hayan seguido diversos procedimientos y respondan a distintas motivaciones.

Socialmente es posible constatar la importante influencia del clima sociocultural del alumno, de la naturaleza de su clima familiar, del nivel de expectativas que se ha formado y del tipo de lenguaje que utiliza. La naturaleza de las relaciones entre el profesor y el alumno y de las que se producen dentro del grupo de alumnos, las características del mismo clima social que se da en el centro escolar, son otros tantos factores que pueden influir de manera considerable en los rendimientos.

Así pues, la evaluación del aprendizaje no será válida en la medida en que se limite a constatar un determinado nivel de aprendizaje sin realizar una explicación individualizada de las características psicosociales que lo han determinado en cada caso. Se asume, por lo tanto, la necesidad de una personalización de la evaluación.

Las mismas características que se han expuesto respecto del diagnóstico de los posibles problemas o causas de un éxito o fallo en el aprendizaje se pueden extender a las decisiones a adoptar, que en cada caso serán distintas, acomodadas a las diferencias interindividuales.

ESTRATEGIAS COGNITIVAS

Así como desde la perspectiva de una teoría conductista sería posible aplicar la misma prueba a una población elevada de alumnos y, en relación con sus resultados, poner en práctica procedimientos universales de “recuperación”, a partir de una teoría cognitiva, sería preciso profundizar en el conocimiento de las características del pensamiento de cada alumno y, en relación con el mismo, proponer medidas adaptadas de recuperación y aprendizaje.

La *teoría psicogenética* ha puesto de relieve la importancia de las estrategias de aprendizaje en materias como las matemáticas y el lenguaje. J. Brun (1975) ha demostrado que existe una considerable diferencia entre una evaluación que se conforme con resultados y una evaluación que intente conocer y describir *procesos*:

1. En el primer caso, podría ocurrir que un resultado procediese de la previa memorización de una fórmula o procedimiento y su aplicación a un determinado problema, sin que a través de la evaluación podamos llegar a conocerlo.

2. En el segundo caso se intentaría reconstruir el proceso mental seguido por el alumno en la resolución del problema para detectar posibles dificultades si es que existen. La reconstrucción de dicho proceso se puede hacer a través del estudio de aciertos y fallos del alumno en el proceso de realización y a través de las explicaciones que aporta sobre el mismo. Sólo de esta manera sería posible aplicar un procedimiento de actuación didáctica eficaz, adaptado a las características del aprendizaje.

G. Mialaret (1977) ha estudiado procesos-tipo seguidos por el alumno de enseñanza elemental en la resolución de *problemas matemáticos*, llegando a la identificación de una serie de procedimientos que se podrían clasificar de acuerdo con las siguientes categorías:

- resolución según un procedimiento de "ensayo y error";
- resolución según la utilización de modelos;
- comprensión global y realización correcta de operaciones;
- comprensión y realización eficaces acompañadas de explicación del procedimiento seguido.

Para este autor, el acceso del alumno al dominio de estructuras de pensamiento básicas, constituye una condición necesaria para su progreso en el ámbito de las matemáticas.

Así, por ejemplo, en un enunciado del problema matemático para niños menores de siete años que aún no dominan la capacidad de reversibilidad, resulta inadecuado proponerles que resten 7 de 9, ya que tienden naturalmente a presentar la operación como 7 – 9, al no percibir aún la necesidad de invertir la secuencia correspondiente.

A partir de investigaciones cognitivas también se constata que la evaluación del *lenguaje* debería basarse en un estudio más profundo que la simple producción externa del mismo.

Es necesario llegar a la identificación de las estrategias que subyacen a dicho uso. Así, en los primeros años de aprendizaje-lector se han identificado como básicas las estrategias rígida y flexible, y dentro de esta última, las de muestreo, inferencia, predicción y extrapolación (C. Rosales, 1987).

a) Los lectores con estrategias rígidas no son capaces de diferenciar pasajes difíciles y fáciles y adaptar en función de ellos su esfuerzo. Tampoco combinan adecuadamente la nueva información con los conocimientos que ya poseen, ni son capaces, a veces, de ir enriqueciendo los primeros datos del texto que leen con los siguientes.

b) Los lectores con estrategia flexible se caracterizan por todo lo contrario. Presentan una notable capacidad para la comprensión, para la combinación de lo leído con sus conocimientos anteriores, para realizar procesos de análisis y síntesis (palabras a letras y de éstas a las primeras), para utilizar muestras de índices semánticos, léxicos y sintácticos a fin de inferir significados y estructuras mayores, etcétera.

REPRESENTACIONES MENTALES

Las representaciones mentales de los alumnos respecto a los aprendizajes y actividades a realizar pueden diferir considerablemente de las que se hacen los profesores. Así, Chevallard (1985) ha puesto de relieve la existencia de una larga cadena de representaciones diferentes, de un mismo contenido didáctico.

> La teoría de conjuntos, tal como la elaboró Cantor, no es la misma que se ha transmitido a los profesores. La representación que éstos tienen de ella no es la que enseñan a sus alumnos. Finalmente, la que los alumnos adquieren no es la misma que la que poseía el profesor ni la que se intentó transmitirles.

Desde una perspectiva clásica de evaluación por objetivos que intente comparar los resultados manifestados por los alumnos con lo que en principio se ha querido conseguir, resulta difícil poder llegar a un conocimiento real de la naturaleza del aprendizaje. Es necesario, por el contrario, recurrir al estudio de los distintos “pasos” o estrategias cognitivas utilizadas por el alumno. Se puede afirmar, por otra parte, que en la elaboración de representaciones mentales y en el aprendizaje en términos generales, desempeña un importante papel el nivel de motivación de los alumnos. Si el profesor es capaz de conectar con sus centros de interés y vincular a ellos una determinada tarea, la representación que de ésta se forme el alumno, se verá considerablemente enriquecida y facilitada.

Perret-Clermont (1980) ha comprobado esto a través de una experiencia en la que pedía en un primer momento a un grupo de alumnos que dibujase, sin más, una locomotora. Posteriormente les pedía que decorasen la pared de la sala de juegos con el motivo de la locomotora. En la segunda ocasión los dibujos de los niños revelaban un conocimiento mucho más perfecto de las locomotoras que la primera vez.

Desde la perspectiva de la evaluación del aprendizaje, la naturaleza de las representaciones que los alumnos se hacen sobre el nivel de dificultad, puede ejercer una importante influencia en la cantidad de esfuerzo que dedican a tales tareas y, finalmente, en los resultados que obtienen y las calificaciones que reciben. A través de diversas investigaciones se ha podido comprobar que tareas que han sido percibidas como difíciles, son objeto de mayor dedicación, y los resultados, consiguientemente, son mayores, mientras que tiene lugar un proceso totalmente contrario con tareas que se perciben como fáciles.

Así, en la utilización de medios didácticos, el alumno percibe como más fáciles los de carácter audiovisual y más difíciles los documentos escritos, dedicando consiguientemente menos esfuerzo al aprendizaje con los primeros.

A veces estas interpretaciones dan lugar a consecuencias negativas.

> Así, por ejemplo, alumnos con capacidad intelectual notable, eligen a veces medios muy estructurados, pensando que les van a exigir menos esfuerzo. Esto en principio es así, y da lugar a una infrautilización de sus capacidades, con el consiguiente descenso en sus rendimientos académicos y desarrollo de habilidades (Clark, 1986).

Asimismo, en relación con los resultados obtenidos, los alumnos realizarán una determinada representación del esfuerzo necesario.

> Así, ante "buenas calificaciones", su rendimiento tiende a descender, mientras que ocurre lo contrario cuando las calificaciones son bajas.

Tiene lugar un proceso de ajuste entre niveles de exigencia del profesor y niveles de dedicación del alumno, que resulta familiar a cuantos conocen la naturaleza de la dinámica de interacción profesor-alumno en las aulas (Chevallard, 1986).

CONGRUENCIA SOCIOCULTURAL

Situándonos en una perspectiva social, pueden considerarse numerosos factores influyentes en el desigual nivel de aprendizaje de los alumnos.

Clima familiar

Se puede hacer referencia al clima familiar en cuanto a su incidencia en la adaptación del alumno en la escuela y en su motivación para aprender. Una relación con los padres basada en el desarrollo de la autonomía responsable, una línea media de autoridad-libertad, una moderada preocupación por las tareas escolares, un clima en el que las conversaciones y las lecturas, los programas de los M.A.V. tengan contenido cultural resultan estimulantes de altos niveles de logro en el alumno. De manera particular, autores como Bernstein y Labov han estudiado la naturaleza diferencial del lenguaje según la pertenencia a distinto estrato social y su influencia en el aprendizaje del alumno.

Sin embargo, hay que advertir que no son las condiciones de origen familiar y sociocultural las que de manera independiente influyen en el rendimiento del alumno.

En realidad, se trata del nivel de congruencia de dicha cultura con la cultura y características de los profesores y del centro escolar en términos generales. Dicha congruencia es el auténtico factor estimulador del aprendizaje en alumnos procedentes de una clase sociocultural privilegiada. De aquí que las posturas escolares en favor de la "neutralidad" constituyan, de hecho, un factor de desequilibrio, pues la neutralidad se practica a partir de una previa aproximación a determinado grupo de alumnos (P. Perrenoud, 1983). La elaboración y desarrollo de programas de compensación cultural y lingüística anteriores al ingreso en la escuela, para alumnos menos favorecidos, no ha producido los resultados esperados. Hoy se ponen más esperanzas en una actuación continua de la escuela, basada en la adaptación a las desigualdades socioculturales del grupo de alumnos que a ella acuden.

Relaciones profesor-alumno

Quizás una de las mayores aportaciones de la psicología social haya sido el estudio de las relaciones entre profesor y alumno como determinante del nivel de aprendizaje de éste. Dicha relación se basaría, a su vez, como se ha indicado, en la proximidad sociocultural de ambos. De manera más específica, determinados alumnos necesitarían menos explicaciones y tiempo para comprender o intuir las normas de actuación del profesor y sus criterios de éxito en el trabajo, y tendrían mayor facilidad para adaptar su actuación a ellos. A cambio, se verían recompensados por una conceptualización más elevada y un más intenso trato personal, así como por unas calificaciones considerablemente superiores.

Uno de los factores más determinantes de la naturaleza de las relaciones profesor-alumno lo es el tipo y características de los lenguajes utilizados. Cuando los lenguajes verbal, gestual y dinámico del profesor coinciden con los de un determinado grupo de alumnos, las posibilidades de comunicación son considerablemente mayores y, por tanto, las de aprendizaje, dado que la enseñanza se vehicula a través de los mismos.

Interacción en el grupo

Otra de las vías de investigación de la psicología social en torno al aprendizaje se ha proyectado sobre los efectos de la interacción en el grupo, para la estimulación del desarrollo intelectual del alumno. A partir de las investigaciones pioneras de Luria, retomadas recientemente por otros autores, se han podido determinar los efectos positivos de dicha interacción en el desarrollo del lenguaje infantil. En el ámbito de la adquisición de estructuras mentales, autores en la línea de la escuela genética de Piaget han podido constatar cómo la interacción de niños no conservadores (no dominan la capacidad de reversibilidad) con otros sí conservadores, da lugar a efectos estimuladores en los primeros, que acceden antes al dominio de dicha estructura de pensamiento (Mugny, 1985).

Hacia una evaluación cualitativa

Una primera conclusión puede derivarse de las reflexiones anteriores sobre la dimensión psicosocial de la enseñanza. Se refiere a la existencia de procesos diferentes de pensamiento, de aprendizaje, tanto en el terreno interindividual como intergrupal. De aquí se deriva, a su vez, la inadecuación de una metodología que intentara aplicar los mismos procedimientos a todos los alumnos y grupos, así como la insuficiencia de unos procedimientos de evaluación que, basados en la utilización de pruebas estándar pretendieran representar bajo una sola nota (numérica o verbal) la compleja estructura del nivel de aprendizaje de cada alumno. Y aun cuando esto fuera posible, faltaría en todo caso una necesaria explicación sobre los antecedentes y causas del nivel a que se ha llegado, así como sobre la evolución y los procedimientos de intervención a aplicar en el futuro.

Esta primera deducción lleva estrechamente unida la referencia a una segunda condición, relativa a la necesidad de reconocimiento de la capacidad profesional del profesor para una responsabilización plena de los procedimientos de enseñanza y de las formas de evaluación. Dada la imposibilidad de aplicación de procedimientos externamente elaborados y con carácter general, es necesario reconocer que sólo el profesor, que interactúa de forma próxima y continua con el alumno, está en condiciones de conocer cuáles son las características de su proceso y nivel de aprendizaje y de aplicar en cada caso las actuaciones que resulten oportunas.

La evaluación desde la perspectiva del profesor

Al investigar la forma en que el profesor vive la evaluación, habría que situarse en dos planos de estudio: el ideal y el real. Desde una perspectiva ideal, el profesor considera la evaluación como un seguimiento continuo de los progresos de sus alumnos, un ponerse a su lado para observar la forma en que trabajan, los éxitos y posibles errores y fracasos, y poder orientarlos y estimular su desarrollo de manera continua e inmediata. Se trata de una forma de evaluación consustancial al desarrollo del proceso instructivo, que toma datos a través de la observación, el diálogo, el análisis de tareas... Es una clase de evaluación que se identifica con la evaluación formativa, y que asume una visión cognitiva del proceso de aprendizaje, ya que intenta llegar al fondo de las causas y mecanismos mentales del alumno y elaborar una orientación adecuada a las características personales en cada caso.

Esta evaluación aparece, a su vez, recomendada normalmente en las disposiciones legales de numerosos países avanzados culturalmente. Sin embargo, en la realidad no suele practicarse, al menos de manera completa, y ello puede deberse a varios motivos:

1. En primer lugar, por las condiciones de trabajo en que se desenvuelve la tarea del profesor. El elevado número de alumnos, el escaso tiempo laboralmente reconocido para dedicarlo a la elaboración de informes, el análisis de trabajos, la entrevista individual, etcétera.

2. En segundo lugar, la misma presión social a distintos niveles (exigencias de otras instituciones académicas o profesionales de unas evaluaciones con determinadas características, presión incluso de los padres de los alumnos para que se efectúe una evaluación "objetiva", etcétera).

3. En tercer lugar, habría que aludir a una, a veces, insuficiente capacitación profesional con sentimiento de inseguridad en el valor del propio juicio y con, a veces, serias dificultades para hacer explícitos los argumentos en que fundamenta dichos juicios.

Como resultado de éstos y otros motivos, el profesor se ve ante el problema de no poder realizar una evaluación plenamente cualitativa y tener, sin embargo, que proceder a una justificación ante diversos estamentos (administración, padres, sociedad, los mismos alumnos) de las decisiones que adopta. Y en estas circunstancias, acude muchas veces a la elaboración y aplicación de pruebas formales que justifiquen y den un cierto carácter "objetivo" a sus decisiones. No obstante, el profesor siempre queda insatisfecho con el resultado de dichas pruebas. Es muy frecuente la existencia de desajustes cuando no contradicciones entre los resultados de las mismas y los de su propia observación y juicio intuitivo. Ante esta situación, los profesores adoptan *comportamientos* como los siguientes (J. Cardinet, 1986):

a) Algunos profesores acompañan las notas de cada alumno con un informe sobre sus actitudes, hábitos de trabajo y otras circunstancias a las que dan tanto o más valor que a las notas.

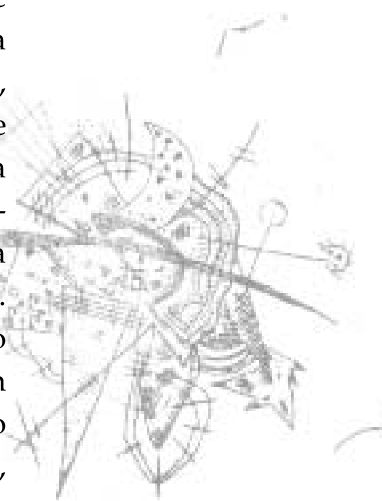
b) Otros "incluyen" en las notas sus apreciaciones, elevándolas o rebajándolas en función de las mismas.

c) Otros profesores, ante la incongruencia de una nota en un examen, con sus valoraciones personales, no la toman en consideración, repiten la prueba o presentan otra nota complementaria.

Son bien conocidos, por otra parte, recursos compensatorios de los profesores en su calificación.

> Así por ejemplo, se eleva la calificación de un alumno para motivarlo, se toman en consideración factores como la mayor o menor necesidad de tiempo del alumno o la existencia o no de ayudas en el hogar, etcétera.

El profesor actúa en un clima de tensión entre la necesidad externamente impuesta de una evaluación formal, basada en la utilización de pruebas o exámenes supuestamente “objetivos” y la necesidad personal y profesional, intensamente sentida, de guiarse de acuerdo con una evaluación continua basada en la observación de las tareas diariamente realizadas por el alumno, y de su comportamiento en clase, así como en los datos que a través del mismo alumno o de su expediente académico llega a conocer cada uno. Esta segunda clase de evaluación se identifica con la denominada “evaluación continua”, constituye la auténtica orientación de la actuación del profesor en el aula. En función de ella adapta sus interacciones con el alumno constantemente: les habla de determinada manera, los guía en sus aprendizajes, les propone ejercicios y normas de trabajo adaptadas a su capacidad. Esta forma de evaluación constituye, por tanto, la principal fuente de información para el profesor sobre sus alumnos y cuando los datos obtenidos a través de pruebas formales no coinciden o contradicen las que intuitivamente posee; su tendencia predominante se manifiesta en el sentido de modificar o completar los resultados de la evaluación formal en función de los que él ya poseía.



En un momento de predominio de la admiración por la tecnología, por la objetividad científica entendida desde el ámbito del positivismo, se ha llegado a menospreciar, y a criticar intensamente, la excesiva “subjetividad” que impregnaría la evaluación personal, continua, basada en la observación que practica el profesor. Hay que advertir, sin embargo, que esta situación puede interpretarse de otra manera. Podemos pensar que ninguna prueba formal, basada en objetivos, mide el proceso de aprendizaje en toda su extensión; se queda, por el contrario, en una mínima parte del mismo. Por ello, adoptar decisiones sobre un alumno (promoción, repetición, etcétera), en función de los resultados de este tipo de pruebas, resulta aventurado y, en sentido amplio, poco científico. Es necesario fortalecer en el profesor el sentimiento de autonomía profesional a través de una más sólida formación, pero, también, mediante el desarrollo de su confianza en la propia capacidad para evaluar al alumno en función de criterios pedagógicos y didácticos, cuya fundamentación puede y debe explicar claramente.

Es necesario advertir sobre la conveniencia de llegar a un equilibrio entre el papel asignado a una evaluación externa al proceso didáctico, basada en pruebas aplicables a grandes problemas, y la evaluación interna que considera la "historia" y circunstancias de cada grupo y cada persona, y sea capaz de profundizar en el ámbito de las estrategias mentales y actitudes del alumno. Desde esta perspectiva, parece clara la necesidad de que cada calificación venga acompañada de un comentario explicativo capaz de dar cuenta de causas, motivos por los que se otorga dicha calificación, así como sobre el significado que tiene para el alumno y las decisiones pedagógicas a tomar a partir de la naturaleza de la misma. Al igual que para un médico de nada sirve el conocimiento de la fiebre que tiene un enfermo, si no va acompañado de una descripción de sintomatología, de poco sirve, pedagógicamente, un número o una palabra referido a los resultados de un alumno en un examen (M. Fernández, 1984).

En este sentido y contra la excesiva confianza en los exámenes frente a la opinión profesional del profesor, convendría recordar las palabras de J. Piaget cuando dice (J. Cardinet, 1986):

> El examen escolar constituye un fin en sí mismo, porque domina las preocupaciones del maestro en lugar de favorecer su vocación natural de estimular conciencias e inteligencias, y orienta todo trabajo del alumno hacia el resultado artificial del éxito en las pruebas formales, en lugar de centrarse en sus actividades y en su personalidad.
>
> No abandonéis las tareas educativas más importantes para correr detrás de las que son más fácilmente evaluables.

La evaluación desde la perspectiva del alumno

Para aproximarnos al análisis de la perspectiva y vivencias del alumno en torno a la evaluación, resulta necesario identificar el papel de ésta dentro del proceso instructivo. Y hay que señalar en principio que en un sistema convencional de enseñanza, se ha mitificado en exceso. Todas las actividades de aprendizaje se han sometido a un ritmo y tipo de trabajo adecuados a la superación de pruebas, superación que se convierte en manifestación de su eficacia. La obtención de calificaciones altas es de extraordinaria importancia para el alumno, pues ello significará alcanzar el reconocimiento y una conceptualización elevada por parte del profesor, de sus compañeros y, de manera más amplia, de sus padres y de la misma sociedad. Al contrario, un nivel bajo de calificación implica un descenso en la consideración de los demás. Al tiempo, en relación con los juicios de que es objeto el alumno por parte de sus profesores, compañeros, padres y sociedad, se conforman una autoimagen y autoconcepto que serán de distinta naturaleza. Dicho autoconcepto se forma de manera progresiva y, por tanto, a medida que se repitan los enjuiciamientos de una u otra clase, se irán consolidando más intensamente. Todo el contexto psicosocial que rodea al alumno incide armónicamente en él presionándolo para la aceptación de las normas y juicios de que es objeto en el ámbito escolar. Es muy difícil para el alumno hacer frente a una influencia plural que se proyecta sobre él, generalmente, de forma simultánea y concertada.

El peligro que psicopedagógicamente se presenta consiste en identificar un enjuiciamiento sobre el aprendizaje con un enjuiciamiento sobre la persona. Se corre el riesgo de que el alumno que tiene éxito en el aprendizaje pueda llegar a creer que lo va a tener en toda actividad personal y profesional. En el caso de que dicho enjuiciamiento sea positivo, los problemas no existen o son mínimos. Sin embargo, en el caso de ser negativo, da lugar al desarrollo de sentimientos pesimistas sobre su trabajo y sobre sí mismo, pudiéndose dar, en situaciones muy extremas, casos de enfermedad mental, sobre todo cuando al tiempo concurren otros problemas psicológicos.

SENTIMIENTO DE IMPOTENCIA

Se podrían establecer varios *niveles* en el sentimiento de impotencia del alumno ante un juicio externamente formulado sobre él:

1. En el primero, el más "duro" para el alumno, éste asiste a un proceso de evaluación sobre sus tareas, realizado por el profesor según sus propios criterios y sin una adecuada explicación de sus características.

2. Un segundo caso de evaluación externa, pero más comprensible y con cierto grado de participación, tiene lugar cuando los criterios y orientaciones sobre los procedimientos de evaluación han sido elaborados o al menos "negociados" conjuntamente por el profesor y los alumnos. En este caso el alumno percibe una cierta capacidad de control, aunque indirecta, sobre la calificación de sus actividades en clase.

3. El tercer grado de participación en la evaluación consistiría en la aplicación, por el alumno, a sus propias actividades de criterios previamente identificados. El "*locus* de control" se ha acercado hasta identificarse con quienes van a ser evaluados, controlados (autoevaluación).

SENTIMIENTO DE COMPETITIVIDAD

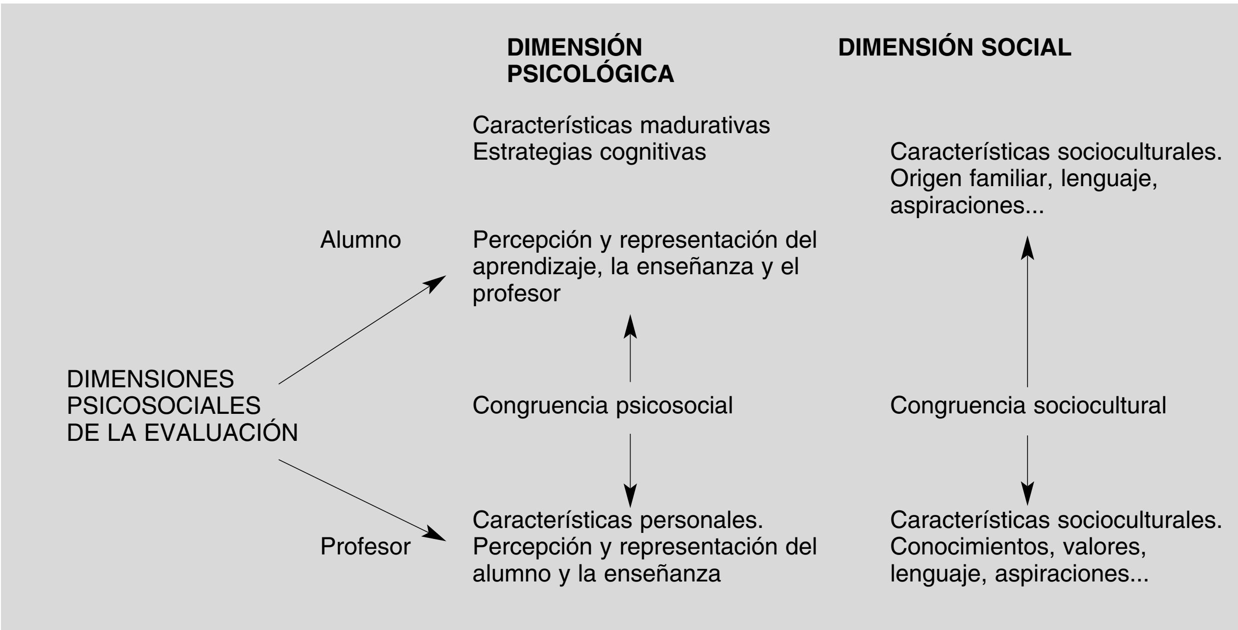
La heteroevaluación, propia de la enseñanza colectiva tradicional, ha servido para desarrollar en el alumno un notable sentimiento de competitividad y sumisión a las normas del profesor. El alumno considera de notable interés conocer cuáles son los criterios utilizados por el profesor en la calificación y acercarse lo más posible a ellos, subordinando de hecho sus actividades de aprendizaje a la superación de las pruebas. Esta forma de evaluación se desarrolla en un clima de competitividad muy elevado, donde las calificaciones de los alumnos dan lugar a premios y castigos (sobre todo morales), estableciéndose escalas de éxito y fracaso.

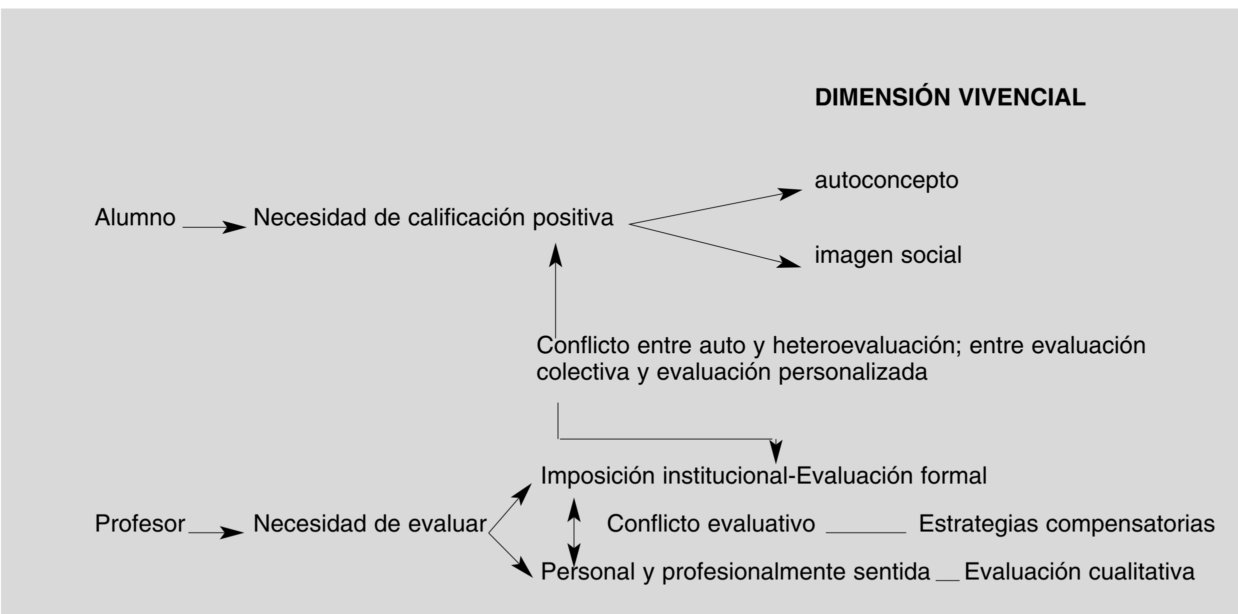
AUTOEVALUACIÓN

En los sistemas de enseñanza individualizada, sin embargo, el aprendizaje del alumno sigue un plan minuciosamente establecido y la evaluación se realiza en función de criterios, constituyendo como un seguimiento de las distintas fases de actividad y una constatación de los niveles de eficacia que se van alcanzando en el momento en que de forma natural tienen lugar. En estos casos deja de darse el clima de competitividad propio de la enseñanza colectiva clásica y el alumno se siente más "dueño" de la situación, pudiendo conocer en todo momento cuál es su nivel de progreso en relación con el desarrollo de su plan de trabajo. En estos sistemas, que con muy diversas variantes se inspiran básicamente en el plan Dalton, se practica, de hecho, una forma de autoevaluación en la que la actuación del profesor servirá para confirmar la evaluación que realiza el alumno y, en aquellos casos en que éste no se considere suficientemente capacitado, orientarla o sustituirla. Nos encontramos en el extremo de la enseñanza tradicional colectiva. Mientras que en ésta el poder de decisión, de control, se encontraba totalmente fuera del alumno, en el profesor (heteroevaluación), en la enseñanza individualizada con las características que se han apuntado, el poder de decisión se traslada hasta situarse en el alumno (autoevaluación). La falta de competitividad, con la serie de sentimientos degenerativos que la suelen acompañar (el triunfo propio se produce de forma simultánea al fracaso de los demás) y la creciente responsabilización en las tareas (no son externamente impuestas, sino que el alumno se responsabiliza personal y directamente de su realización), dan lugar a un considerable incremento de la motivación para el aprendizaje. El alumno accede, con esta forma de trabajo y evaluación, a un nuevo aprendizaje que contiene un considerable valor didáctico. El progreso se produce en relación con la propia capacidad y circunstancias (autosuperación) y con el dominio de determinados ámbitos del conocimiento y la actividad. Se trata, por tanto, de un progreso que no necesita para confirmarse ser comparado con niveles inferiores correspondientes a otros alumnos.

Desde esta nueva perspectiva de la evaluación dejaría de darse el llamado "fracaso escolar", o, al menos, tendríamos que revisar la conceptualización del mismo. En efecto, es de suponer que si cada alumno progresa en relación con su situación inicial según una secuencia de aprendizajes a realizar, la escuela tendría por misión optimizar el nivel de entrega motivada y de trabajo intenso de cada alumno individualmente considerado. A partir de ese supuesto, cualquier avance, por pequeño que sea, constituye un éxito, nunca un fracaso, y sólo podría hablarse en todo caso de fracaso de la escuela y la sociedad al no crear las condiciones necesarias para que el alumno encuentre motivos y medios adecuados como para dedicarse con ilusión e intensidad a tareas de aprendizaje. Del mismo modo, tendríamos que reconocer la inutilidad de un concepto como "recuperación", ya que el aprendizaje dejaría de ser una alocada carrera en la que el ritmo impuesto obliga a "perder cosas" para seguir avanzando, y se convertiría en una forma de progreso adecuada a la capacidad natural del alumno.

Las nuevas reformas educativas puestas en marcha durante los últimos años en diversos países (en el nuestro desde 1970 con la Ley General de Educación), adoptan esta nueva perspectiva sobre el aprendizaje y la evaluación, al recomendar que todo el periodo de escolaridad obligatoria esté al servicio del desarrollo completo de la personalidad, al suprimir las repeticiones de curso (en el Proyecto para la Reforma de la Enseñanza se contempla un máximo de repetición de dos cursos en el periodo de escolaridad obligatoria de los seis a los dieciséis años), al instaurar de forma sistemática procedimientos de evaluación diagnóstica y formativa, al considerar la existencia de servicios de apoyo y de atención especial al alumno, etcétera. Pero todas estas disposiciones corren el riesgo de quedarse en el plano de la declaración de intenciones y no llegar a la realidad. Son varios los motivos que conducen a esta ruptura entre lo ideal-teórico y lo real-práctico. En primer lugar, la escuela se encuentra dentro de una sociedad eminentemente competitiva y selectiva, y es a esa sociedad a la que ha de servir como una institución social más. Por ello, el cambio de la escuela, de la enseñanza, de la evaluación, sólo pueden ser efectivas dentro de un proceso de cambio global de la sociedad. Y es la sociedad la que debería tomar conciencia de la necesidad-conveniencia de dicho cambio, porque en el momento actual se registra en ella, de hecho una contradicción interna que hace muy difícil o imposible llevar a cabo el contenido de las grandes declaraciones de intención sobre el desarrollo completo del ser humano. Así, una vez acabada la educación obligatoria, sólo los alumnos que mejores calificaciones tengan en ella podrán acceder a puestos de escolaridad en la educación secundaria optativa, y concluida ésta, sólo quienes mejores puestos hayan obtenido en sus expedientes académicos y pruebas de selectividad, podrán acceder a la realización de estudios universitarios, una vez concluidos los cuales, sólo los alumnos más brillantes, los que obtengan mejores puntos en pruebas eminentemente selectivas, podrán acceder a cargos profesionales, de mayor poder de decisión, consideración social y remuneración económica. Y así podríamos seguir describiendo una serie de procesos, progresivamente selectivos prácticamente sin fin, que en último término manifiestan el hecho real de que en nuestra actual situación sociocultural presidida por un intenso clima de competitivad, se selecciona a los hombres para los puestos, pero no los puestos para los hombres, despreciando un inmenso capital humano en función de que no existen suficientes puestos dentro de un esquema tan formal y esclerotizante que no es capaz de utilizar en provecho propio la inmensa capacidad creativa de las personas.





Dentro de esta dinámica social, los tímidos intentos por procurar un desarrollo completo del hombre parecen relegarse a los primeros niveles de ecolaridad obligatoria y aun en éste, el profesor se ve con dificultades para llevarlo a cabo, ya que la presión social externa (salidas laborales, consideraciones de los padres de familia...) y las condiciones internas de trabajo (excesivo número de alumnos, falta de materiales, cuestiones organizativas, falta de preparación profesional) actuán como factores condicionantes determinando que en muchos casos ni siquiera las orientaciones legales en este sentido lleguen a cumplirse y ya desde los primeros cursos de escolaridad se viva un clima de competitividad en las aulas excesivamente intenso, muy en línea con una tradicional función reproductora de las condiciones socioculturales.

En estas condiciones, los pocos profesores que se esfuerzan por cambiar el sistema de evaluación, realizan de hecho un gigantesco trabajo por cambiar todo un sistema de vida, y es muy probable que quizás no lleguen a lograrlo hasta que desde diversos sectores de la sociedad se tome conciencia de la necesidad de transformar una situación en la que la capacidad y el esfuerzo individual no se consideren sólo instrumentos para tener más poder sobre quienes no han destacado tanto, sino sobre todo, recursos que se pongan al servicio de quienes más los puedan necesitar. Sería conveniente, en este sentido, animar al menos, como dice M. Fernández (1984):

> a cuantos se esfuerzan por cambiar la educación al haber constatado el fracaso universal en una evaluación muy sencilla: los mejores "educados" del planeta, las minorías que deciden, no fueron ayudados por sus respectivos sistemas ¿educativos? a adquirir el mínimo de imaginación, bondad y lógica necesarias para eliminar solidariamente las armas y el hambre.

Tomado de: Rosales, Carlos, *Evaluar es reflexionar sobre la enseñanza*, Narcea, España, 1990.

BIBLIOGRAFÍA

BRUN, J. (1975). *Education mathématique et développement intelectuel.* Université de Lyon II. Thèse de 3˚ cycle (Psychologie), Lyon.

CARDINET, J. (1986). *Evaluation Scolaire et Pactique.* De Boeck, Bruselas.

CLARK, R. E. y SALOMON, G. (1986). *«Media in teaching».* en Wittrock, M.C. (1986): Hand book of research on teaching, Mac Millan, Nueva York.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La trasposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- (1986). «Vers une analyse didactique des faits d'evaluation. En De Ketele, J.M.
- (1986). *L'evaluation: approche descriptive on prescriptive?* De Boeck, Bruselas.

FERNANDEZ, M. (1986). *Evaluación y cambio educativo.* Morata, Madrid.

MIALARET, G. (1977). *Las matemáticas: cómo se enseñan, cómo se aprenden.* Pablo del Río, Madrid.

MUGNY, G. (1985). *Psycologie sociale du développement cognitif.* Peter Lang, Berna.

PERRET-CLERMONT, A. N. (1980). "Recherche en psychologie sociale expérimentale et activé éducative, deux élaborations symboliques, deux practiques qui peuvent étre complémentaries" En *Revue Francaise de Pédagogie*, vol. 53, 1980, pp. 30-38.

ROSALES, C. (1987). *Estrategias de aprendiza lector; su desarrollo.* II Semana do Maxisterio Lucense. Escuela Universitaria de EGB, Lugo.

DOCUMENTACIÓN

Ley 14/1970 de 4-VIII-1970, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa (BOE de 6-VIII-1979).

VIII

RECONOCIMIENTO Y ANÁLISIS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS BIDIMENSIONALES:

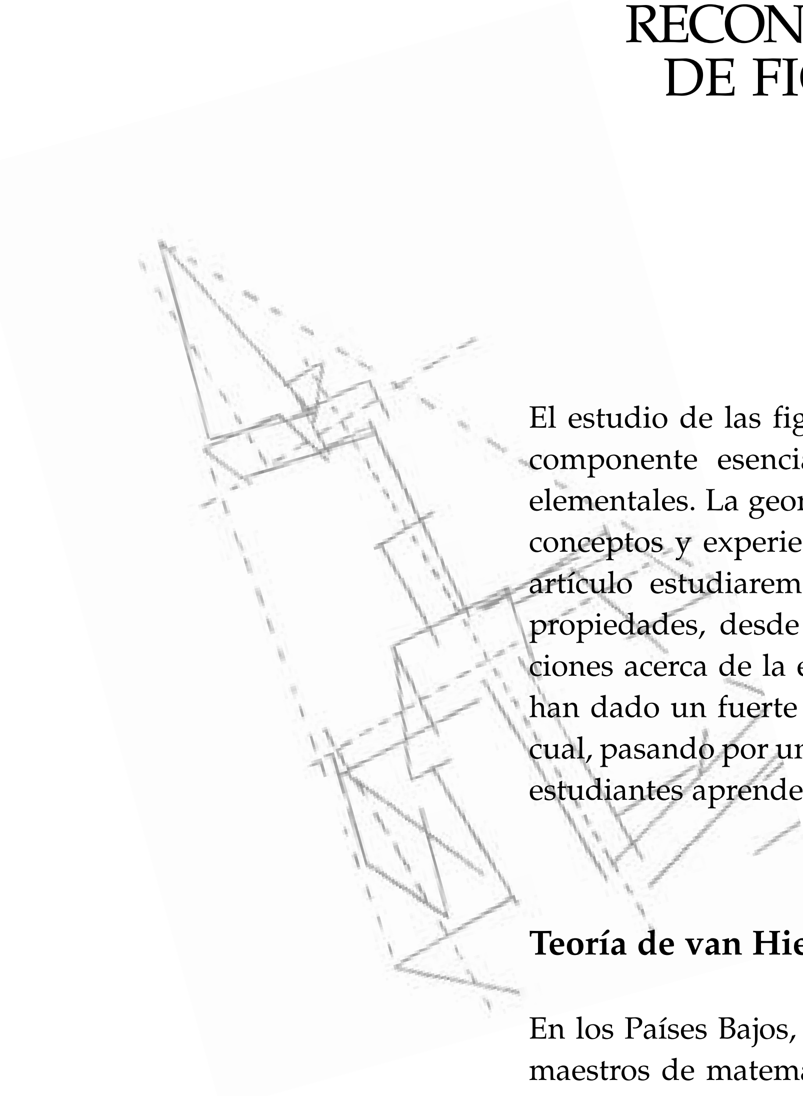
LA TEORÍA DE VAN HIELE

Gary L. Musser y William F. Burger

RECONOCIMIENTO Y ANÁLISIS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS BIDIMENSIONALES

LA TEORÍA DE VAN HIELE

Gary L. Musser y William F. Burger



El estudio de las figuras geométricas y sus propiedades es un componente esencial en el currículum de las matemáticas elementales. La geometría es rica en aplicaciones, formación de conceptos y experiencias en la solución de problemas. En este artículo estudiaremos las formas geométricas simples y sus propiedades, desde el punto de vista docente. Las investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría han dado un fuerte sustento a la teoría de van Hiele, según la cual, pasando por una secuencia de niveles de razonamiento, los estudiantes aprenden geometría.

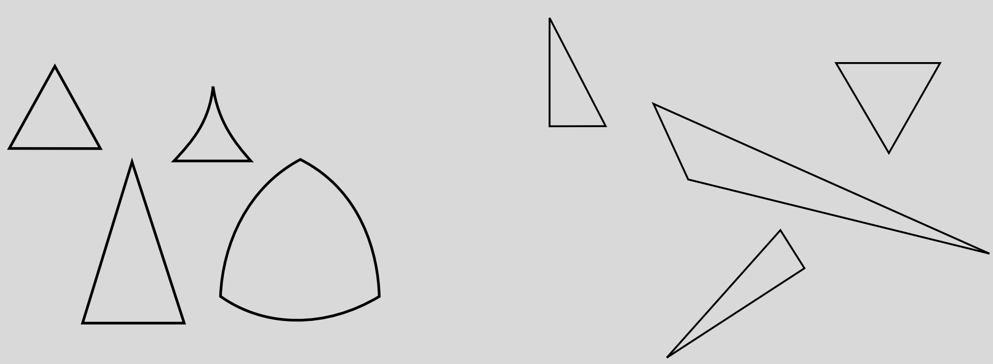
Teoría de van Hiele

En los Países Bajos, a fines de la década de los cincuentas, dos maestros de matemáticas, los esposos Pierre van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, formaron su teoría del desarrollo de la geometría, basándose en sus propias investigaciones y manera de enseñar geometría. Observaron que en el aprendizaje de la geometría los estudiantes progresaban a través de una secuencia de cinco niveles de razonamiento, desde el pensamiento holístico o totalizador (llamemos así a la percepción de la figura geométrica como una unidad, como un todo) hasta el pensamiento analítico, y de ahí a una deducción matemática abstracta y rigurosa. Los van Hiele describieron de la siguiente forma los cinco niveles de razonamiento:

Nivel 0 (Visualización)

Un niño cuyo razonamiento se encuentra en el nivel 0 reconoce la forma de ciertas figuras geométricas como un todo, sin poner atención a las partes que la componen. Por ejemplo, un rectángulo puede reconocerse porque "parece una puerta" y no porque tenga cuatro lados rectos y cuatro ángulos de 90°. En este nivel, algunos atributos relevantes de las figuras geométricas, tales como los lados rectos, pueden ser ignorados por el niño, y algunos atributos irrelevantes, como la posición de la figura respecto de los bordes de la página, pueden desconcertarlos o confundirlos. La Figura 1(a) muestra algunas figuras que fueron clasificadas como triángulos por medio del razonamiento totalizador. ¿Puede usted señalar aquellas que no estén acordes al atributo relevante? La Figura 1(b) muestra algunas figuras que *no* fueron consideradas como triángulos por los estudiantes que se encuentran en el nivel de razonamiento totalizador. ¿Puede identificar los atributos irrelevantes que deben ser ignorados?

FIGURA 1



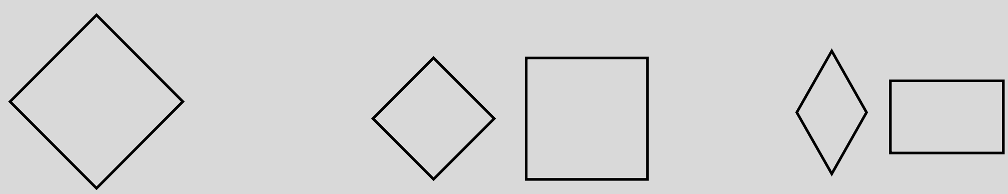
(a) Éstos son triángulos (según ciertos niños)

(b) Éstos no son triángulos (según ciertos niños)

Nivel 1 (Descripción)

En este nivel, el niño se enfoca analíticamente en las partes que componen una figura, como los lados y los ángulos. Éstas partes y sus atributos son usados para describir y caracterizar las figuras. Los atributos relevantes son entendidos y diferenciados de los atributos irrelevantes. Por ejemplo, un niño que razona analíticamente podría decir que un cuadrado tiene cuatro lados "iguales" y cuatro "esquinas cuadradas". El niño también sabe que girando un cuadrado en la página no se afecta su "cuadratura". La Figura 2 ilustra cómo algunos aspectos del concepto "cuadrado" cambian del nivel 0 al nivel 1.

FIGURA 2



(a) No es cuadrado (según algunos niños de pensamiento totalizador)

(b) Éstos son cuadrados (según los niños de pensamiento analítico)

(c) No son cuadrados (según los niños de pensamiento analítico)

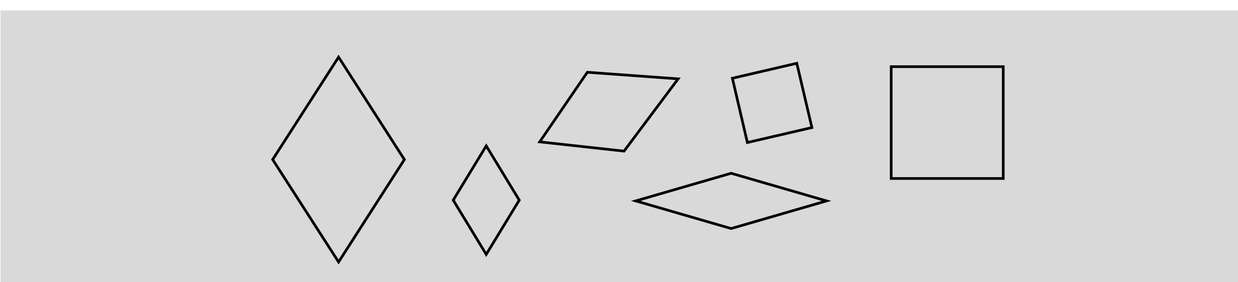
Debido a la posición de la página, algunos niños de pensamiento totalizador no consideran que la Figura 2(a) sea un cuadrado; ellos le llaman "diamante". Sin embargo, si se gira la figura de tal manera que los lados sean horizontales y verticales, entonces los mismos niños la considerarán un cuadrado. Para los niños de pensamiento analítico las figuras que aparecen en 2(b) son consideradas cuadradas, estos niños se enfocan en los atributos relevantes (cuatro lados "iguales" y cuatro "esquinas cuadradas") e ignoran los atributos irrelevantes de su posición respecto de los bordes de la página. Las figuras en 2(c) no son consideradas cuadrados por los niños que piensan analíticamente; estas figuras no tienen todos los atributos relevantes: la figura de la izquierda no tiene "esquinas cuadradas", y la de la derecha no tiene cuatro lados "iguales".

Un niño que piensa analíticamente podrá tener dificultades para entender que una figura puede pertenecer a varias clases generales y, por consiguiente, tener más de un nombre. Por ejemplo, un cuadrado es también un rectángulo, ya que un rectángulo tiene cuatro lados y cuatro "esquinas cuadradas", pero un niño que piensa analíticamente puede objetarlo, pensando que el cuadrado y el rectángulo son figuras totalmente distintas, aun cuando compartan muchos atributos.

Nivel 2 (Relaciones)

En este nivel, un niño entiende las relaciones abstractas entre clases generales de figuras y puede ordenar clases de figuras. Por ejemplo, un diamante (o rombo) es una figura de cuatro lados "iguales"; un niño que razona abstractamente en el nivel 2 se da cuenta de que un cuadrado sería tanto un rombo como un rectángulo (Figura 3), porque el cuadrado satisface todos los criterios necesarios (esto es, las definiciones dadas de este tipo de figuras).

FIGURA 3



Nivel 3 (Deducción)

El razonamiento en este nivel incluye el estudio de la geometría como un sistema matemático formal. Un niño que razona en el nivel 3 entiende las nociones de postulados matemáticos y teoremas, y puede escribir pruebas formales de teoremas. No usaremos los postulados formales en nuestro tratamiento de la geometría, pero usaremos la deducción informal (por ejemplo, el encadenamiento de ideas junto con el descubrimiento de las propiedades generales de las figuras).

Nivel 4 (Axiomatización)

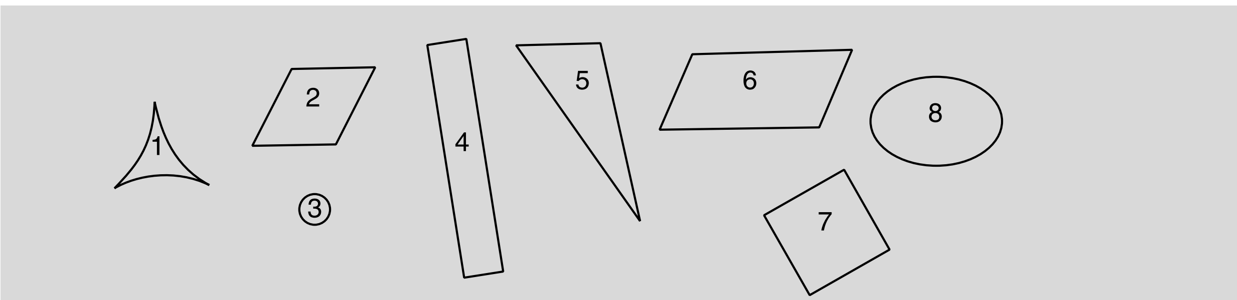
El estudio de la geometría en el nivel 4 es altamente abstracto y no necesariamente involucra modelos concretos o pictográficos. En este nivel los postulados o axiomas llegan a ser por sí mismos objeto de riguroso e intenso escrutinio. Este nivel de estudio no es conveniente para escuelas elementales, ni para la mayoría de los estudiantes del nivel medio o preparatoria, pero es usualmente el nivel de estudio en los cursos más avanzados de geometría.

Visualización de figuras geométricas - pensamiento holístico o totalizador

En la escuela primaria a los niños se les enseña a reconocer muchos tipos de figuras, como triángulos, cuadrados, rectángulos y círculos. Las preguntas sobre identificación frecuentemente se presentan en hojas de trabajo y en exámenes. Por ejemplo, a un niño se le pide "separar el triángulo, el cuadrado, el rectángulo y el círculo". A los niños se les enseña a buscar figuras prototipo, como las que han visto en sus libros de texto o en modelos físicos.

Sin embargo, muchas veces los niños sólo han visto algunos casos particulares de figuras y no tienen una idea completa de los atributos importantes que una figura debe tener para poder representar una clase en general. Con base en la teoría de van Hiele, diremos que ellos tienen una comprensión totalizadora pero no analítica de la figura. La ilustración 4 muestra una selección de figuras difíciles de identificar cuando se tiene el pensamiento totalizador. ¿Puede usted ver por qué algunos niños consideran que la figura 1 es un triángulo; la 2, un cuadrado; la 6, un rectángulo, y la 8 un círculo?

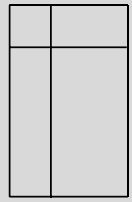
FIGURA 4



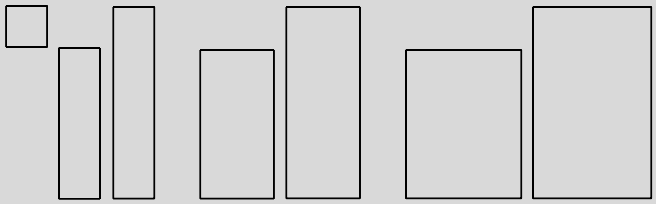
El pensamiento totalizador es un primer paso importante en el aprendizaje de las figuras geométricas. Esto permite la infraestructura para analizar las propiedades de los componentes de dichas figuras. Las habilidades para el razonamiento totalizador pueden desarrollarse en los estudiantes por medio de actividades de visualización. Por ejemplo, el encontrar figuras "ocultas" puede ayudar para que los estudiantes se enfoquen en la visualización particular de las figuras geométricas como un todo. El siguiente ejemplo proporciona una ilustración de esta idea.

Ejemplo 1

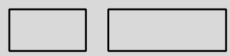
¿Cuántos rectángulos diferentes pueden obtenerse de la siguiente figura?



Solución: Buscando rectángulos "verticales", encontramos siete.



Buscando rectángulos "horizontales", encontramos dos.

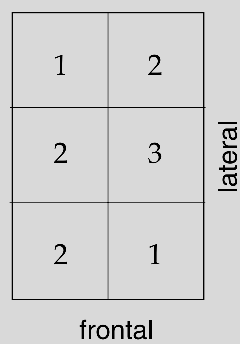


Por lo tanto, en total hay nueve rectángulos.

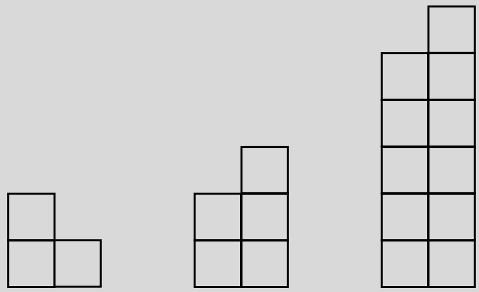
Ejemplo 2

Examinar las "vistas" de las figuras tridimensionales sencillas, es también una buena forma para que los estudiantes desarrollen destrezas en el pensamiento totalizador. El siguiente ejemplo muestra una actividad al respecto:

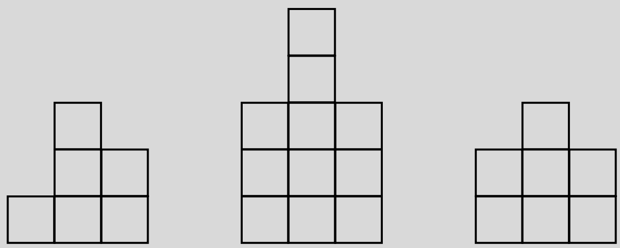
Ejemplo 2: En la figura de la derecha imagina que arriba de cada cuadrito se pone una pila de pequeños cubos. El número en cada cuadrito indica cuántos cubitos serán apilados ahí (la arista de cada cubito tiene la misma longitud que el lado de los cuadritos).



Identifica las vistas frontal y lateral de la pila de cubos resultante.



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

Solución: La vista frontal correcta es la (b), y la vista lateral correcta es la (f) (utiliza un modelo con dados u otro material, para verificarlo)

Los estudiantes que razonan primordialmente de manera totalizadora tienden a pensar en las figuras como sigue:

1. Utilizan propiedades imprecisas al comparar dibujos e identificar figuras

2. Citan prototipos visuales para caracterizar figuras

3. Incluyen atributos irrelevantes (como la posición en la página) para identificar y describir figuras

4. Excluyen algunos atributos relevantes cuando identifican y describen figuras

5. Les cuesta trabajo concebir una infinita variedad de figuras

6. Cuando agrupan las figuras para su clasificación, a partir de algún atributo, los grupos resultantes pueden ser inconsistentes

Descripción de figuras - pensamiento analítico

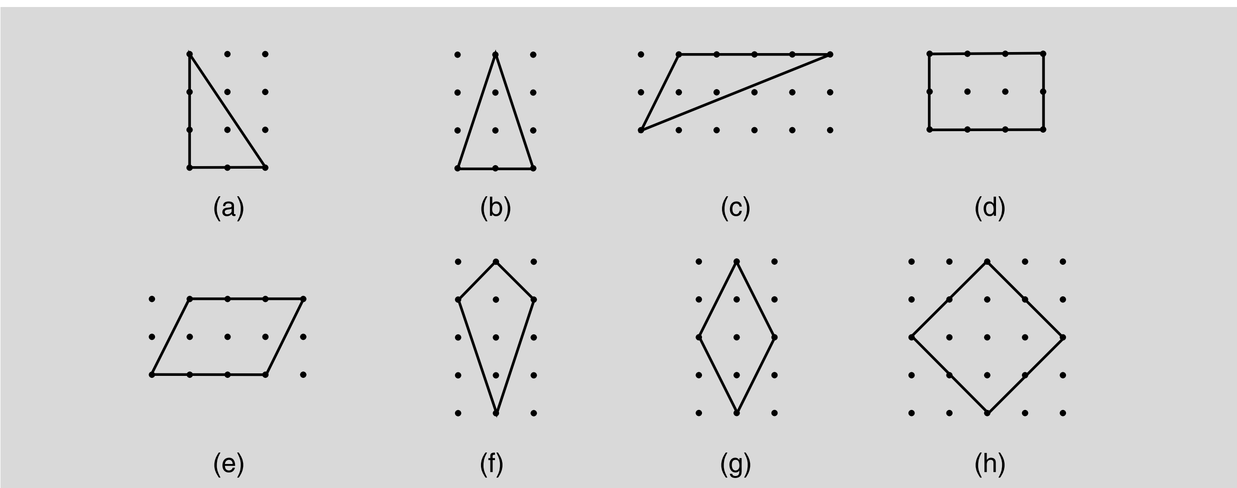
Uso del papel cuadriculado o del geoplano

Los puntos que forman una cuadrícula reticular (geoplano) sirven como un medio efectivo para analizar figuras geométricas. Un geoplano o papel cuadriculado provee representaciones concretas para tales investigaciones. Al unir dos puntos por el camino más corto posible se forma un segmento de recta. La Figura 5 muestra, en una cuadrícula reticular, algunas figuras cuyos lados son **segmentos de recta**. Las figuras (a), (b) y (c) son **triángulos** porque son figuras cerradas compuestas de exactamente tres segmentos, llamados **lados**. Las otras figuras son **cuadriláteros** porque son figuras cerradas compuestas de cuatro segmentos de recta (lados). Los triángulos tienen tres ángulos (un **ángulo** es la unión de dos segmentos con un extremo común llamado **vértice**). Los cuadriláteros tienen cuatro ángulos.

Si consideramos los triángulos de la Figura 5 notaremos muchas diferencias entre ellos. Por ejemplo, el triángulo (a) tiene un ángulo formado por un lado horizontal y otro vertical; cualquier ángulo idéntico al ángulo formado por líneas horizontales y verticales es llamado **ángulo recto**. En las figuras (d) y (h), los cuadriláteros tienen cuatro ángulos rectos. El triángulo (b) tiene dos lados de la misma longitud. Un triángulo con dos o tres lados de la misma longitud es llamado **isósceles**. Un triángulo con tres lados de la misma longitud se llama **equilátero**. El triángulo (c) tiene tres lados de diferentes longitudes; tales triángulos se llaman **escalenos**. Así, podemos comparar y nombrar tipos de triángulos de acuerdo con sus lados y ángulos.

La Figura 5 contiene una variedad de cuadriláteros. Por ejemplo, el que está en (h) es un **cuadrado**; un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados de la misma longitud y cuatro ángulos rectos. El que está en (d) es un rectángulo; un **rectángulo** es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos. El que está en (e) es un **paralelogramo**; un paralelogramo es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos (que tienen la misma dirección). El que está en (f) es un romboide simétrico; un **romboide** es un cuadrilátero con dos pares de lados contiguos de diferente longitud. Finalmente, la figura (g) es un **rombo**; un rombo es un cuadrilátero con cuatro lados de la misma longitud y dos ángulos mayores que los otros dos. Podemos saber que los lados tienen la misma longitud observando que al ir de una esquina a la otra siempre contamos el mismo número de espacios hacia arriba,

FIGURA 5



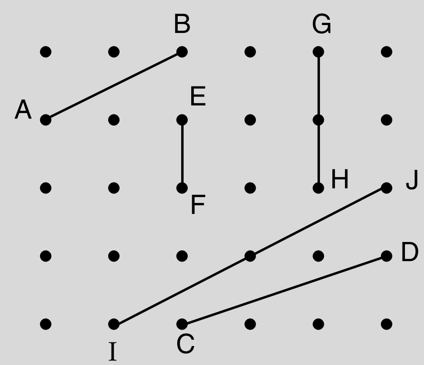
hacia abajo, hacia la izquierda, o la derecha. También es cierto que las figuras (h) y (g) tienen cuatro lados de la misma longitud y ángulos opuestos iguales.

Notamos que el rectángulo (d), el rombo (g) y el cuadrado (h) también tienen dos pares de lados paralelos; por tanto, éstos también son paralelogramos. Los estudiantes que razonan analíticamente, algunas veces tienen dificultad en entender que una figura puede corresponder a varios tipos simultáneamente. Una analogía con los criterios para ser miembro de un club puede ayudar a explicar esto; por ejemplo, la figura (h) tiene cualidades para ser miembro de, al menos, tres "clubes": los rectángulos, los paralelogramos y los cuadrados.

A medida que se avanza en el estudio de la geometría, el uso del papel cuadriculado y del geoplano podrán servir para introducir la noción de pendiente y los criterios para investigar si dos segmentos son paralelos.

Ejemplo 3

¿Cuáles de los siguientes segmentos de recta son paralelos?



SOLUCIÓN: Los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ no tienen pendientes, por tanto son paralelos. Para los otros segmentos, calculemos sus pendientes

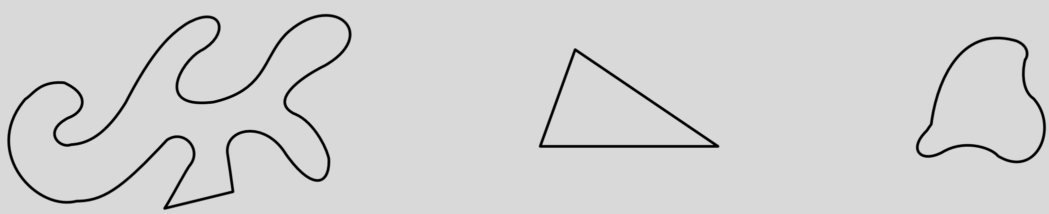
Segmento de recta	Pendiente
$\overline{AB}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{CD}$	$\frac{1}{3}$
$\overline{IJ}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Así, el segmento de recta $\overline{AB}$ es paralelo al $\overline{IJ}$, pero ni $\overline{AB}$ ni $\overline{IJ}$ son paralelos a $\overline{CD}$.

Polígonos regulares y simetría

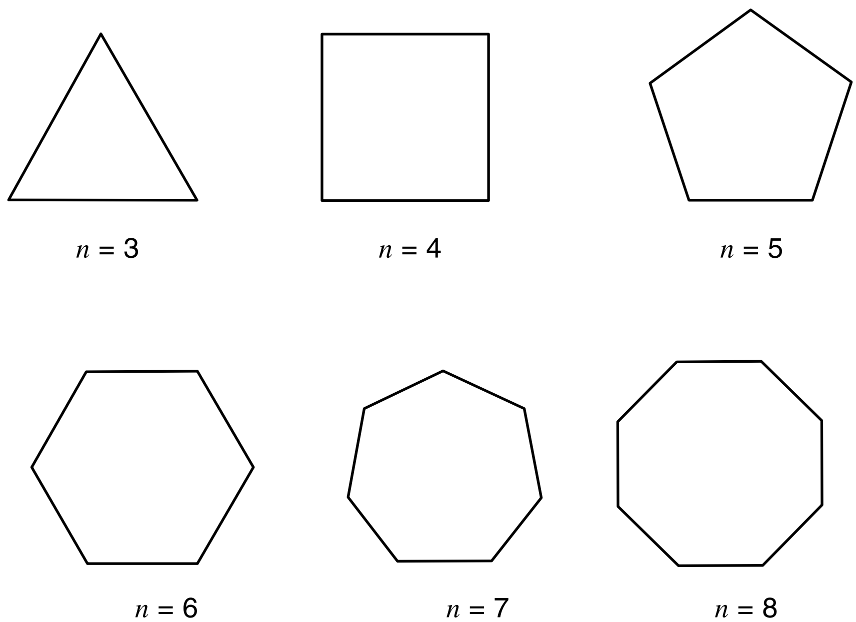
Una curva en el plano que no se cruza a sí misma y encierra parte del plano es llamada **curva cerrada simple** (Figura 6).

FIGURA 6



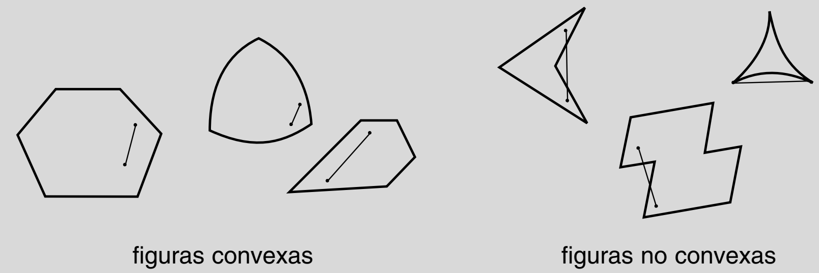
Note que una "curva" cerrada simple puede contener segmentos de recta. Un tipo especial de curva cerrada simple que incluye completamente segmentos de recta, en los cuales todos los lados son de la misma longitud y todos los ángulos son idénticos, es llamada un **polígono regular**. La Figura 7 muestra algunos ejemplos de polígonos regulares; como el número de lados del polígono puede ser cualquier número mayor que 2, vemos que hay un número infinito de polígonos regulares de clases diferentes.

FIGURA 7



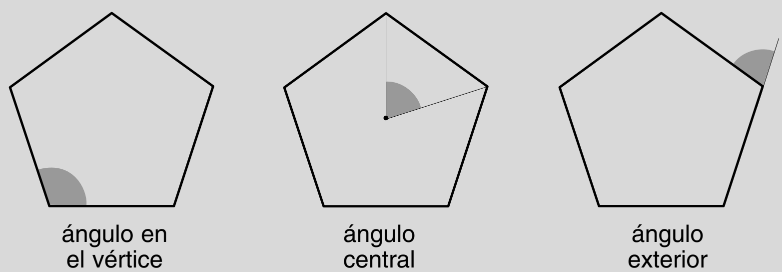
Los polígonos regulares que aparecen en la ilustración 7 son ejemplos de figuras **convexas**, ya que cada una tiene la siguiente propiedad: un segmento de recta que une dos puntos interiores de la figura se encuentra completamente dentro de la figura. La ilustración 8 muestra algunas figuras convexas y no convexas.

FIGURA 8



Hay varios ángulos de interés en los polígonos regulares. La Figura 9 muestra tres de ellos: ángulos en el vértice, ángulos centrales y ángulos exteriores.

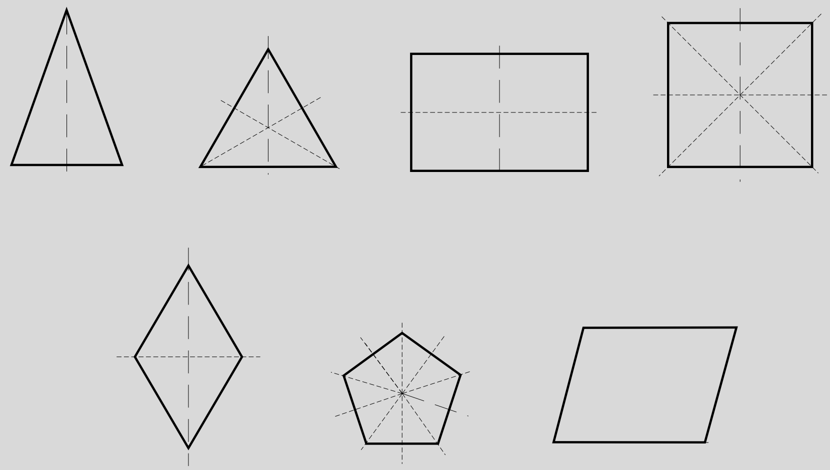
FIGURA 9



Un **ángulo en el vértice** está formado por dos lados consecutivos. Un **ángulo central** está formado por dos segmentos que conectan el centro de la figura y dos vértices. Un **ángulo exterior** está formado por un lado y la prolongación del lado adyacente, como se muestra en la Figura 9. Los ángulos en el vértice y los ángulos exteriores se forman en todos los polígonos convexos.

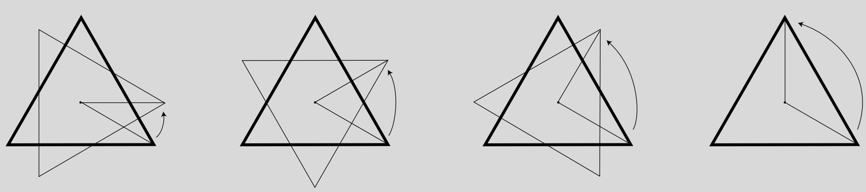
Las figuras bidimensionales pueden tener dos tipos distintos de simetría: de reflexión y de rotación. Una figura tiene **simetría de reflexión** si hay una línea por medio de la cual la figura se pueda "doblar", de tal manera que una de las mitades coincida perfectamente con la otra. La Figura 10 muestra varias figuras y sus propiedades de simetría de reflexión. Las líneas de simetría están punteadas. Note que el triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono regular tienen tantas líneas de simetría como lados. En general, un polígono regular de *n* lados tiene *n* líneas o ejes de simetría.

FIGURA 10



El segundo tipo de simetría es el de rotación. Una figura tiene **simetría de rotación** si hay un punto alrededor del cual la figura puede girar menos que una vuelta completa, de tal manera que la imagen coincida perfectamente con la figura original. La Figura 11 muestra una investigación de simetría de rotación para un triángulo equilátero.

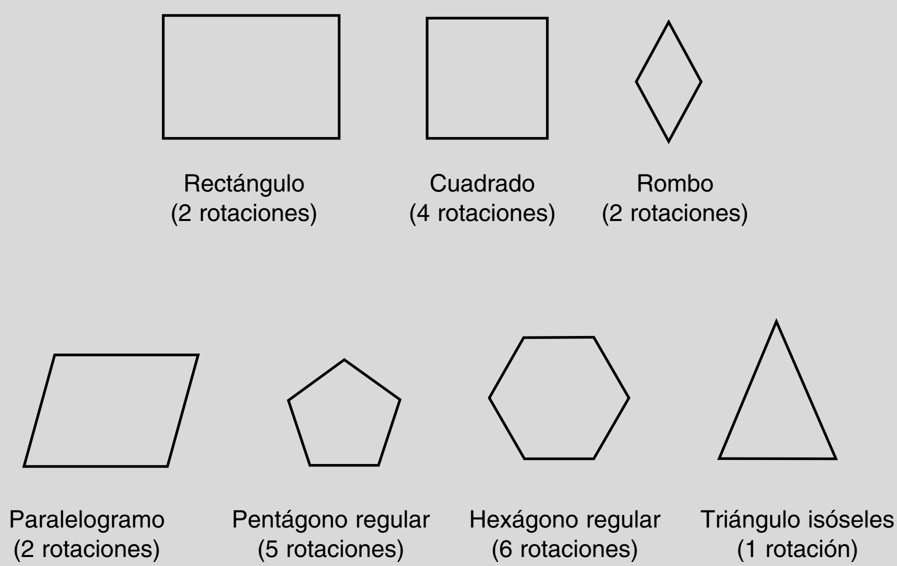
FIGURA 11



En la Figura, el triángulo equilátero coincidió al ser rotado 1/3 de vuelta en dirección contraria a las manecillas del reloj; esto ocurrirá también si lo rotamos 2/3 de vuelta y, por supuesto, una vuelta entera. Toda figura puede ser rotada una vuelta entera tomando cualquier punto como centro de rotación, para producir una imagen que coincida trivialmente con la figura original. Las figuras en las que solamente una vuelta completa puede producir una imagen idéntica, se dice que no tienen simetría de rotación.

La Figura 12 muestra varios tipos de figuras y el número de rotaciones, incluida una vuelta completa, que hacen que la imagen coincida con la figura (vea si puede verificar el número dado). Note que para cada polígono regular de n lados hay n rotaciones, esencialmente distintas, que producen imágenes que coinciden exactamente con el polígono regular.

FIGURA 12



En las Figuras 10 y 12 vemos que las figuras pueden tener simetría de reflexión sin simetría de rotación (por ejemplo, un triángulo isósceles que no sea equilátero), y simetría de rotación sin simetría de reflexión (por ejemplo, un paralelogramo que no sea rectángulo). Podemos tabular varios atributos de las figuras, como la simetría y, de este modo, comparar tipos generales de figuras. La tabla 1 muestra una lista de atributos para algunos cuadriláteros.

Tabla 1
Atributos / Figuras

Atributo	Paralelogramo	Rombo	Rectángulo	Cuadrado	Romboide simétrico
Ambos pares de lados opuestos tienen la misma longitud	X	X	X	X	
Ambos pares de lados opuestos son paralelos	X	X	X	X	
Los lados adyacentes forman ángulos rectos			X	X	
Al cruzarse las diagonales forman ángulos rectos		X		X	X
Tienen simetría de reflexión		X	X	X	X
Tienen simetría de rotación	X	X	X	X	

Si consideramos polígonos regulares en los cuales el número de lados n es muy grande, podemos obtener figuras con muchos vértices, de los cuales todos distan lo mismo del centro (equidistan del centro). La figura 13 muestra, a modo de ejemplo, un polígono regular de 24 lados. Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo (llamado **centro**).

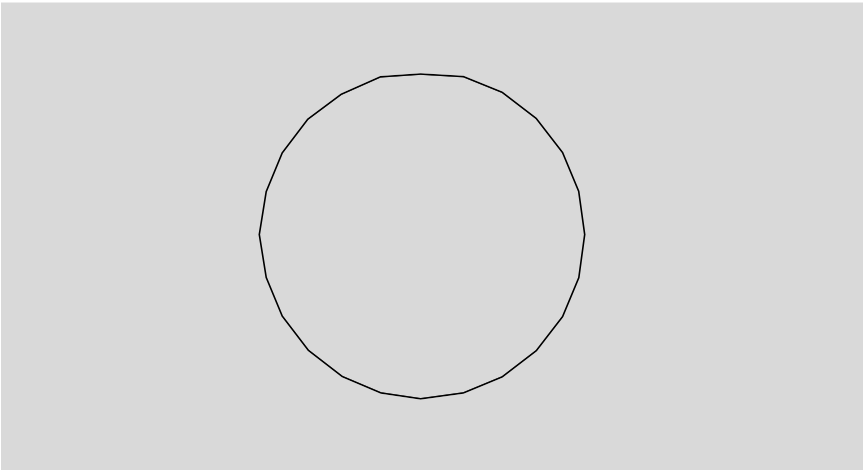
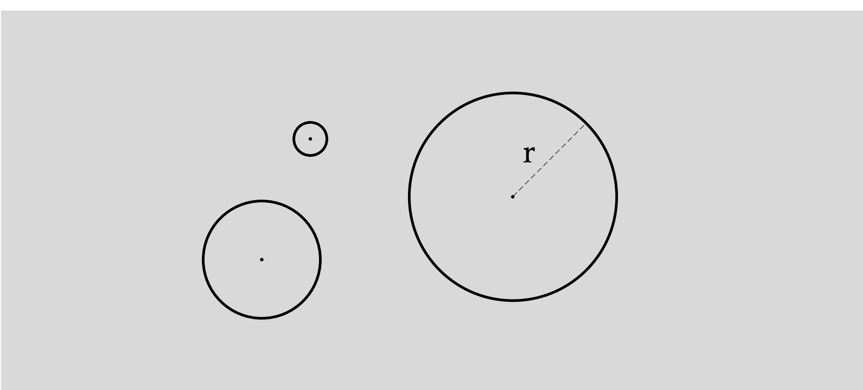


FIGURA 13

La distancia del centro a un punto de la circunferencia es llamada **radio** de la circunferencia. Cualquier segmento de recta cuyos extremos sean el centro y un punto de la circunferencia es un radio. La longitud del segmento de recta que pasa por el centro del círculo y cuyos extremos se encuentren en la circunferencia es llamado **diámetro** del círculo. La Figura 14 muestra algunos círculos y sus centros.

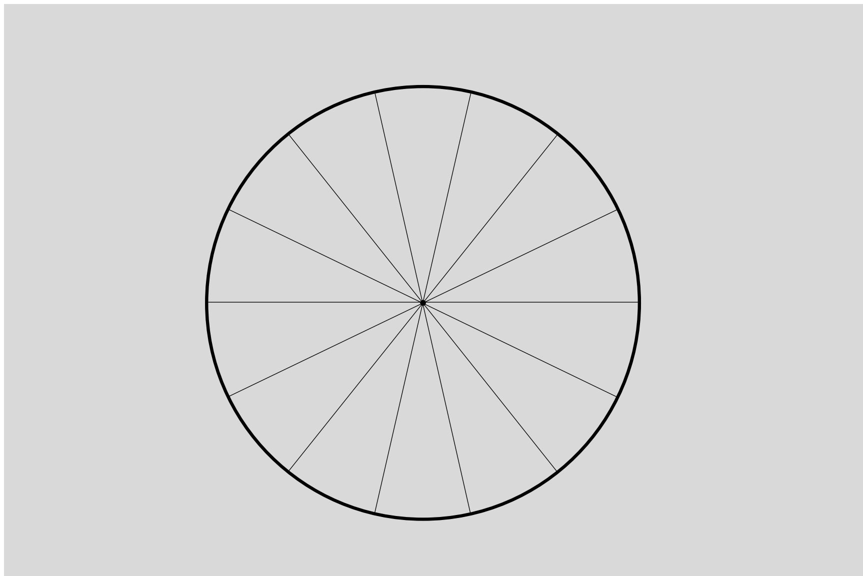
Cuando una computadora dibuja un círculo, lo que realmente dibuja es un polígono regular de muchos lados que produce la ilusión óptica de ser un círculo

FIGURA 14



Si, de acuerdo con las propiedades de simetría, analizamos un círculo, encontraremos que tiene una infinidad de líneas de simetría. Cada línea que cruza el centro del círculo es un eje de simetría (Figura 15). Además, un círculo también tiene infinidad de simetrías de rotación, ya que cada ángulo cuyo vértice sea el centro del círculo es un ángulo de rotación.

FIGURA 15



Así, muchas propiedades del círculo, incluida su área, se obtienen comparando el círculo con polígonos regulares de más y más lados.

Este artículo es una adaptación de la introducción al capítulo 12, “Geometric Shapes”, del libro de Gary L. Musser y William F. Burger. *Mathematics for Elementary Teachers*. MacMillan, USA, 1988.

BIBLIOGRAFÍA

El libro está adaptado para profesores de matemáticas de educación básica; para mayor profundización al respecto consúltese:

TREFFERS, A. (1987). *Three dimensions.* Holanda, D. Reidel. Dordrecht.

VAN HIELE, P. PM. (1957). *El problema de la comprensión* (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). (Traducción de trabajo al español realizada para el proyecto de investigación. "Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Media basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele" (1991).

VAN HIELE-GELDOF. (1957). *The didactics of geometry en the lowest class of secondary school* (tesis doctoral). Holanda, J.B. Wolters: Groningen, (traducción al inglés en Fuys, Geddes, Tischler, 1984).

IX

AZAR Y PROBABILIDAD

FUNDAMENTOS DIDÁCTICOS

Juan Díaz, María del Carmen Batanero y María Jesús Cañizares

AZAR Y PROBABILIDAD
FUNDAMENTOS DIDÁCTICOS

Juan Díaz, María del Carmen Batanero y María Jesús Cañizares

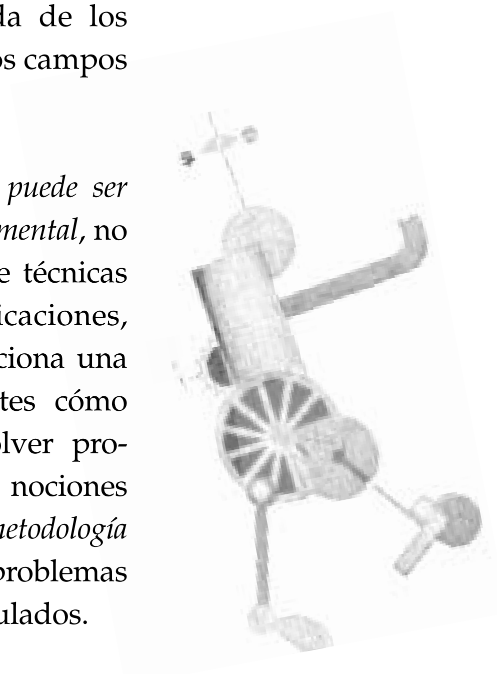
La cuestión básica que hemos formulado en la introducción consiste en determinar si es necesario promover el desarrollo de la intuición probabilística en los alumnos durante el periodo de enseñanza obligatoria o, por el contrario, es preferible esperar a que sea posible una enseñanza de la teoría matemática correspondiente. En esta sección vamos a sintetizar los principales argumentos que autores como Freudenthal, Fischbein, Glayman y Varga, etcétera, han aportado a favor de la primera alternativa.

Las razones por las que un tema cualquiera debe ser incluido en el currículo de la educación obligatoria pueden sintetizarse en las siguientes:

- Que sea una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos
- Que sea útil para la vida posterior, bien para el trabajo o para el tiempo libre
- Que ayude al desarrollo personal
- Que ayude a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior
- Que constituya la base para una especialización posterior en el mismo tema u otros relacionados

Estas cinco razones están ampliamente cubiertas por la Estadística. Ahora bien, la probabilidad proporciona un modo de medir la incertidumbre; en consecuencia, *los modelos probabilísticos son el fundamento de la mayor parte de la teoría estadística.*

Esto implica que es necesario el conocimiento de la teoría de la probabilidad para una comprensión adecuada de los métodos estadísticos, que son hoy indispensables en los campos científico, profesional y social.



Cabe destacar, en segundo lugar, que *la probabilidad puede ser aplicada a la realidad tan directamente como la aritmética elemental*, no siendo preciso el conocimiento de teorías físicas ni de técnicas matemáticas complicadas. Por sus muchas aplicaciones, adecuadamente comprendida, la probabilidad proporciona una excelente oportunidad para mostrar a los estudiantes cómo matematizar, cómo aplicar la matemática para resolver problemas reales. En consecuencia, la enseñanza de las nociones probabilísticas puede ser llevada a cabo mediante una *metodología heurística y activa*, a través del planteamiento de problemas concretos y la realización de experimentos reales o simulados.

Otro aspecto señalado por Fischbein es el carácter exclusivamente determinista de los currículos actuales, y la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad: “En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico. La intuición probabilística no se desarrolla espontáneamente, excepto dentro de unos límites muy estrechos. La comprensión, interpretación, evaluación, y predicción de fenómenos probabilísticos no pueden ser confiadas a intuiciones primarias que han sido despreciadas, olvidadas y abandonadas en un estado rudimentario de desarrollo bajo la presión de esquemas operacionales que no pueden articularse con ellos”.

Esta tendencia determinista de la enseñanza no es motivada por razones científicas. A pesar del carácter aproximado de las leyes de azar, desde el momento en que se conoce su grado de aproximación, es posible hacer predicciones, como ocurre con las restantes leyes experimentales, ya que ninguna magnitud se puede medir con una precisión absoluta.

Por otro lado, nuestro sistema de educación tiende a dar a los niños la impresión de que para cada pregunta existe una sola respuesta sencilla y clara: que no existe nada intermedio entre lo verdadero y lo falso. Esto no es demasiado acertado, ya que los problemas que encontrarán a lo largo de su vida tendrán un carácter mucho menos definido. Así pues, parece importante que durante los años de escuela se enseñe a los niños *el carácter específico de la lógica probabilística*, la forma de distinguir grados de incertidumbre y que se les enseñe a comparar sus predicciones y extrapolaciones particulares con lo que realmente sucede; en una palabra, que se les enseñe a ser dueños de su propia incertidumbre.

A los argumentos que acabamos de exponer, basados en opiniones autorizadas de distintos autores, podemos añadir algunos matices. En primer lugar, ¿qué niño de estas edades no practica juegos de azar en casa o con otros compañeros? Creemos que juegos como la oca, el parchís, etcétera, están fuertemente enraizados en la vida del niño. En consecuencia, nos parece conveniente utilizarlos con fines educativos. Por ejemplo, lanzando una simple moneda al aire (una ficha, etcétera), incluso alumnos de preescolar pueden contar el número de veces que resulta cara o cruz y esta actividad puede ser útil en el aprendizaje de los primeros conceptos numéricos, al mismo tiempo que realizan un experimento aleatorio.

Por último, aportamos una nueva *razón* de tipo social a favor de tratar de educar la intuición probabilística de todo ciudadano en el periodo de la enseñanza obligatoria. Se trata de hacerlos conscientes de la naturaleza probabilística de los distintos juegos de azar (loterías, máquinas tragaperras, bingos, etcétera). Con frecuencia estos juegos constituyen magníficos negocios para sus promotores (en 1987 los españoles gastaron más de dos billetes y medio de pesetas en juego de azar,) pero para el ciudadano puede no ser una mera actividad lúdica, sino un riesgo desproporcionado de perder su dinero. ¿Es racional la conducta del hombre que expone sus bienes a una casualidad tan poco favorable para él?

Creemos que las razones expuestas son suficientes para concluir que es preciso incorporar en los programas de la enseñanza obligatoria un objetivo referente al pensamiento probabilístico y combinatorio. No obstante, se requiere responder previamente a dos cuestiones claves:

- ¿Es posible, desde el punto de vista psicológico, emprender una instrucción efectiva sobre estas nociones desde la escuela primaria?
- ¿Cómo realizar esta instrucción?

En este artículo trataremos de aportar respuestas a estas preguntas.

FENÓMENOS ALEATORIOS

Como hemos indicado en la sección anterior, la principal razón que nos induce a incluir el estudio matemático de los fenómenos aleatorios es que el azar está presente en nuestro entorno. Analizaremos esta presencia en dos aspectos: lenguaje y realidad.

Azar y lenguaje

En el lenguaje ordinario, tanto en las conversaciones como en la prensa o literatura, encontramos con frecuencia referencias al azar. ¿Cuál es el significado atribuido a esta palabra?

El diccionario del uso del español María Moliner (1983) define la cualidad de ser aleatorio como aquello que es incierto. "Se dice de lo que depende de la suerte o el azar", siendo el azar la "supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención intencionada humana ni divina".

Informa también del origen etimológico de la palabra azar: "Del árabe *zahr*, flor, por lo que se pintaba en una de las caras del dado". Esta acepción etimológica nos evoca un experimento en gran medida paradigmático de los fenómenos aleatorios: el lanzamiento de un dado, que permite apreciar con nitidez el carácter imprevisible del resultado o acontecimiento en cuestión.

Muchos otros términos son usados frecuentemente en el lenguaje ordinario, con un significado similar, aunque pueden presentar matices diferenciadores según el contexto. Entre ellos citamos los siguientes:

- Casual
- Accidental
- Eventual
- Fortuito
- Impensado
- Imprevisible
- Inesperado
- Inopinado
- Ocasional
- Por suerte

Igualmente, existen numerosas expresiones coloquiales, usadas con frecuencia en los juegos infantiles, con este mismo significado:

- Por chamba
- Por chiripa
- De rebote

- De rechazo
- Sin querer
- Sin intención
- Sin plan

Esta variedad de expresiones para referirse a un mismo concepto da idea de la variedad de matices del mismo, así como de la clara apreciación del carácter imprevisible de ciertos fenómenos, por parte del individuo, incluso desde edades tempranas.

El azar en la realidad

La presencia de fenómenos imprevisibles en sus resultados, o manifestaciones en la realidad que nos rodea es bien patente. El carácter aleatorio de un fenómeno será apreciado por el niño a través de la observación de múltiples aspectos de su entorno, así como por medio de la realización de actividades y juegos, que son fáciles de generar en el aula (fichas, lanzamiento de dados, extracción de bolas en urnas, etcétera).

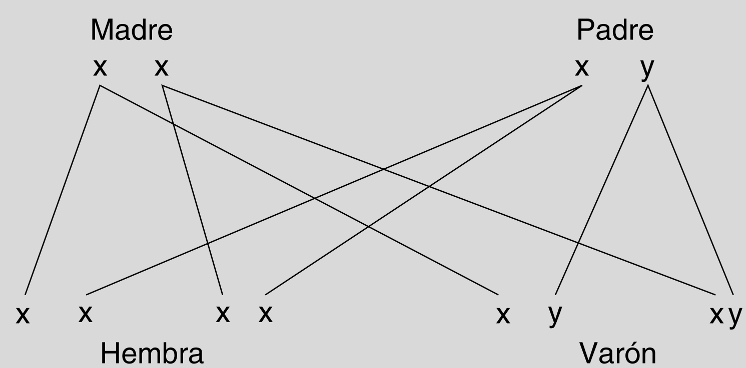
A título de ejemplo y sin la pretensión de hacer un recuento exhaustivo, enumeramos a continuación fenómenos aleatorios que pueden ser evocados por el profesor en situaciones didácticas, y para los cuales las técnicas estadísticas y el cálculo de probabilidades son, sin duda, pertinentes.

En un intento de clasificar la fenomenología del azar, vamos a utilizar cuatro grandes grupos que se describen en Tanur y Cols (1971) para clasificar los campos de aplicación de la estadística: el hombre y su mundo biológico, físico, social y político.

Nuestro mundo biológico

Dentro del campo biológico, puede hacerse notar al alumno que muchas de las características heredadas en el nacimiento no se pueden prever de antemano, dependen del azar: el sexo, color de pelo, peso al nacer, etcétera. Algunos rasgos como la estatura, número de pulsaciones por minuto, cuento de hematíes, etcétera, dependen incluso del momento en que son medidas.

La transmisión de caracteres genéticos obedece a las leyes del Cálculo de probabilidades. Puesto que el hijo recibe de su madre un cromosoma X, y de su padre puede recibir un cromosoma X o Y, la mitad de recién nacidos, aproximadamente, serán varones.



Otras aplicaciones se refieren al campo de la medicina. La posibilidad de contagio o no en una epidemia, la edad en que se sufre una enfermedad infantil, la duración de un cierto síntoma, o la posibilidad de un diagnóstico correcto cuando hay varias posibles enfermedades que presentan síntomas parecidos varían de uno a otro chico. El efecto posible de una vacuna, el riesgo de reacción a la misma, la posibilidad de heredar una cierta enfermedad o defecto, o el modo en que se determina el recuento de glóbulos rojos a partir de una muestra de sangre son ejemplos de situaciones en que el azar está presente.

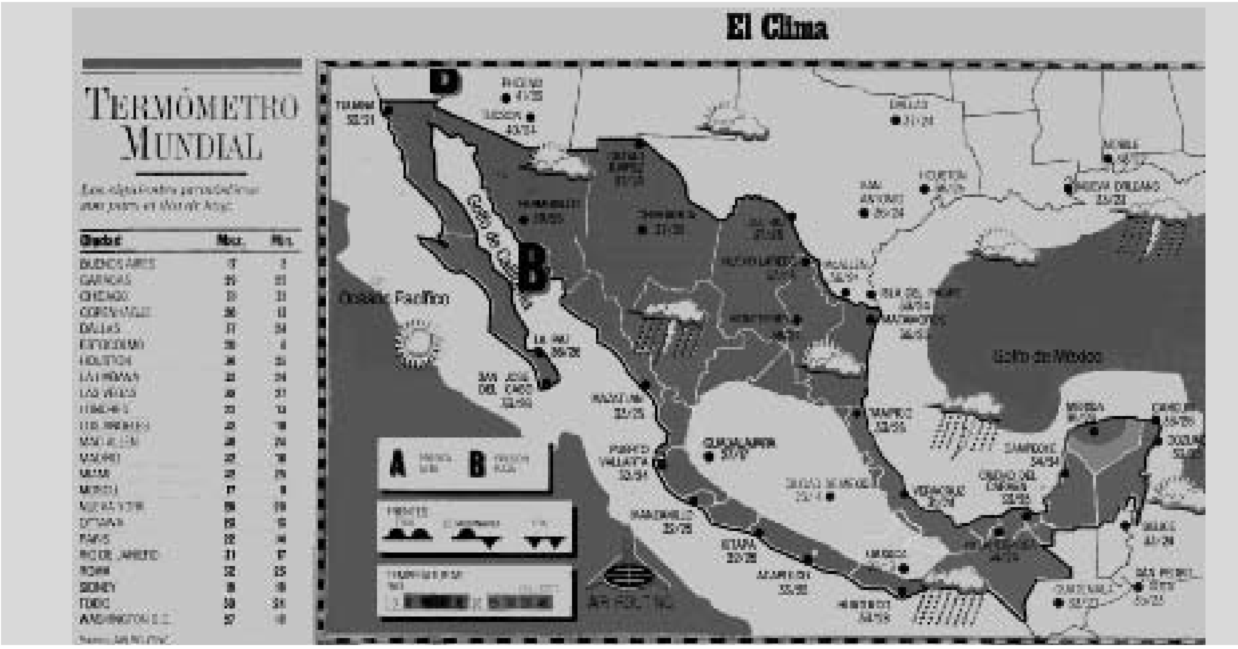
Cuando se hacen predicciones sobre la población mundial o en una región dada para el año 2000, por ejemplo, o sobre la posibilidad de extinción de las ballenas, se están usando estudios probabilísticos de modelos de crecimiento de poblaciones, de igual forma que cuando se hacen estimaciones de la extensión de una cierta enfermedad o de la esperanza de vida de un individuo.

En agricultura y zootecnia se utilizan estos modelos para prever el efecto del uso de fertilizantes o pesticidas, evaluar el rendimiento de una cosecha o las consecuencias de la extensión de una epidemia, nube tóxica, etcétera.

Por último, y en el ámbito de la psicofisiología, observamos el efecto del azar sobre el cociente intelectual, o en la intensidad de respuesta a un estímulo, así como en los tipos diferentes de caracteres o capacidades de los individuos.

El mundo físico

Además del contexto biológico del propio individuo, nos hallamos inmersos en un medio físico variable. ¿Qué mejor fuente de ejemplos sobre fenómenos aleatorios que los meteorológicos? La duración, intensidad, extensión de las lluvias, tormentas o granizo, las temperaturas máximas y mínimas, la intensidad y dirección del viento son variables aleatorias. También lo son las posibles consecuencias de estos fenómenos: el volumen de agua en un pantano, la magnitud de daños de una riada o granizo son ejemplos en los que se presenta la ocasión del estudio de la estadística y la probabilidad.



Una fuente de ejemplos de fenómenos alaetorios son los fenómenos meteorológicos

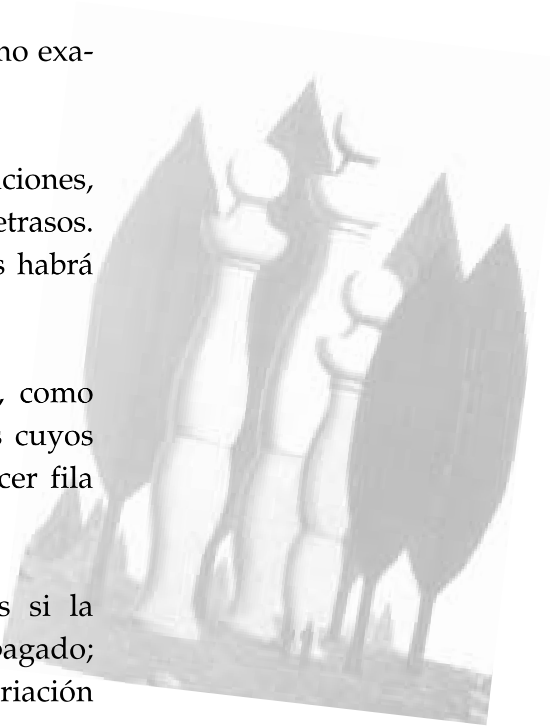
También en nuestro mundo físico dependemos de ciertas materias primas, como el petróleo, el carbón y otros minerales; la estimación de estas necesidades, la localización de fuentes de energía, el precio, etcétera, están sujetos a variaciones de un claro carácter aleatorio.

Otra fuente de variabilidad aleatoria es la medida de magnitudes. Cuando pesamos, medimos tiempo, longitudes, etcétera, cometemos errores aleatorios. Uno de los problemas que se puede plantear es la estimación del error del instrumento y asignar una estimación, lo más precisa posible, de la medida.

Por último, citamos los problemas de fiabilidad y control de calidad de los aparatos y dispositivos que usamos: coche, televisor, etcétera.

El mundo social

El hombre no vive aislado: vivimos en sociedad; la familia, la escuela, el trabajo y el ocio implican situaciones en las que predomina la incertidumbre. El número de hijos de la familia, la edad de los padres al contraer matrimonio, el tipo de trabajo, las creencias o aficiones de los miembros varían de una familia a otra.



En la escuela, ¿podemos prever las preguntas del próximo examen?, ¿quién ganará el próximo partido?...

Para desplazarnos de la casa a la escuela, o para ir de vacaciones, dependemos del transporte público, que puede sufrir retrasos. ¿Cuántas parsonas usarán el autobús? ¿Cuántos clientes habrá en la caja del supermercado el viernes a las 7 de la tarde?

En nuestros ratos de ocio practicamos juegos de azar, como quinielas o loterías. Acudimos a encuentros deportivos cuyos resultados son inciertos y en donde tendremos que hacer fila para conseguir las entradas...

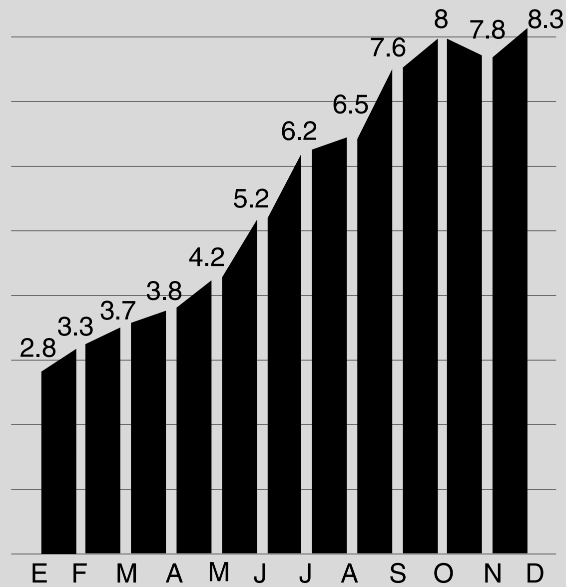
Cuando hacemos una póliza de seguros no sabemos si la cobraremos o, por el contrario, perderemos el dinero pagado; quien compra acciones en la bolsa está expuesto a la variación en las cotizaciones...

El mundo político

El gobierno, a cualquier nivel: local, nacional o de organismos internacionales, necesita tomar múltiples decisiones que dependen de fenómenos inciertos y sobre los cuales necesita información. Por este motivo, la administración precisa de la elaboración de censos y encuestas diversas. Desde los resultados electorales, hasta los censos de población, hay muchas estadísticas cuyos resultados afectan las decisiones de gobierno, y todas estas estadísticas se refieren a distintas variables aleatorias relativas a un cierto colectivo.

Entre las más importantes citaremos: el índice de precios al consumo, las tasas de población activa, emigración-inmigración, estadísticas demográficas, producción de los distintos bienes, comercio, etcétera, de las que diariamente escuchamos sus valores en las noticias.

ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMO



El índice de precios al consumo es una magnitud económica sujeta a variaciones aleatorias

Conclusión

Los ejemplos que hemos citado son tan sólo una muestra de los muchos posibles en cada una de las categorías. Todos pueden relacionarse con distintas áreas: ciencias naturales, sociedad, física, etcétera. Por ello, pueden ser propuestos a los niños, ya que forman parte de su vida cotidiana y les mostrarán la aplicabilidad de esta rama de las matemáticas a situaciones a las que deberán enfrentarse con frecuencia en su vida adulta, permitiéndoles un conocimiento más profundo de la complejidad del mundo que nos rodea.

CONCEPTO DE PROBABILIDAD

La teoría matemática de la probabilidad, que expondremos resumidamente en el capítulo 3 del libro, supone que las probabilidades iniciales de los sucesos elementales se asignan “fuera de la teoría”, nada hay en la misma que sea competente para fijar el valor “propio”de tales probabilidades “básicas”.

Desde un punto de vista formal-axiomático, la probabilidad es un objeto que satisface determinados axiomas, obteniendo los resultados teóricos mediante deducciones lógicas. Se establece conscientemente una separación entre el mundo conceptual y el mundo físico, del cual surgen los axiomas y al cual se aplican los resultados de la teoría.

Ahora bien, cuando se quiere aplicar el modelo formal al mundo real, cuando se toma la probabilidad como útil para la toma de decisiones, nos vemos obligados a pensar con más precisión sobre la noción misma de probabilidad. Si esto es necesario para los estadísticos aplicados, aún lo es más para el didacta que trata de educar la intuición probabilística y construir los cimientos del entramado de conceptos sobre los que se asientan las teorías de la probabilidad.

Usos informales de la probabilidad

Como cualquier otro vocablo importante, la probabilidad tiene muchos matices de significación y admite variedad de usos. Un estudio de los términos utilizados en el lenguaje ordinario, a través de los "diccionarios de uso", revela que el azar y la incertidumbre se aprecian como cualidades graduables. Entre lo cierto o lo seguro (lo que ocurrirá necesariamente o lo que es verdadero sin lugar a dudas) y lo imposible (lo que no puede ocurrir nunca) está lo probable, término que define María Moliner (1983): "Se dice de lo que, en opinión del que habla, es más fácil que ocurra, a que deje de ocurrir".

Para expresar estas tres circunstancias (imposible, probable y seguro) existe una gran variedad de términos. Así, por ejemplo, un suceso que es probable (por ejemplo, "Es probable que llueva") se puede expresar con los adjetivos:

- POSIBLE: "Es posible que llueva"
- PREVISIBLE: "Es previsible que mañana haga frío"
- PRESUMIBLE: "Es presumible que apruebe el examen"
- FACTIBLE: "Es factible que termine a tiempo"
- VIABLE: "Es viable que ocurra"

Estos términos funcionan en el lenguaje ordinario como operadores modales, esto es, podemos afirmar cierto enunciado rotundamente, comprometiéndonos categóricamente con su verdad, o podemos afirmarlo gradualmente. Los enunciados:

"Lloverá mañana"
"Probablemente lloverá mañana"

describen la misma realidad. La diferencia estriba en el modo de afirmación: el primero es categórico, incondicional, y el segundo es gradual y cauteloso.

El término probabilidad la define María Moliner como: "Cualidad de probable o circunstancia de ser probable una cosa":

"La probabilidad de su hallazgo es cada vez menor"
"Hay probabilidad (probabilidades) de encontrarlo"

La mayor o menor probabilidad de ocurrencia de un suceso puede graduarse mediante adverbios de cantidad o número:

“Hay algo de probabilidad de que se marche”

“algo” puede ser sustituido por: alguna, mucha, poca, grande, ...

Otras veces, especialmente en el contexto de apuestas, se estima la probabilidad mediante la comparación de posibilidades a favor y en contra de un resultado:

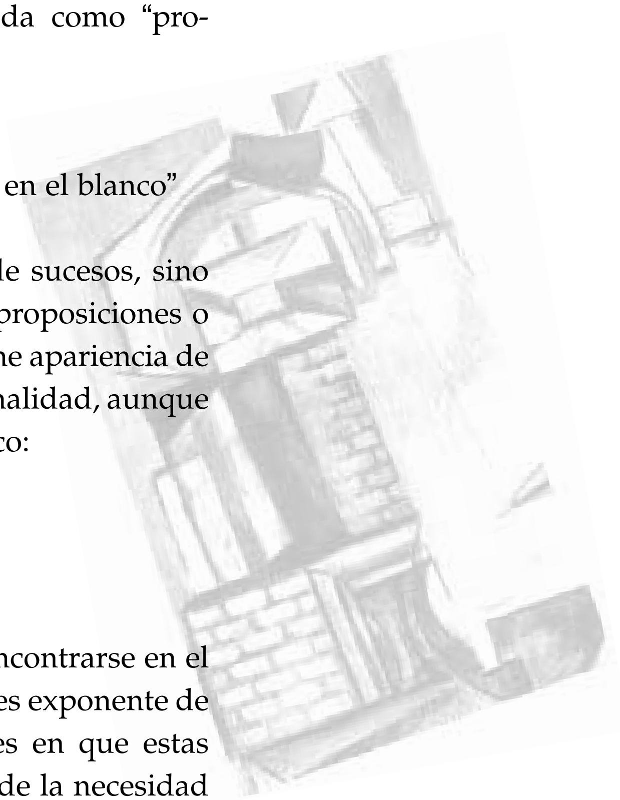
“El caballo x tiene tres posibilidades contra una de resultar ganador”

“Las apuestas son cinco a uno a favor del equipo x”

También puede la probabilidad ser interpretada como “propiedad” de la persona o cosa que afecta:

“Tiene algunas probabilidades de colocarse”

“La bala tiene muchas probabilidades de dar en el blanco”



La incertidumbre no sólo afecta la ocurrencia de sucesos, sino que también puede afectar la veracidad de las proposiciones o leyes. En castellano la palabra verosímil, “que tiene apariencia de verdadero”, se utiliza especialmente con dicha finalidad, aunque también se usa probable, en dicho contexto lógico:

“Es probable que lo que dice sea verdad”

“Lo que dice es verosímil”

La variedad y riqueza de términos que puede encontrarse en el diccionario para expresar lo incierto o verosímil es exponente de la amplitud de contextos, situaciones y matices en que estas características se presentan, y al mismo tiempo de la necesidad de proceder a un análisis filosófico y matemático del problema.

Los usos formales del término probabilidad en el campo de la ciencia y la filosofía —construcción de modelos para los fenómenos aleatorios, el diseño de procedimientos de inferencia y toma de decisiones, etcétera— han llevado a definir, de un modo cuantitativo y preciso, la noción de probabilidad.

Estos esfuerzos no han cristalizado, sin embargo, en una única teoría, sino que han conducido a la formulación de distintos puntos de vista sobre la naturaleza de la probabilidad y sus conceptos asociados. Al estudio de dichos puntos de vista nos dedicamos en las próximas secciones.

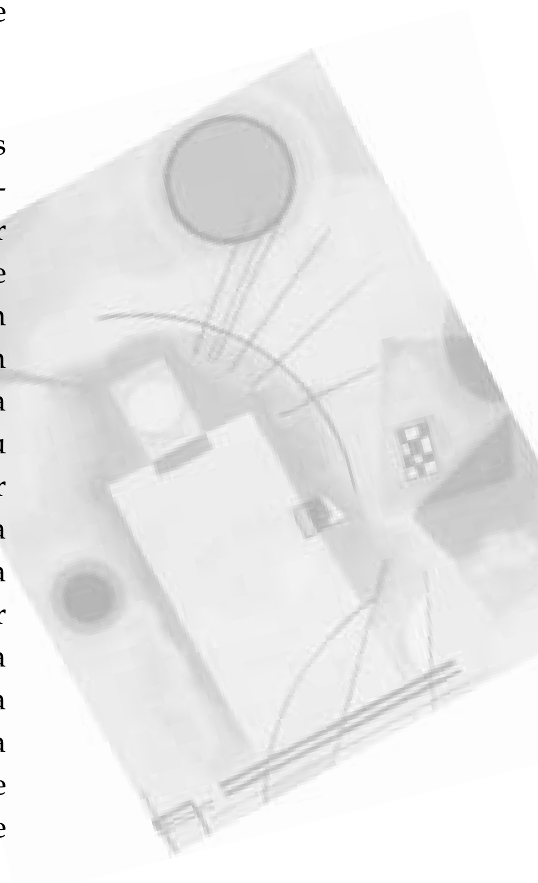
Teoría clásica: Laplace

El primer intento de definir con rigor matemático la noción de probabilidad se debe a Laplace. En su obra *Teoríe analytique des probabilités* (1812), Laplace dio la definición que se conoce como clásica de probabilidad, de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades, como "*la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables*".

De acuerdo con esta definición, el cálculo de la probabilidad de los sucesos se reducía a problemas de análisis combinatorio. Pero incluso en su misma época, esta definición se encontró inadecuada. Además de ser circular y restrictiva, no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad, sólo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidades de algunos sucesos sencillos. Laplace, siguiendo a Bernoulli, usó el principio de razón insuficiente, que considera las alternativas como equiprobables en la ausencia de razón conocida para esperar lo contrario. Más recientemente, para justificar la asignación de probabilidades por la regla de Laplace, ha sido formulado el principio de indiferencia, que considera las alternativas como equiprobables cuando hay un balance de evidencia a favor de cada alternativa.

La definición de Laplace supone, en el lenguaje actual de la teoría de conjuntos, que siempre es posible seleccionar, como espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, un conjunto de sucesos elementales que satisfagan las condiciones de simetría que garanticen la equiprobabilidad. Pero la aplicación del principio de indiferencia no es satisfactoria en general, ya que la evidencia nunca es perfectamente simétrica con respecto de un número de alternativas. Es inútil en los casos numerosos en que las posibilidades a analizar no pueden inventariarse en un conjunto de alternativas simétricas. En todo caso, no es apropiado cuando realmente se carece de razones a favor de cada resultado ("paridad de ignorancia") o cuando la variable cuyo valor tiene que determinarse es continua.

La aproximación escolar tradicional hacia la probabilidad es teórica y *a priori*, está basada en la noción de sucesos equiprobables. Se dice a los niños que la probabilidad de obtener "un uno" o "un cinco" en una tirada de un dado es 1/6. De hecho, esto entra en conflicto con la experiencia que puedan tener jugando, por ejemplo, al parchís, cuando a veces han debido de esperar bastante tiempo para poder comenzar a mover fichas porque no les salía el "cinco" requerido. Como su experiencia es limitada, pueden tener la impresión de que obtener "un cinco" es más difícil que obtener otros números. Esta idea puede ser adquirida debido a que los juegos suelen incorporar esa norma para comenzar. El razonamiento matemático para superar este error y otros similares no es simple. La aproximación usada a nivel universitario sería tratar el problema a partir de la teoría de la medida, usando una serie de axiomas formulados por la teoría de Kolmogorov. Claramente esta aproximación no puede ser utilizada con niños pequeños. Sin embargo, la alternativa de



decir al niño que cada número es simplemente equiprobable por definición, difícilmente le proporcionará un fundamento deseable para un trabajo posterior. Además, para poder asimilar el concepto clásico de probabilidad, es necesaria cierta destreza en el manejo de fracciones y en el concepto de razón. Así, para decidir entre dos urnas (una con 5 bolas rojas y 7 azules; otra, con 4 rojas y 6 azules), se requiere cierto dominio en la comparación de razones o fracciones, que la mayoría de los niños no adquiere hasta que éstos son mayores de 10 años, aunque para comparar las probabilidades respectivas los niños podrían comparar las posibilidades a favor y en contra de un color determinado en las dos urnas.

Teorías lógicas

La teoría clásica no proporciona una guía adecuada para determinar la probabilidad cuando un conjunto de alternativas no es equiprobable y, por tanto, está abierta a una aplicación inconsistente. Estimulados por los fines de la probabilidad clásica y su fracaso en lograrlos, Keynes, Jeffreys, Kooppman, Carnap y otros autores desarrollaron las teorías que suelen calificarse de lógicas.

Según esta concepción, la probabilidad traduce un grado de creencia racional, esto es, la "tasa de confianza" que conviene conceder a una proposición p a la luz de la información aportada por otra proposición q. La probabilidad es tratada como un tipo especial de relación entre dos enunciados. Los dos casos extremos de ella son la deducibilidad ("si p es consecuencia de q, la proposición q da a la p la probabilidad 1"), y la contradicción ("en el caso de que p y q sean contradictorias, la probabilidad dada por q a p es 0"). Entre estos dos casos extremos se sitúan las otras relaciones de probabilidad.

El dominio formal de una teoría lógica de probabilidad es, generalmente, un conjunto de inferencias entre enunciados o proposiciones en un cierto lenguaje, más que el conjunto de enunciados en sí mismo, siendo diferente del dominio de aplicación de una teoría empírica (conjunto de sucesos o resultados experimentales) y del dominio de una teoría subjetiva (conjunto de creencias de una persona). La probabilidad lógica intenta explicar la inducción, definiendo una relación lógica entre un enunciado evidente y otro enunciado hipótesis, que es una generalización de las relaciones de implicación y contradicción disponibles en la lógica deductiva. En general, no parece factible, sin embargo, encontrar situaciones distintas a aquellas en que puede aplicarse la concepción clásica o frecuencial para utilizar este enfoque en la enseñanza básica.

Probabilidad frecuencial o empírica

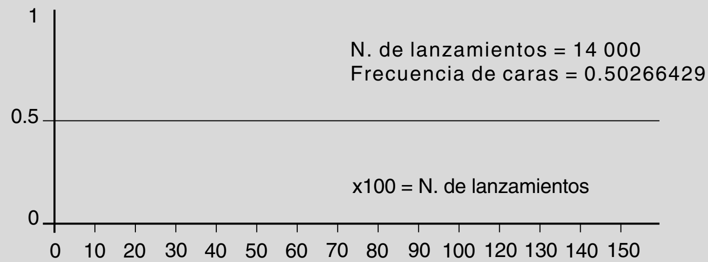
Bajo este punto de vista se considera que la probabilidad se calcula a partir de las frecuencias relativas observadas de cada uno de los diferentes resultados en pruebas repetidas. El principal elemento en este enfoque es que el concepto de probabilidad debe ser "objetivo", separado de cualquier consideración de factores personales, y sujeto a demostración práctica a través de la experimentación.

La teoría frecuencial ha sido defendida en los tiempos modernos especialmente por Richard von Mises (*Probability, Statistics and Truth*, 1919), aunque ya en 1888 John Venn en *The logic of chance* defendió explícitamente el cálculo de la probabilidad a partir de las frecuencias relativas de ocurrencias de sucesos, y desarrolló sus consecuencias con mucho detalle. También son partidarios de este enfoque Hans Reichenbach y Kolmogorov.

El enfoque frecuencial descansa en dos características observables del comportamiento de los resultados de las realizaciones repetidas. En primer lugar, es un hecho que los resultados varían de una repetición a otra de una manera imprevisible. Esto es lo que significa el término "variación aleatoria". En segundo lugar, se observa cómo un hecho empírico a corto plazo puede ser desordenado, pero a la larga surge cierta regularidad. Esta pauta se demuestra de la siguiente forma. Supongamos un suceso particular A que nos interesa; tomamos observaciones repetidas anotando las ocasiones en que ocurre A; entonces la razón entre el número de veces que sucede A, n_A, y el número total de repeticiones n (razón frecuencial o frecuencia relativa de que A ocurra n_A / n) parece tender a un límite cuando n tiende a infinito. En esta aproximación, la idea de la probabilidad surge como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa de una secuencia de resultados.

Aunque el planteamiento frecuencial atrae a los estadísticos profesionales y en general es útil siempre que se manejan grandes cantidades de datos (mecánica estadística, seguros, etcétera), tiene inconvenientes desde los puntos de vista filosófico, conceptual y práctico relacionados con la noción de número infinito de experimentos. No se puede evaluar una probabilidad con precisión, porque el número de ensayos es siempre limitado (aunque la ley de los grandes números ofrece cierta base). Además, existen situaciones en las que no es posible conducir ensayos repetidos bajo condiciones experimentales fijas. Incluso con el lanzamiento de un dado es difícil estar razonablemente seguro de que no está sesgado, examinando y realizando, por ejemplo, 1000 ensayos. Sin embargo, para la enseñanza elemental el enfoque frecuencial es muy adecuado en la asignación de probabilidades de fenómenos, como la distribución de sexos, que tienen fuerte evidencia experimental. Además, la introducción del ordenador en el aula nos permitiría abordar en la escuela la probabilidad desde este punto de vista, ya que no resulta costoso, ni en esfuerzo ni en tiempo, simular un gran número de lanzamientos de un dado, por ejemplo, u otros experimentos similares.

SIMULACIÓN DE LANZAMIENTOS DE UNA MONEDA



Comprobación experimental de la estabilidad de las frecuencias relativas

Probabilidad subjetiva

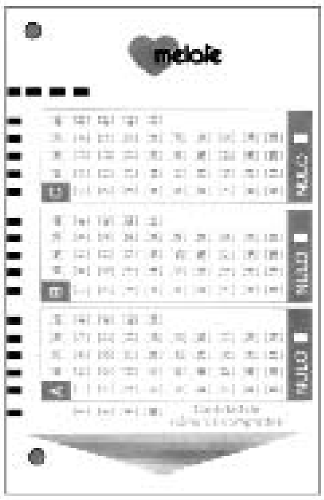
En esta aproximación la probabilidad es, en mayor o menor extensión, una expresión de la creencia o percepción personal. Este punto de vista mantiene que la probabilidad mide la confianza que un individuo particular tiene sobre la verdad de una proposición particular y, por tanto, no está unívocamente determinada. Este concepto no descansa en la repetibilidad de ningún proceso, por lo que es posible evaluar la probabilidad de un suceso que puede ocurrir una sola vez, por ejemplo, la probabilidad de que se descubra un medicamento que cure el cáncer en el próximo año.

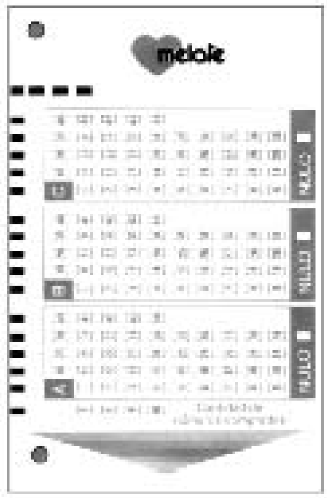
Este enfoque tiene afinidades con la aproximación lógica, ya que ambas intentan representar el "grado de creencia" sobre un suceso; pero a diferencia de la idea de probabilidad lógica, en que esta medida se supone única, los subjetivistas consideran que se trata de un grado de creencia "personal" que un individuo sostiene sobre la base de su propia experiencia. Diferentes personas pueden así asignar probabilidades distintas para un mismo suceso.

Aunque esta interpretación fue presentada por primera vez en 1926 por F.P. Ramsey, y defendida en 1937 por B. De Finetti, ha sido L.J. Savage quien en los primeros años de la década de los cincuentas le ha dado un ímpetu considerable.

En esta concepción, a cualquier entidad aleatoria se le puede atribuir una probabilidad. Esta puede ser asignada de cualquier modo, pero con la condición de que uno esté preparado para aceptar apuestas basadas en dicha asignación. Por ejemplo, si una persona cree que para cierto dado la probabilidad de obtener un "uno" es 0.5, debe estar preparada para pagar 100 pesetas si el resultado de una tirada no es un "uno", y para ganar 100 pesetas si resulta el "uno", es decir, para esta persona hay tantas posibilidades a favor, como en contra del número uno. Éste es un criterio plausible intuitivo que De Finetti resume: "Dada una cantidad aleatoria x, debes elegir un valor x sabiendo que, después de hacer esta elección, estás comprometido a aceptar cualquier apuesta con ganancia c(N - x), donde c es arbitraria y elegida por tu oponente".

El segundo criterio que De Finetti postula es la condición de coherencia. En el ejemplo anterior no sería inteligente hacer apuestas con otra persona con la regla de "pagar si sale un número distinto del dos y ganar si sale el dos". A menos que uno esté seguro de que los números mayores que el dos no pueden salir nunca, se está abocado a perder sistemáticamente con ese tipo de apuesta. La condición de coherencia es la siguiente: "Se supone que no deseas hacer apuestas que con seguridad conducirán a una pérdida. Un conjunto de probabilidades asignadas por un sujeto son coherentes si entre las combinaciones de apuestas que uno está dispuesto a hacer, no hay ninguna en la que la ganancia sea uniformemente negativa".





Se observará que esta condición no da ninguna norma de cómo se puede seleccionar una probabilidad. Sólo indica una forma a seguir para evitar consecuencias indeseables. Sin embargo, a partir de este criterio se pueden derivar las leyes básicas de probabilidad. Por tanto, el criterio de coherencia es bastante notable, proporcionando un fundamento intuitivo, pero suficiente, para la teoría. La probabilidad subjetiva puede ser un precursor fundamental para la formal enseñanza en la universidad. La concepción clásica requiere cierta destreza con las fracciones, mientras que la subjetiva puede depender solamente de comparaciones de verosimilitudes percibidas.

Una forma de estimar las probabilidades de un suceso, especialmente en el terreno de las apuestas, es dar la relación de posibilidades a favor y encontra de ese suceso. Así, cuando decimos que las posibilidades de que el equipo *A* resulte ganador en un partido son 3 frente a 2, realmente estamos indicando el cociente

$$\Omega(A) = \frac{P(Ag)}{P(Ap)} = \frac{2}{3}$$

$\Omega(A)$ recibe el nombre de cociente de posibilidades a favor y en contra, y está en correspondencia con la probabilidad del suceso, ya que $P(\overline{A})=1-P(A)$, por lo que en el ejemplo se deduce fácilmente que $P(A)=\frac{3}{5}$

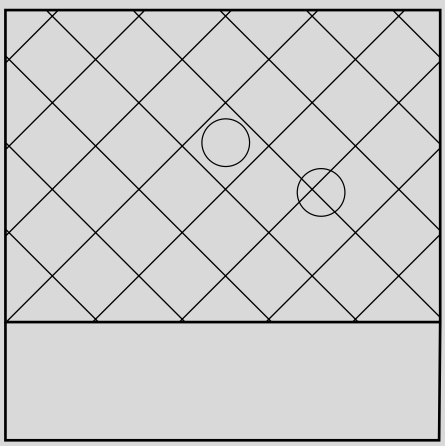
Probabilidad formal

Hawkins y Kapadia (1984) hablan de probabilidad formal cuando ésta se calcula con precisión usando las leyes matemáticas de la teoría axiomática correspondiente. Se conoce también como probabilidad objetiva o normativa. La base matemática puede reflejar hipótesis hechas en las concepciones clásica, frecuencial o subjetiva.

La teoría matemática de la probabilidad, tal como hoy se conoce, es de origen comparativamente reciente. Fue Kolmogorov quien la axiomatizó en su trabajo fundamental publicado en 1933, y traducido posteriormente al inglés con el título *Foundations of the theory of probability*. Según este autor, los sucesos se representan por conjuntos, y la probabilidad es una medida normada definida sobre estos conjuntos. Este desarrollo, basado en la teoría de la medida, no sólo proporcionó un fundamento lógico consistente para el Cálculo de probabilidades, sino que también lo conectó con la corriente principal de la matemática moderna.

La teoría axiomática de Kolmogorov surgió como consecuencia de las restricciones que el concepto clásico laplaciano imponía sobre la equiprobabilidad de los sucesos y la finitud del espacio muestral correspondiente. Una primera extensión de la definición de Laplace fue usada para calcular las probabilidades de sucesos con resultados infinitos. La noción de igual verosimilitud de ciertos sucesos desempeñó un papel clave en esta extensión. Según este desarrollo, si E es alguna región con una medida conocida (longitud, área, volumen), la probabilidad de que un punto elegido al azar pertenezca a un subconjunto A de E es el cociente entre la medida de A y la medida de E.

Las dificultades conceptuales y de índole matemática que esta aproximación a la probabilidad comporta, desaconsejan su tratamiento en el periodo de enseñanza obligatoria, de modo que cuando se habla de probabilidad en la educación EGB sin duda no se habla de probabilidad bajo un punto de vista formal-axiomático.



¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda no corte a ninguna de las líneas de la cuadrícula?

El concepto de probabilidad como medida permite resolver problemas de probabilidades geométricas.

Conclusiones

Cuando comparamos los diferentes enfoques expuestos, vemos que cada uno puede ser aplicado con ventaja en alguna circunstancia. Como afirma Hadley (1979), las interpretaciones frecuencial y subjetiva se pueden considerar como los casos límites de un continuo. La teoría frecuencial puede aplicarse cuando los experimentos pueden repetirse indefinidamente, mientras que la subjetiva se puede aplicar a un único suceso irrepetible. Hay circunstancias (física, operacionales de las compañías de seguros, juegos de azar...) donde es posible registrar un gran número de experimentos. En estos casos las frecuencias relativas serán muy estables y pueden utilizarse para estimar las probabilidades. Pero la mayoría de los casos reales en los que interesa aplicar las nociones probabilísticas quedan entre los dos casos extremos. En general, se dispondrá de alguna información frecuencial pero no será suficiente, por lo que será preciso una cierta dosis de juicio personal. Además, en la práctica suele darse el caso de que la información de frecuencias procedente de registros históricos no pueden considerarse exactamente como repeticiones de un mismo experimento aleatorio, sino pruebas de experimentos aleatorios parecidos, pero no equivalentes. En consecuencia, será preciso aplicar juicios personales coherentes basados en la información disponible.

Estas imprecisiones inevitables en la asignación de las probabilidades iniciales, no tienen, sin embargo, graves consecuencias para el Cálculo de Probabilidades; se trata de una característica del mundo real que también se da en otros modelos científicos, que no implica un fallo en la teoría "La cuestión básica es si la teoría sirve a pesar de sus limitaciones; la respuesta es que ha probado ser de gran utilidad" (Hadley, 1979).

Se observará que la filosofía de la probabilidad es sumamente controvertida. ¿Es posible, a pesar de ello, un tratamiento escolar de estos temas? La respuesta, teniendo en cuenta las argumentaciones expuestas en la Sección 1, consideramos que debe ser positiva, siempre que no se trate de transmitir teorías matemáticas ni filosóficas. Los objetivos deben orientarse hacia el desarrollo de los aspectos intuitivos de las distintas aproximaciones mediante situaciones de aprendizaje apropiadas. Como afirman Steimbring y von Harten (1982), la formación estocástica (síntesis de la probabilidad y estadística) en la escuela debe vincular lo estocástico como la lógica de la incertidumbre, la matemática de los fenómenos de masas, la teoría de la decisión y la Estadística como tecnología de la transformación de los datos en información significativa.

Tomado de: Juan Díaz, María del Carmen Batanero y María Jesús Cañizares, Azar y probabilidad. Colección: *Matemáticas cultura y aprendizaje*. Síntesis, España, 1987.

• Algunas de las ilustraciones originales de este artículo fueron sustituidas.

BIBLIOGRAFÍA

FISHBEIN, E. (1975). *The intuitive sources of probability thinking in children.* D. Reidel Dordrecht.

FISHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics education.* D. Reidel Dordrecht.

FISHBEIN, E. y GAZIT, A. (1984). *«Does the teaching of probability improve probabilistics intuition?»* Educational Studies in Mathematics, vol. 15. 1-24.

FEREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educationeal task.* D. Reidel Dordrecht.
- (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures.* D. Reidel Dordrecht.

GLAYMANN, M. y VARGA, T. (1975). *Las probabilidades en la escuela*. Teide Barcelona.

TANUR, J. M.; MONSTELLER, F. ; KRUSKAL, W. A. y otros. (1978). *Statistics: a guide to the unknown.* Holden-Day. California.

VARGA, T., y DUMONT, M. (1973). *Combinatoire, statistiques et probabilités de 6 a 14 ans.* OCDL. Paris.

X

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO DESDE EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO-COGNITIVO

Antonio Ontoria, A. Ballesteros, M. C. Cuevas,
L. Giraldo, I. Martín, A. Molina, A. Rodríguez y U. Vélez

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO DESDE EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO-COGNITIVO

Antonio Ontoria, A. Ballesteros, M. C. Cuevas,
L. Giraldo, I. Martín, A. Molina, A. Rodríguez y U. Vélez

De las distintas clasificaciones sobre el aprendizaje, hemos optado por la de Joyce y Weil (1985, pp. 21-24) como suficientemente clarificadora. Distingue cuatro modelos amplios:

a) *Modelos conductistas*, con teóricos como Skinner, Wolpe, Salter, Gagné, Smith y Smith, etcétera, cuyo objetivo es el control y entrenamiento de la conducta;

b) *Modelos de interacción social*, con teóricos como Cox, Bethel, Shaftel, Broocock, etcétera, que se centran en los procesos y valores sociales;

c) *Modelos personales*, entre cuyos representantes están Rogers, Schutz, Gordon, Glasser, etcétera, orientados hacia el autodesarrollo personal;

d) *Modelos de procesamiento de la información*, entre cuyos teóricos se encuentran Suchman, Schwab, Bruner, Piaget, Sigel, Ausubel, etcétera, que trabajan sobre los procesos mentales.

Dentro, pues, de los modelos del procesamiento de la información se sitúa el planteamiento de Ausubel sobre el aprendizaje, que servirá de referencia para el estudio de los mapas conceptuales como estrategia y técnica cognitiva.

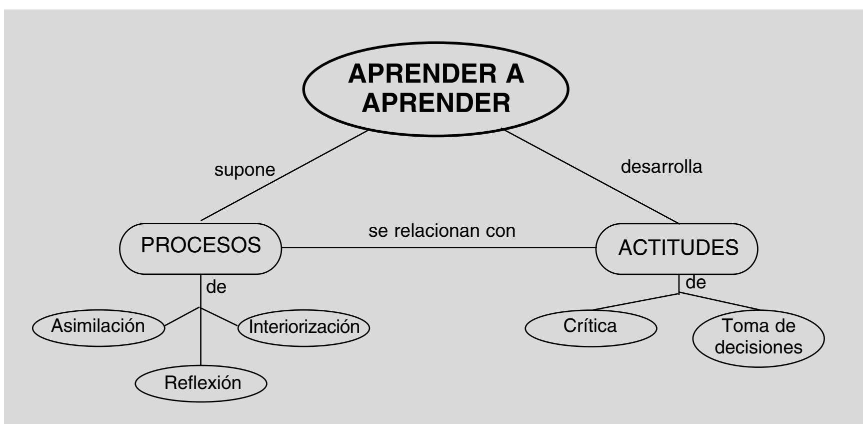
El aprendizaje como formación y desarrollo de estructuras cognitivas

El aprendizaje es un proceso de desarrollo de *insights* o estructuras significativas. Se identifica con “conocer” definido como “comprensión del significado”. De ahí que cuando existe una vacilación o duda en el aprendizaje no se ha comprendido plenamente.

La formación y desarrollo de la estructura cognitiva depende del modo como percibe una persona los aspectos psicológicos del mundo personal, físico y social. Las motivaciones, incluso, dependen de la “estructura cognitiva” y el cambio de motivación implica un cambio de estructura cognitiva. Por medio del aprendizaje, se producen los cambios de *insights* o comprensión interna de la situación y su significado. Los cambios que se producen en la estructura cognitiva provienen por el cambio en la misma estructura y por la fuerza que tienen en el “aquí y ahora” las necesidades, motivaciones, deseos, tensiones, aspiraciones...

Aquí nos fijamos en la orientación del aprendizaje que supone la génesis de nuevos conceptos interiorizados, nuevas estructuras mentales, nuevas actitudes... con los que el alumno pueda analizar y solucionar los problemas. Las nuevas estructuras y actitudes, desarrolladas *por la asimilación, reflexión e interiorización*, permiten valorar y profundizar las distintas situaciones vitales en las que tiene que tomar una opción personal. Existe, pues, un *proceso reflexivo*, ya que se trata de una incorporación consciente y responsable de los hechos, conceptos, situaciones, experiencias... que implica aceptar el aprendizaje desde la perspectiva del alumno y relacionarlo con ámbitos específicos. Por tanto, se trata de un aprendizaje para desarrollar la *actitud crítica* y *la capacidad de toma de decisiones*. Estas dos características definen el proceso de **aprender a aprender**.

Dentro de la concepción de Ausubel es importante clarificar el concepto de *estructura cognitiva*. Se la define como "construcciones hipotéticas, es decir, entidades supuestamente hipotéticas que tanto deben explicar la unidad, cierre y homogeneidad individual, como las semejanzas y coincidencias de determinados modos de comportamiento. En cada estructura mental está implícito un momento de generalidad" (Seiler, 1968, p. 11). Las estructuras cognitivas son utilizadas por Ausubel para designar el conocimiento de un tema determinado y su organización clara y estable, y está en conexión con el tipo de conocimiento, su amplitud y su grado de organización. Ausubel sostiene que la estructura cognitiva de una persona es el factor que decide acerca de la significación del material nuevo y de su adquisición y retención. Las ideas nuevas sólo pueden aprenderse y retenerse útilmente si se refieren a conceptos o proposiciones ya disponibles, que proporcionan las anclas conceptuales. La potenciación de la estructura cognitiva del alumno facilita la adquisición y retención de los conocimientos nuevos. Si el nuevo material entra en fuerte conflicto con la estructura cognitiva existente o si no se conecta con ella, la información no puede ser incorporada ni retenida. El alumno debe reflexionar activamente sobre el material nuevo, pensando los enlaces y semejanzas, y reconciliando diferencias o discrepancias con la información existente.



Aprendizaje significativo y aprendizaje memorístico

Al analizar la realidad escolar, Ausubel se dio cuenta de que predominaba un aprendizaje *memorístico*, caracterizado por la adquisición de los conocimientos a través de unos procedimientos repetitivos. Ante esta situación se produjo la alternativa del aprendizaje *por descubrimiento*, en la cual el alumno adquiere los conocimientos por sí mismo, es decir, los redescubre, sin darles una organización previa.

Ausubel cuestionó que el aprendizaje por descubrimiento fuese la alternativa adecuada al aprendizaje memorístico. Para él, la distinción entre aprendizaje memorístico y aprendizaje significativo es más importante, pues se apoya en criterios de contraposición más coherentes. El *aprendizaje memorístico o repetitivo* se produce cuando “la tarea de aprendizaje consta de puras asociaciones arbitrarias” (Ausubel, Novak y Hanesian, 1989, p. 37) (números, listas, pares asociados, etcétera). En la asociación de los conceptos no hay una relación sustancial y con significado lógico.

> “En el aprendizaje memorístico, la información nueva no se asocia con los conceptos existentes en la estructura cognitiva y, por lo tanto, se produce una interacción mínima o nula entre la información recientemente adquirida y la información ya almacenada” (Novak, 1985, p. 74).

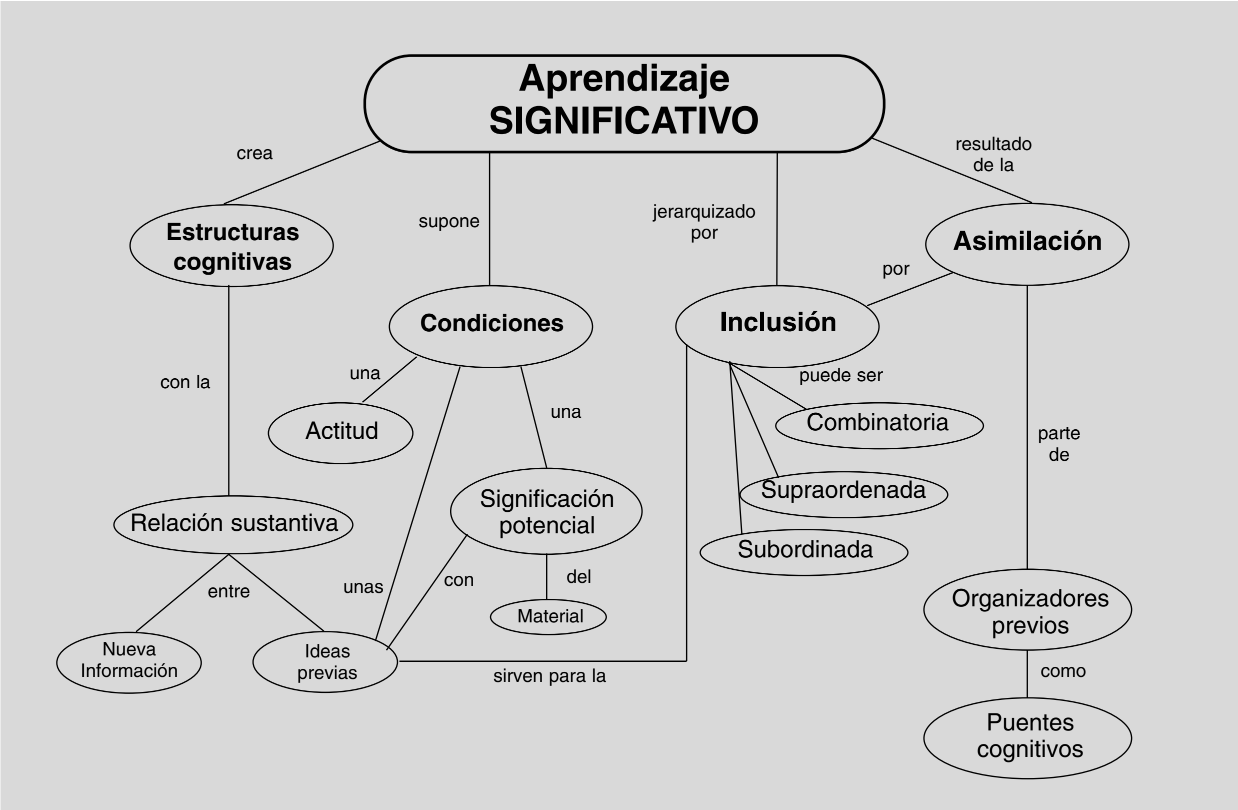
El alumno no tiene intención de asociar el nuevo conocimiento con la estructura de conceptos que ya posee en su estructura cognitiva. Se produce, pues, una memorización mecánica o repetitiva de los datos, hechos o conceptos. El *aprendizaje significativo*, por el contrario, tiene lugar cuando se intenta dar sentido o establecer relaciones entre los nuevos conceptos o nueva información y los conceptos y conocimientos existentes ya en el alumno, o con alguna experiencia anterior. Hay aprendizaje significativo cuando la nueva información "puede relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe" (Ausubel, p. 37). De esta manera, el alumno construye su propio conocimiento y, además, está interesado y decidido a aprender.

Las diferencias entre ambos tipos de aprendizaje son las siguientes:

a) *En el aprendizaje significativo*, la nueva información se incorpora de forma sustantiva, no arbitraria, a la estructura cognitiva del alumno. Hay una intencionalidad de relacionar los nuevos conocimientos con los de nivel superior más inclusivos, ya existentes en la estructura cognitiva. Se relaciona con la experiencia, hechos u objetos. Hay una implicación afectiva al establecer esta relación, al manifestar una disposición positiva ante el aprendizaje.

b) *En el aprendizaje memorístico*, la incorporación de los nuevos conocimientos se produce de forma arbitraria. No hay intención de integrarlos en la estructura cognitiva. No se relaciona con la experiencia, hechos u objetos. No hay implicación afectiva en dicha relación al no mostrar una disposición positiva ante el aprendizaje.

Sin embargo, Ausubel no concibe estas dos clases de aprendizaje como contrapuestos radicalmente, todo o nada, sino que los presenta como un *continuo*. Tanto el aprendizaje repetitivo como el significativo pueden ser por *descubrimiento*, según el proceso que se utilice en la aplicación metodológica. En este sentido, el aprendizaje escolar dependerá del grado en que el nuevo aprendizaje sea significativo.



El aprendizaje significativo es más eficaz que el memorístico:

- Porque le afecta en sus tres principales fases: adquisición, retención y recuperación

- Las pruebas realizadas confirman que el enfoque significativo de un material potencialmente significativo hace la adquisición más fácil y más rápida que en el caso de un enfoque repetitivo

- La adquisición significativa es más fácil porque fundamentalmente implica la utilización de estructuras y elementos previamente adquiridos, que funcionan como anclas respecto al nuevo material, por semejanza y contraste

- Es más fácilmente retenido durante un periodo más largo

¿CUÁNDO SE PRODUCE EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO?

Para Ausubel (1978, pp. 37-38), lo fundamental del aprendizaje significativo como proceso consiste en que los pensamientos, expresados simbólicamente de modo no arbitrario y objetivo, se unen con los conocimientos ya existentes en el sujeto. Este proceso, pues, es *un proceso activo y personal*.

-*Activo*, porque depende de la asimilación deliberada de la tarea de aprendizaje por parte del alumno

-*Persona*l, porque la significación de toda la tarea de aprendizaje depende de los recursos cognitivos que utilice cada alumno

La clave del aprendizaje significativo está en relacionar el nuevo material con las ideas ya existentes en la estructura cognitiva del alumno. Por consiguiente, la eficacia de este aprendizaje está en función de su significatividad, no de las técnicas memorísticas (aprendizaje memorístico). Para ello, los prerrequisitos básicos son:

a) Que el material sea potencialmente significativo, es decir, que permita establecer una relación sustantiva con conocimientos e ideas ya existentes

b) La tendencia del alumno al aprendizaje significativo, es decir, una disposición en el alumno que indica interés por dedicarse a un aprendizaje en el que intenta dar un sentido a lo que aprende

Un material potencialmente significativo

¿Cuándo un material es potencialmente significativo? La significación potencial quiere decir que el material de aprendizaje (contenido cultural) puede ser puesto en conexión, de modo no arbitrario, superficial y objetivo, con la estructura cognitiva de un determinado individuo. En general, podemos decir que el nuevo material debe ser "susceptible de dar lugar a la construcción de significados" (Coll, 1990, p. 195). El nuevo material debe permitir una relación intencionada (no arbitraria) y sustancial (no al pie de la letra) con los conocimientos e ideas del alumno (Ausubel, p. 48). Por "relación sustancial" se entiende que esta relación se establece con algún aspecto específicamente relevante de la estructura cognitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición (Ausubel, p. 48). Se trata de la relación que se establece con el sentido y significado de las ideas previas. Las relaciones significativas pueden normalmente expresarse de diversas maneras y su establecimiento es más fácil cuando se recurre a formulaciones alternativas.

Esta significatividad potencial del material depende de la **significatividad lógica**, es decir, que el contenido o material posea una estructura interna, organizada, de tal forma que sus partes fundamentales tengan un significado en sí y se relacionen entre sí de modo no arbitrario. Esta potencial significatividad lógica no sólo depende de la estructura interna del contenido, sino también de la manera como éste sea presentado al alumno.

Una actitud y significatividad psicológica

Además de la significatividad lógica, el material o contenido de aprendizaje necesita una potencial **significatividad psicológica**, es decir, que pueda significar algo para el alumno y le lleve a tomar la decisión intencionada de relacionarlo no arbitrariamente con sus propios conocimientos. El material tiene potencial significatividad psicológica cuando puede conectarse con algún conocimiento del alumno, es decir, con su estructura cognitiva. Esto explica la importancia de las ideas o conocimientos previos del alumno en el proceso del aprendizaje significativo.

La significatividad psicológica supone, pues, la "disponibilidad de contenidos relevantes en las estructuras cognitivas de diferentes alumnos" (Ausubel, p. 50), es decir, que el alumno tenga en su estructura cognitiva ideas inclusoras con las cuales pueda relacionar el nuevo material (Pozo, 1989, p. 214). Además de la potencial significatividad, lógica y psicológica del material, se necesita otra condición básica: *una actitud favorable del alumno* para aprender significativamente, es decir, una intención de dar sentido a lo que aprende y de relacionar, no arbitrariamente, el nuevo material de aprendizaje con sus conocimientos adquiridos previamente y con los significados ya construidos. El aprendizaje significativo es el resultado de una interacción del nuevo material o información con la estructura cognitiva preexistente en el individuo (Ausubel, p. 148). Resumiendo, pues, el aprendizaje significativo presupone tres condiciones para que se produzca:

1. Los nuevos materiales o información a aprender deben ser potencialmente significativos, para poder ser relacionados con la ideas relevantes (inclusores) que posee el alumno

2. La estructura cognitiva previa del alumno debe poseer las necesarias ideas relevantes (inclusores) para que puedan relacionarse con los nuevos conocimientos

3. El alumno debe tener disposición significativa hacia el aprendizaje, lo cual exige una actitud *activa*

TIPOS DE APRENDIZAJE

Ausubel distingue tres tipos básicos de aprendizaje significativo en función del grado creciente de complejidad: aprendizaje de representaciones, aprendizaje de conceptos y aprendizaje de proposiciones.

Aprendizaje de representaciones

Consiste "en hacerse del significado de símbolos solos (generalmente palabras) o de lo que éstos representan" (Ausubel, p. 52). Se trata, pues, de aprender lo que significan las palabras aisladas o los símbolos. "Significa aprender los símbolos particulares que representan o son significativamente equivalentes a los referentes específicos" (Ausubel, p. 53). Este tipo de aprendizaje se vincula con la adquisición del vocabulario. En el proceso de aprendizaje de representaciones hay que distinguir dos aspectos:

- Uno, el aprendizaje antes de los conceptos

- Otro, después de la formación de conceptos

En el primero, las palabras representan objetos o sucesos reales. La palabra es igual a la imagen concreta y específica de lo que tales referentes significan. A medida que el niño se desarrolla, aprende nuevo vocabulario para representarlos.

Aprendizaje de conceptos

Es el segundo tipo de aprendizaje significativa. Ausubel (p. 61) define el concepto como "objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterio comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo". Los conceptos también representan símbolos y palabras individuales, pero hay un mayor grado de abstracción en función de unos *atributos de criterio comunes*. Surgen, pues, de relacionar determinados objetos, sucesos, etcétera, con atributos comunes a todos ellos. Ausubel (p. 61) presenta dos formas para el aprendizaje de conceptos: una *formación de conceptos* a partir de las experiencias concretas, similar al aprendizaje de representaciones, y otra, *la asimilación de conceptos* consistente en relacionar los nuevos conceptos con los existentes ya en el alumno formando estructuras conceptuales.

Aprendizaje de proposiciones

Consiste en "captar el significado de nuevas ideas expresadas en forma de proposiciones" (Ausubel, p. 53), es decir, expresadas en una frase u oración que contiene varios conceptos. Novak (1985, p. 192, nota 2) señala que "las proposiciones son dos o más conceptos ligados en una unidad semántica..." Utilizando una metáfora un tanto tosca, las proposiciones son las "moléculas" a partir de las que se construye el significado y los conceptos son los "átomos" del significado. Este tipo de aprendizaje puede hacerse, según Ausubel, combinando o relacionando palabras individuales entre sí, cada una con un referente distinto, y combinándolas de tal manera que el resultado (la proposición) es más que la suma de los significados de las palabras individuales. Lógicamente, el aprendizaje de proposiciones supone conocer el significado de los conceptos que las integran. En los dos tipos de aprendizaje anteriores se trata de representaciones o conceptos *unitarios*, mientras que en el aprendizaje de proposiciones intervienen varios conceptos que se relacionan entre sí y con la estructura cognitiva del alumno para producir un nuevo significado *compuesto*. Al implicar relación de conceptos, la adquisición de las proposiciones sólo puede hacerse a través de la *asimilación.*

EL APRENDIZAJE COMO PROCESO DE COMPRENSIÓN Y ASIMILACIÓN

Cuando se habla de que los alumnos “comprendan”, estamos diciendo que intenten dar sentido a aquello con lo que entran en contacto y mediante lo cual se forman las representaciones y los esquemas cognitivos. Se trata, pues, de una asimilación activa, consistente en captar o adquirir lo que está implicado en el proceso de aprendizaje, que va desde las características sensoriales hasta las características más abstractas.

Para facilitar la comprensión y la asimilación, cada persona tiene sus estrategias, pero se puede afirmar que la familiarización con el material tiene un efecto positivo mayor que con el desconocido. Utilizar estos materiales familiares para establecer relaciones, clasificaciones, categorías, esquemas... facilita un aprendizaje más eficaz.

LA ASIMILACIÓN DE SIGNIFICADOS Y SUS MODALIDADES

La teoría de la *asimilación* es el punto central del planteamiento de Ausubel sobre el aprendizaje significativo, de tal manera que la mayor parte de este aprendizaje consiste en la asimilación de nueva información. Explica dicha teoría diciendo que “la nueva información es vinculada a los aspectos *relevantes y preexistentes* en la estructura cognitiva, y en el proceso se modifican la información recientemente adquirida y la estructura preexistente” (Ausubel, p. 71).

> La adquisición de información nueva depende en alto grado de las ideas pertinentes que ya existen en la estructura cognitiva y el aprendizaje significativo de los seres humanos ocurre a través de una *interacción* de la nueva información con las ideas pertinentes que existen en la estructura cognitiva. El resultado de la intención

> que tiene lugar entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognitiva existente constituye una *asimilación* de significados nuevos y antiguos para formar una estructura cognitiva altamente diferenciada (Ausubel, pp. 70-71).

Ausubel ha introducido el término *inclusor* que define como las ideas o conceptos relevantes que posee el alumno en su estructura cognitiva y con los que relaciona la nueva información. El proceso de interacción entre el material recién aprendido y los conceptos existentes (inclusores) constituye el núcleo de la teoría de la asimilación (Novak, p. 79).

El proceso de asimilación se lleva a cabo mediante tres formas o modalidades diferentes:

Aprendizaje subordinado

La nueva idea o concepto se halla jerárquicamente subordinada a otra ya existente. Se produce cuando las nuevas ideas se relacionan subordinadamente con ideas relevantes (inclusores) de mayor nivel de abstracción, generalidad e inclusividad. Se genera, pues, una *diferenciación progresiva* de los conceptos existentes en varios de nivel inferior de abstracción. La subordinación de los conceptos puede hacerse sin que la nueva información modifique los atributos del concepto inclusor (son ejemplificaciones), ni cambie el significado de concepto inclusor.

En el proceso instruccional, la diferenciación progresiva consiste en partir de las ideas más generales para llegar a las más concretas, desglosando progresivamente los conceptos en subconceptos.

Aprendizaje supraordenado

El proceso es inverso al subordinado o proceso de diferenciación progresiva, en el que los conceptos relevantes (inclusores) existentes en la estructura cognitiva son de menor grado de abstracción, generalidad e inclusividad que los nuevos a aprender. Con la información adquirida, los conceptos ya existentes se reorganizan y adquieren nuevo significado. Suele ser un proceso que va de abajo-arriba y se produce una *reconciliación integradora* entre los rasgos o atributos de varios conceptos que da lugar a otro más general (supraordenado). Cuando se buscan diferencias, comparaciones y semejanzas entre los conceptos, se facilita esta reconciliación conceptual. Cuando un concepto se integra bien en otro concepto más general posee una **consonancia cognitiva o una reconciliación integradora**. Se obtiene una disonancia cognitiva (Festinger, 1957), cuando aparecen dos conceptos contradictorios o no integrados adecuadamente.

Aprendizaje combinatorio

Consiste en la relación, *de una forma general*, de nuevos conceptos con la estructura cognitiva ya existente, pero sin producirse la *inclusión* (subordinación o supraordenación). Se apoya en la búsqueda de elementos comunes entre las ideas, pero sin establecer relación de supra o subordinación.

Ausubel considera que la estructura cognitiva está organizada jerárquicamente respecto al nivel de abstracción, generalidad e inclusividad de las ideas o conceptos. En el aprendizaje subordinado y supraordenado existe una relación jerárquica, mientras que no se produce en el aprendizaje combinatorio.

LA COMPRENSIÓN DE SIGNIFICADOS

El aprendizaje significativo está relacionado con la comprensión de la **estructura** de la unidad temática de trabajo que el alumno adquiera, es decir, las ideas fundamentales y sus relaciones. Coincide con el planteamiento de Bruner para quien **comprender la estructura** significa aprender a relacionar los hechos, ideas y conceptos entre sí. En consecuencia, la función del aprendizaje es que los alumnos reconozcan y asimilen la **información básica** (estructura). El aprendizaje significativo, pues, es un aprendizaje **comprensivo**.

La comprensión depende del eficaz desarrollo y empleo de los conceptos. La formación o madurez congnitiva implica el uso de conceptos cada vez más abstractos, muchos de los cuales pueden definirse formalmente. La comprensión depende de la capacidad de tejer una red de interconexiones que relacione experiencias y conocimientos previos en cada nueva información o nuevas ideas que se presentan (Entwistle, N. 1988, pp. 45-46).

El aprendizaje significativo de cualquier información implica necesariamente *memorización comprensiva*, su ubicación o almacenamiento en cada red más o menos amplia de significados (Coll, p. 136). Este aprendizaje de estructuras conceptuales implica la comprensión de las mismas, que no puede obtenerse con el aprendizaje repetitivo-memorístico. Cuanto más amplia sea esta red de significados, la capacidad del alumno para establecer nuevas relaciones será mayor, generando, al mismo tiempo, nuevos significados.

Para Ausubel es posible identificar conceptos claves o ideas afianzadoras en cualquier tema y los profesores deberían asegurarse de que estos conceptos se trabajan seriamente, ya que constituyen una base firme para el aprendizaje posterior.

Considero interesante relacionar el aprendizaje comprensivo con las características que Marton señala para describir el enfoque profundo, superficial y estratégico del aprendizaje (Entwistle, 1988, pp. 64-67; Selmes, 1988, p. 31).

En el enfoque profundo, la intención del alumno se dirige a la *comprensión del significado* del tema de trabajo o de las tares a desarrollar, *establecer relaciones* con otros conocimientos y experiencias personales, y *analizar* los datos y conclusiones o extracción del significado de los materiales. Esto conlleva en el alumno una implicación e interés positivos, "una interacción vívida con el contenido del tema". En el enfoque superficial, la intención está centrada en el *cumplimiento de los requisitos* de las tareas, en la *memorización y reproducción* del contenido, hechos o ideas, por imposición externa. No hay implicación del alumno, sino pasividad en la realización de la tarea. Se trata de un aprendizaje mecánico y repetitivo (Entwistle, p. 65). Con el enfoque estratégico, el alumno pretende obtener *buenos resultados externos* (buenas calificaciones) y conoce los *requisitos, procedimientos de trabajo y sistemas de evaluación*. El alumno muestra una actitud más positiva que el enfoque superficial, pero no refleja las características del aprendizaje profundo (Entwistle, pp. 93-94).

Marton (Entwistle, p. 67) hace el siguiente resumen de las características principales de cada enfoque:

Enfoque profundo

- Intención de comprender
- Fuerte interacción con el contenido
- Relación de nuevas ideas con el conocimiento anterior
- Relación de conceptos con la experiencia cotidiana
- Relación de datos con conclusiones
- Examen de la lógica del argumento

Enfoque superficial

- Intención de cumplir los requisitos de la tarea
- Memorizar la información necesaria para pruebas o exámenes
- Encara la tarea como imposición externa
- Ausencia de reflexión acerca de propósitos o estrategia
- Foco en elementos sueltos sin integración
- No distingue principios a partir de ejemplos

Enfoque estratégico

- Intención de obtener notas lo más altas posible
- Uso de exámenes previos para predecir preguntas
- Atento a pistas acerca de esquemas de puntuación
- Organiza el tiempo y distribuye el esfuerzo para obtener mejores resultados
- Asegura materiales adecuados y condiciones de estudio

LOS ORGANIZADORES PREVIOS COMO PUENTES COGNITIVOS

El aprendizaje significativo se facilita con la utilización de los **organizadores previos**, definidos como, conceptos o ideas iniciales presentados como marcos de referencia de los nuevos conceptos y nuevas relaciones. De esta manera, los organizadores previos se convierten en *puentes cognitivos* entre los nuevos contenidos y la estructura cognitiva del alumno, que permiten un aprendizaje más eficaz.

Ofrecemos el siguiente esquema como una forma concreta para aplicar los organizadores previos en el aula.

Los organizadores presentan tres fases de actividad:

a) Presentación del organizador previo

b) Presentación de la tarea o material de aprendizaje

c) Potenciar la organización cognitiva. Esto prueba la relación existente entre el material de aprendizaje y las ideas existentes en el alumno

Presentación del organizador

Pueden utilizarse las siguientes actividades:

- Clarificación de los objetivos de la sesión de trabajo
- Presentación del organizador: dar algunas ideas o propiedades —dar ejemplos-aportar un contexto— recordar experiencias y conocimientos relevantes relacionados con la temática

Presentación del material de trabajo

Puede consistir en lo siguiente:

- Explicar la organización del trabajo
- Ordenar lógicamente el proceso de aprendizaje
- Presentar el material. El material puede ser: documentos informativos, películas, lecturas, experimentos... Es necesario que pueda establecerse una relación entre las distintas ideas

Potenciar la organización cognitiva

- Disponer de principios para hacer la reconciliación integradora
- Promover un aprendizaje de recepción activa
- Suscitar un enfoque crítico
- Explicaciones complementarias

El objetivo de esta fase es anclar el nuevo material en la estructura cognitiva ya existente. Entre las formas que tiene el profesor para facilitar la reconciliación del material nuevo con la estructura cognitiva están:

- Recordar ideas generales
- Preguntar acerca de las propiedades principales del nuevo material
- Preguntar sobre las discrepancias existentes en el material
- Describir las relaciones entre el material nuevo y el concepto o enunciado utilizado como organizador

Los profesores deben conocer la amplitud de capacidades cognitivas que pueden intentar desarrollar en sus alumnos; deben tener en cuenta la naturaleza activa e interactiva del conocimiento y de la comprensión y, en concreto, los factores que influyen en los procesos de un aprendizaje eficaz y significativo (Tomlinson, 1984, p. 173). Lo fundamental es la interacción significativa del alumno con la tarea, en lugar de una captación meramente superficial y repetitiva. El *enfoque exploratorio-colaborador* del alumno, según Barnes (Tomlinson, p. 173) depende de la naturaleza de la tarea en la que espera verse comprometido. La percepción que el alumno tiene de la tarea está muy influida, explícita o implícitamente, por la comunicación del profesor acerca de lo que desea enseñar, de la idea que se haya formado del alumno y de sus capacidades cognitivas. El profesor debe favorecer una actitud activa-exploratoria como vía para conseguir un aprendizaje significativo.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO DESDE LA EXPERIENCIA PERSONAL

En este apartado quisiera relacionar o complementar el planteamiento del aprendizaje significativo-cognitivo de Ausubel con la concepción humanista del aprendizaje significativo-experiencial de Rogers.

La situación de aprendizaje viene definida básicamente por sus componentes estructurales y la dinámica interactiva de los mismos. Entre los componentes de la situación tenemos que destacar al alumno, profesor, grupo de clase, centro o entorno y el contenido temático de la misma. La dinámica de la situación incluye las interacciones entre los distintos componentes que contribuyen a dar una configuración específica a la experiencia de aprendizaje. La implicación, en definitiva, del alumno será el indicador de la significatividad y calidad de la experiencia. Las situaciones de aprendizaje, siguiendo el pensamiento lewiniano, permiten desarrollar estructuras nuevas: nuevas opiniones, expectativas, patrones de conducta... y permiten comprender mejor la conducta del alumno. Al hablar del aprendizaje, no estamos pensando únicamente en el proceso de la información o conocimientos. Nos referimos a la construcción de toda la persona, dentro y fuera de la escuela. Es, por tanto, una concepción más global con incidencia en el trabajo en el aula, que se orienta, teniendo en cuenta el mundo del alumno, hacia un aprendizaje más experiencial, pues:

- La realidad no se define en términos "objetivos" físicos, sino en términos perceptivos y psicológicos subjetivos

- La realidad que uno puede conocer o trabajar es su propia interpretación de lo que es real

- La única realidad es lo que capta cada uno por los cinco sentidos y la manera como la comprende o interpreta

Para comprender la conducta del alumno-persona hay que distinguir la situación que ve el profesor o adulto y la que existe para el alumno, que constituye su espacio vital. La "objetividad" es la representación de la situación, tal como existe para el individuo en un momento determinado. Por consiguiente, un concepto clave para su comprensión es el de *percepción y proceso perceptivo*, ya que el comportamiento de las personas depende de estos tres elementos (Combs, 1979, p. 36):

- Cómo se ve la persona a sí misma

- Cómo ve las situaciones en las que está inmersa

- Las interrelaciones de estas dos percepciones

A través de este proceso perceptivo, la persona construye e interpreta los acontecimientos externos y las experiencias personales, que dan como resultado actitudes, valores y normas de actuación. Esto sería el significado verdadero de la experiencia de aprendizaje.

Dentro del aprendizaje significativo-cognitivo de Ausubel, existe una interacción entre un material o información nueva con la estructura cognitiva del individuo. La construcción de los significados, pues, es individual o idiosincrásica.

> La construcción de significados implica al alumno en su totalidad y no sólo en sus conocimientos previos y su capacidad para establecer relaciones sustantivas entre éstos y el nuevo material de aprendizaje o entre las diferentes partes del material de aprendizaje (Coll, p. 138).

Se plantea la vinculación del estilo cognitivo del alumno con la construcción de significados. Como dice Coll (p. 140):

> La idea esencial de la tesis constructivista que subyace al concepto de aprendizaje significativo es que el aprendizaje que lleva a cabo el alumno no puede entenderse únicamente a partir de un análisis externo y objetivo de lo que enseñamos y de cómo se lo enseñamos, sino que es necesario tener en cuenta, además, las interpretaciones subjetivas que el propio alumno construye a este respecto.

¿Qué es lo que aprendo? ¿Cómo lo aprendo? Lo interesante del aprendizaje es incorporar preferentemente cosas importantes que ejerzan influencia trascendente sobre la propia conducta, es decir, cosas que sean capaces de influir significativamente sobre la conducta. Una persona aprende significativamente aquellas cosas que percibe como vinculadas con la supervivencia o el desarrollo de la estructura de sí mismo (Rogers, 1957). La respuesta breve a la segunda pregunta es a través del aprendizaje autodescubierto y autoiniciado, que surge del análisis de las propias experiencias y de los propios interrogantes o necesidades. Este planteamiento resalta la comprensión de la experiencia como núcleo del aprendizaje. En ella está implicada la persona, ya que le provoca o puede provocar un cambio en la organización de sí mismo. Según perciba la experiencia surgen unos u otros pensamientos, sentimientos, actitudes y valores, que forman nuevos "constructos" (Kelly) de la personalidad.

Señalamos tres características del aprendizaje significativo-experiencial:

1. *Apertura a la experiencia*: El individuo adquiere su capacidad de escucha a sí mismo y de experimentar lo que ocurre en su interior. Se abre a los sentimientos de miedo, desaliento, dolor, coraje, ternura... Experimenta mayor confianza en su organismo, como medio para alcanzar la conducta más satisfactoria en cada situación existencial. "El individuo es libre de convertirse en sí mismo, ocultarse tras un disfraz, de progresar o regresar, de

comportarse de maneras destructivas para él y los demás o de maneras que aumenten su valor" (Rogers, 1972).

2. *Cambio de comportamiento*: La persona con su estructura y organización del "self", percibe una situación que le conducirá a un cambio. Se establece un enfrentamiento rígido ante el hecho amenazador y una distensión ante la aceptación de su incorporación. El hecho educativo puede presentarse o percibirse como ayuda al progreso de sí mismo o como amenaza de algún valor con el que el Yo está identificado. La educación implica un crecimiento permanente, ya que el individuo vive continuamente experiencias nuevas que tiene que incorporar a su Yo.

3. *Descubrimiento y comprensión*: El aprendizaje supone un descubrimiento y comprensión del mundo exterior, y la incorporación a sí mismo, es decir, un aprendizaje significativo, que responde a las necesidades e intereses del alumno.

El aprendizaje significativo experiencial es un aprendizaje centrado en el alumno como persona total. Pretende,

> liberar la curiosidad, permitir que las personas evolucionen según sus propios intereses, desatar el sentido de la indagación, abrir todo a la pregunta y a la exploración, reconocer que todo está en proceso de cambio, aunque nunca lo logre de manera total... (Rogers, 1977, p. 90).

Desde mi punto de vista, existen bastantes coincidencias, aunque el referente del discurso teórico de ambos es diferente. En Ausubel, la construcción de la persona tiene como núcleo dinamizador la estructura cognitiva, en que intervienen los componentes afectivo-sociales, mientras que Rogers tiene como elemento configurador-base la percepción interpretativa-afectiva, sin olvidar los componentes cognitivo-sociales. Se puede concluir, pues, que el ámbito del proceso de aprendizaje en el aula debe tener como referente a la persona-alumno en su totalidad: cognitividad, afectividad y sociabilidad.

Tomado de: *Mapas Conceptuales. Una técnica para aprender*, Narcea, Madrid, 1992.

BIBLIOGRAFÍA

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D. y HANESIAN, H. (1989). *Psicología educativa*, Trillas. México.

COLL, C. (1987). *Psicología y currículum.* Laia. Barcelona.
— (comp.) (1983). *Psicología genética y aprendizajes escolares*. Siglo XXI. Madrid.
— (1990). *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. Paidós. Barcelona.

COLL, C., y otros. (1988). *El marco curricular en una escuela renovada*. M.E.C./Popular. Madrid.
— (1990). Desarrollo psicológico y educación (3 t.). Alianza. Madrid.

COMBS, A., y otros (1979). *Claves para la formación de los profesores. Un enfoque humanista.* E.M.E.S.A. Madrid.

ENTWISTLE, N. (1988). *La comprensión del aprendizaje en el aula*. Paidós/M.E.C. Barcelona.

JOYCE, B. y WEILL, M. (1985). *Modelos de enseñanza*. Anaya. Madrid.

NOVAK, J. D. (1982). *Teoría y práctica de la educación*. Alianza. Madrid.

NOVAK, J. D. y GOWN, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Martínez Roca. Barcelona.

POZO, J. I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Morata. Madrid.

ROGERS, C. (1977). *Libertad y creatividad en educación*. Paidós. Buenos Aires.
— (1977). *El proceso de convertirse en persona*. Paidós. Buenos Aires.

CRÉDITOS DE ILUSTRACIONES

Las ilustraciones para las viñetas decorativas fueron tomadas de:

GIMFERRER, PERE. (1983). *Max Ernst*. Ediciones Polígrafa. Barcelona , España.

WALTER ERBEN; TASCHEN, BENEDIKT. (1993). *Miró.* Ingo. F. Walther. Munich, Germany.

BAYER, HERBERT; GROPIUS, WALTER; GROPIUS, ISE. (1990). *Bauhouse 1919-1928* . The Museum of Modern Art. New York.

SCHMALENBACH, WERNER. (1990). *Masterpieces of 20th Century Art.* Prestel-Verlag. Munich, Germany.

LOZANO FUENTES, JOSÉ MANUEL. (1990). *Historia del Arte.* Editorial Continental. México.

DÜCHTING, HAJO. (1993). *Wassily Kandinsky 1866-1944, A Revolution of Painting.* Benedikt Taschen. Germany.

INBA (1994). *Remedios Varo*. Museo de Arte Moderno. México.

FUENTE DE LA, BEATRIZ. (1989). *Peldaños en la Conciencia.* UNAM. México.

MOTHERWELL, ROBERT. (1981). *The Dada Painters and Poets*. Belknap Harvard. USA.

GÓMEZ DE LIAÑO, IGNACIO. (1992). *Dalí*. Ediciones Polígrafa. Barcelona, España.

VALDIOSERA BERMAN, RAMÓN. (1988). *Francisco Eppens*. UNAM. México.

MUNARI, BRUNO. (1987). *Diseño y Comunicación Visual*. Gustavo Gili. Barcelona, España.

KANDINSKY, VASSILY. (1988). *Punto y línea sobre el Plano*. Dremia. México.

MOURE, GLORIA. (1988). *Marcel Duchamp*. Ediciones Polígrafa. Barcelona, España.

DONDIS, D.A. (1990). *La Sintáxis de la Imagen*. Gustavo Gili. Barcelona, España.

WONG, WUCIUS. (1989). *Fundamentos del diseño bi y tri-dimensional.* Gustavo Gili. Barcelona, España.

ARCHIV, BAUHAUS; DROSTE, MAGDALENA. (1990). *Bauhaus 1919-1933.* Editorial Benedikt Taschen. Germany.

BISCHOFF, ULRICH. (1994). *Max Ernst 1891-1976.* Editorial Benedikt Taschen. Germany.