La puerta equivocada

ADRIÁN PAENZA

La puerta equivocada

SUDAMERICANA

La puerta equivocada.indd 5 22/08/14 08:24

Paenza, Adrián
La puerta equivocada - 1ª ed. - Buenos Aires :
Sudamericana, 2014.
384 p. ; 22x15 cm. (Obras Diversas)

ISBN 978-950-07-4926-8

1. Matemática. I. Título
CDD 510

IMPRESO EN LA ARGENTINA

Queda hecho el depósito
que previene la ley 11.723.

www.megustaleer.com.ar

ISBN 978-950-07-4926-8

Esta edición de 8.000 ejemplares se terminó de imprimir en Printing Books S.A., Mario Bravo 835, Avellaneda, Buenos Aires, en el mes de septiembre de 2014.

Dedicatorias

A mis padres, Fruma y Ernesto. Todo lo que soy se lo debo a ellos dos.

A mi hermana Laura y a mi cuñado Daniel.

A todos mis sobrinos: Lorena, Alejandro, Máximo, Andrea, Ignacio, Paula, Santiago, Lucio, Matías, Lucas, Brenda, Miguelito, Viviana, Ulises, Diego, Sabina, Max, Amanda, Whitney, Jason, Landon, Anderson, Griffin, Ellie, María José, Gabriel, Mía, Valentín, Dante, Nicola y Luca.

A Carlos Griguol y León Najnudel, dos faros en mi vida.

A mis amigos Miguel Davidson, Leonardo Peskin, Miguel Ángel Fernández, Héctor Maguregui, Cristian Czúbara, Alberto Kornblihtt, Lawrence Kreiter, Gary Crotts, Dennis Fugh, Kevin Bryson, Claudio Martínez, Alejandro Fabbri, Víctor Marchesini, Luis Bonini, Fernando Pacini, Andrés Nocioni, Emanuel Ginóbili, Luis Scola, Gerardo Garbulsky, Marcos Salt, Santiago Segurola, Pep Guardiola, Julio Bruetman, Diego Golombek, Ariel Hassan, Woody González, Craig Rogers y Keith Morris.

A mis amigas Ana María D'Alessio, Nilda Rozenfeld, Teresa Reinés, Beatriz de Nava, Beatriz Suárez, Nora Bernárdez, Karina Marchesini, Laura Bracalenti, Etel Novacovsky, Alicia Dickenstein, Erica Kreiter, Betty Cooper, Kim Crotts, Julie Crotts, Marisa Giménez, Norma Galletti, Carmen Sessa, Many Oroño, Carina

Maguregui, Marcela Smetanka, Mónica Müller, María Marta García Scarano, Mariana Salt, Nora Bar y Marisa Pombo.

A la memoria de los seres queridos que perdí en el camino: Guido Peskin, mis tías Delia, Elena, Miriam, Ñata y Elenita; a mi tío Saúl; a Noemí Cuño, Manny Kreiter, Lola Bryson, Vivian Crotts y mi primo Ricardo. Y a la memoria también de mi querido Jorge Guinzburg.

Y quiero agregar un nombre más, tremendo: María Soledad Fernández. Una vez más se subvierte el orden y un padre/madre termina enterrando a un hijo. Soledad no llegó a cumplir 27 años. Murió al salir despedida de un auto embestido desde atrás cerca de Belo Horizonte en julio de 2014. Una pérdida irreparable...

Para terminar, mi gratitud infinita para los cuatro guías éticos de mi vida: Marcelo Bielsa, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky.

Agradecimientos

Empiezo por Claudio Martínez, porque ése es uno de los regalos que me hizo la vida: conocer a una persona increíble, generosa, creativa, humilde como los verdaderos 'grandes', sonriente, alguien que lidera sin levantar la voz, sin prepotencias ni abusos de autoridad. Trabajar con Claudio es un verdadero lujo, tanto que me hace dudar si usar la palabra 'trabajar'. Hace dieciséis años que juntos elaboramos emprendimientos, aventuras, proyectos, locuras. Con Claudio trabajar es vivir... y disfrutar. Para él, mi gratitud eterna.

Sigo con una lista de quienes tienen un impacto muy fuerte sobre mi vida, personal y profesional:

A María Marta García Scarano, Woody González y Ariel Hassan, la parte central del equipo que produce *Alterados por Pi*. Las ideas surgen en charlas con ellos. Me arropan, me cuidan, me 'miman'... gracias a los tres.

A Tristán Bauer, Verónica Fiorito y Martín Bonavetti, por las puertas que me abren *siempre* en la Televisión Pública.

A Lino Barañao, Jorge Aliaga y Javier Grossman, tres personas imprescindibles en cualquier tarea de gestión que involucre a la ciencia.

A Ernesto Tiffenberg, Hugo Soriani y Jorge Prim, porque saben lo que significa para mí formar parte del grupo de periodistas que trabaja en *Página/12* y me acompañan en esta locura de difusión de la matemática.

A Edy Gerber, Betina Rodríguez, Gabriel Díaz, Laura Cukierman, Ezequiel Rodríguez, Elizabeth Alegre, Claudia Eiberman, Paola Russo, Mario Buoco, Valeria Trevisán, Alejandro Burlaka, Dolores Bosch, Paola Campodónico y en particular a Aldo Fernández, por todo lo que hacen por mí dentro de El Oso Producciones y en *Científicos Industria Argentina*: ¡ya llevamos casi trece años en el aire... increíble!

A Diego Golombek y Carlos Díaz, los que iniciaron esta aventura de publicar libros de divulgación de matemática, lo mismo que a Violeta Collado, Héctor Benedetti y Laura Campagna componentes centrales del grupo de gente que *hace* la Editorial Siglo XXI.

A mi querido Miguel Rep, genial dibujante y amigo personal.

A Pablo Coll, Juan Pablo Pinasco, Ariel Arbiser, Matías Graña, Gerry Garbulsky, Cristian Czúbara, Pablo Milrud, Gabriela Jerónimo, Laura Dóbalo, Laura Pezzati y León Braunstein, inagotables fuentes de ideas.

A todos mis compañeros y amigos en los distintos lugares en donde trabajo: Canal 7, Canal Encuentro, Canal Tecnópolis y la feria que lleva el mismo nombre, La Brújula, El Oso, Canal Paka-Paka, y muy especialmente, *Página/12*.

A Enzo Gentile, Luis Santaló, Angel Larotonda, Eduardo Dubuc y como siempre, en forma muy especial a mi querido Miguel Herrera, por todo lo que hicieron por mi formación matemática: son/fueron, mis cinco maestros.

A Carmen Sessa, Alicia Dickenstein, Nestor Búcari, Ricardo Noriega, Carlos Sánchez, Malena Becker, Cristina López, Oscar Bruno, Leandro Caniglia, Pablo Calderón, Ricardo Durán, Noemí Wolanski, Jorge Zilber, Fernando Cukierman, Matías Graña y Teresa Krick, mis compañeros de toda la vida en Exactas (UBA), y Baldomero Rubio Segovia de la Universidad Complutense de Madrid.

A todos mis alumnos, de quienes inexorablemente terminé aprendiendo algo, porque con ellos me vi forzado a tratar de entender de lo que hablaba.

A Glenda Vieites, otro *lujo*, editora de Penguin Random House y una *locomotora que sonríe*. Encima, hace todo con eficiencia. Igualmente, mi gratitud para todo el grupo que me protege allí: Verónica Larrea, Daniela Morel, Mariana Creo y Lucrecia Rampoldi.

A mi querido Juan Ignacio Boido, ya en su segundo año como director editorial.

A mi agente literario, Guillermo Schavelzon, otro hallazgo. Sus contribuciones a mejorar mi calidad de vida no se pueden explicar en un par de líneas.

Quiero dedicar algunos párrafos a un grupo muy particular: "los *betatesters*". Ellos son los que leen los textos con minuciosidad, no sólo desde el punto de vista matemático, sino también el literario. Me quiero referir específicamente a cuatro personas: Carlos D'Andrea, Juan Sabia, Carlos Sarraute y Manu Ginóbili. Aunque ellos no lo sepan, aunque no se vean ni se conozcan ni se comuniquen entre ellos, aunque yo sea el único vértice común, los cinco formamos un verdadero equipo. Yo pongo la cara pero ellos son el corazón, el cerebro y el motor que nos hace funcionar.

Carlos D'Andrea es doctor en matemática y profesor en la Universidad de Barcelona. Es la *única* persona que cumplió esta función (la de *betatester*) desde que escribí el primer texto en el año 2004. Es decir, Carlos leyó *todo*. No sólo se ha ocupado de discutir los contenidos, de cuestionar mis soluciones, de observarme potenciales repeticiones en los tópicos, sino también de cuidar mi *estilo literario* y el uso de ciertas palabras. Sus aportes han sido *esenciales* y así como lo escribo acá, se lo digo personalmente: es una suerte para mí que él exista. D'Andrea es uno de los matemáticos más importantes que tiene la Argentina hoy y me sería muy difícil describir todo lo que *aprendí* leyendo las observaciones que me fue entregando sistemáticamente. Es un amigo entrañable y alguien que se ha puesto la camiseta desde el día cero y tomó estos temas de divulgación de la matemática como una cruzada propia.

Juan Sabia también es doctor en matemática y otro quien leyó todas las historias. Juan es amigo personal, profesor responsable del área de matemática del CBC, y además es *escritor*. Juan escribe libros de cuentos para niños que son maravillosos. Si usted se propone leer el libro que tiene en la mano, tendrá oportunidad de detectar todo lo que me aportó Juan. Curiosamente, del grupo de *betatesters*, es el único que no me corrige la forma en la que escribo sino que me propone soluciones alternativas que siempre... *siempre* son mucho mejores que las que yo sugiero. Otro imprescindible para que esta saga de libros de divulgación matemática siga existiendo.

El más joven de todos es Carlos Sarraute. Carlos es licenciado en matemática y doctor en ingeniería informática. No trabaja en la academia sino que dirige el equipo de investigación en la empresa privada Grandata. Se ocupa de resolver problemas concretos que plantea la vida cotidiana. Mientras tanto y en sus ratos *libres*, piensa *todos* los problemas que yo propongo en el libro pero con una diferencia respecto del resto: él no quiere leer *mis* soluciones. Los resuelve *todos* por su propia cuenta y escribe una suerte de *libro paralelo*. Varias historias que aparecen en el texto tienen impresas sus huellas por todos lados. Los ángulos desde los cuales él observa lo que yo escribo son totalmente inexplorados para mí. Las historias sobre las 'Figuritas' e 'Hinchas de Boca' son inspiradas por él. Para resumir, Carlos es quien mejor representa el *siglo XXI* dentro del libro, y desde que lo tuve como alumno en Álgebra I, no deja de sorprenderme.

Lo de Manu es difícil de describir en un párrafo, pero lo intento: las tres personas que figuran anteriormente mencionadas son matemáticos, egresados universitarios. Manu, no. Manu representa la oportunidad de analizar los problemas con un amigo que no viene del mundo académico. Manu es lo que yo imagino como un lector curioso, interesado, apasionado por descubrir. Quizás usted, mientras está leyendo este texto, piense que estoy exagerando o distorsionando la realidad: no es así. Manu lee *todos* los textos, piensa cada problema y sé que lo hace o bien de noche, tarde, después de algún partido o bien en el avión viajando con sus compañeros dentro de los Estados Unidos, mientras otros escuchan música o ven películas... o duermen. Y se siente con la libertad de decirme: "Adrián, pensé el problema mucho tiempo y no se me ocurre nada... ¿no será muy difícil?", o bien, "Cuando leí que había que transformar los números al sistema binario, recién allí me di cuenta de lo que tenía que hacer". En marzo de 2014, en el lugar de entrenamiento del equipo de San Antonio (que luego saldría campeón), Manu me presentó a la persona responsable de analizar las estadísticas del equipo, y él, como algunos jugadores (Matt Bonner, Boris Diaw, Patty Mills, Tiago Splitter), se mostraron fuertemente interesados en los problemas que aparecen en los distintos libros. Los aportes de Manu son siempre muy buenos, y sus cuestionamientos, también. Si sigue leyendo, los encontrará esparcidos en el texto.

Prólogo

Este libro es un libro de cuentos. Sí, cuentos. Cuentos de magos, de aviones que no se caen, de autos que van muy rápido por la ruta. Cuentos sobre chocolate, sobre viajes de caballos en un tablero de ajedrez, de estrategias, de sorpresas. Cuentos sobre la escoba de quince o el juego del diez mil.

Algunos están más ligados con la vida cotidiana: ¿cuánto dinero tiene que invertir un padre si quiere ayudar a su hijo a comprar figuritas con jugadores de fútbol que le permitan llenar un álbum? Y si uno está en un supermercado y hay varias cajas, ¿por qué las de al lado se mueven *siempre* más rápido que la que eligió uno? O al menos, eso es lo que parece, ¿no? Y no me va a decir que nunca se preguntó cómo puede ser que consultando *nada más* que a mil personas uno puede inferir quién va a ser el futuro presidente elegido por más de 30 millones de personas. ¿Cómo saben? ¿Cómo se hace? ¿Será igual que para medir los ratings de televisión?

Por otro lado, tengo un cuento que habla sobre cuán seguros son los aviones y cuán improbable es que haya un accidente. ¿Cambiaron las estadísticas con el tiempo? ¿Y cómo serán en el futuro? Y si uno pudiera optar para unir los puntos A y B usando un auto, un tren o un avión, ¿*siempre* conviene ir en avión?

En este siglo *explotaron* los teléfonos inteligentes (todavía llamados *celulares*). Es que además de comunicarnos cumplen muchísimas otras funciones. Por ejemplo, si uno recolectara *toda* la información que proveen estas *mini computadoras*, ¿se podrán usar para saber qué hacer frente a un incendio, a una epidemia o algún otro tipo de catástrofe natural? ¿Podrá la sociedad tomar mejores decisiones sobre qué hacer, hacia dónde ir o cómo ayudar?

Hoy tenemos datos sobre *casi* todo; ayudan a elegir qué droga tomar, por cuánto tiempo, quién fue el autor de un crimen, quién es el padre de una criatura o si una joven está embarazada... Está todo bien pero, ¿qué son los *falsos positivos*? ¿Cómo intervienen en la vida diaria? ¿Se aplican solamente para detectar enfermedades? ¿No se correrá el riesgo de encarcelar a un inocente, por ejemplo?

Por otro lado, los humanos desarrollamos una fuerte capacidad para *intuir*. Uno llega a un lugar y en pocos segundos *ya cree que tiene una decisión tomada sobre lo que está pasando*..., pero... ¿está bien esto? ¿Intuimos bien? ¿Cuán falibles somos? La matemática tiene muchas cosas para aportar. Algunos cuentos que encontrará en este libro, servirán para exhibirnos *falibles*, *equivocados* y hasta *arrogantes*. Más aún: en situaciones tan ingenuas como un juego de cartas o estimaciones sobre la probabilidad de que un hecho haya sucedido o no, aparecemos desconcertados porque lo que uno *sospecha* que pasa, ¡en realidad no pasa... ni pasó nunca!

En un libro de estas características, no puede faltar un capítulo específico dedicado a analizar deportes y juegos. Por eso, incluí algunos cuentos que hablan del famoso "piedra, papel o tijera", la "escoba de quince" o incluso el "juego del diez mil". ¿Jugó alguna vez al 10 mil? Un día me llamó Manu Ginóbili desde Bahía Blanca para decirme que estaba con unos amigos jugando y quería saber cuál era la probabilidad de *ganar*... o incluso de *perder*. Y jugaban por el *honor*, no por dinero. ¿En qué momentos conviene *plantarse* y en cuáles conviene *seguir* agitando el cubilete? Y para no ser menos, le sugiero que no se pierda en analizar el problema que me planteó Luis Scola, el capitán histórico del equipo argentino de básquet. Si le es posible, piénselo a solas y trate de resolverlo sin mirar la respuesta. Dedíquele un rato y apostaría que se va a sorprender.

Y por supuesto, hay cuentos que involucran a magos y sombreros (son clásicos, así que *tengo* que incluirlos). Pero hay uno especial dedicado al Ta-Te-Tí... Sí, al Ta-Te-Tí. Por ejemplo, si yo interrumpiera una partida que están jugando dos personas y le mostrara el tablero a usted: ¿podría deducir qué pasó hasta allí? Es decir, ¿podría reproducir usted cómo fue que llegaron hasta esa situación? ¿Quién empezó jugando? Si fuera un juego de ajedrez, sería equivalente a que yo le preguntara quién de los dos está jugando con las piezas blancas. Usted podría preguntarme: ¿y para qué me serviría a mí hacer *todas* esas deducciones? Vea, le serviría para mejorar su capacidad de elaboración, de argumentación, hilvanar argumentos lógicos, optar sobre posibles caminos. En sí mismo, es poco probable que usted se vea enfrentada/enfrentado a un problema de estas características, pero cuanto mejor preparación tenga, cuantas más veces haya recorrido caminos de este tipo, mejor se sentirá cuando se tenga que enfrentar con uno nuevo, ¿no es así?

Voy a aprovechar también para presentarle a un primo del Sudoku; no sé si usted juega al Sudoku, pero en cualquier caso descubrirá que conocer a este *pariente* le permitirá exhibir y potenciar su capacidad para razonar.

Hay un cuento que la/lo invita a ponerse en el papel de árbitro de fútbol en un partido (imaginario) entre River y Boca. La pelota salió de la cancha por la línea de fondo. ¿Qué tiene que *cobrar* el árbitro: córner o saque de arco? Si él no vio bien la jugada y se tiene que basar en lo que le dicen los jugadores, ¿puede confiar en que lo que le están diciendo es cierto?

Además, le voy a proponer que me acompañe en un cuento que involucra a dos sabios que quedan confinados en un castillo con dos torres, aislados y con poca información. ¿Cómo hacer para usar las pocas señales que tienen para *urdir una fuga*?

Tengo otra pregunta: ¿cuán capaz es usted en elegir una *clave* o *contraseña* de manera tal que sea lo más *segura* posible y que usted la pueda recordar sin tener que anotarla en un papel? ¿Se puede? ¿Servirá esto para cajas de seguridad o para cuentas de correo electrónico, por ejemplo?

También tengo un cuento que involucra el *pensamiento lateral*. ¿No le fascina enfrentarse con un problema que requiere que usted use las herramientas que tiene pero de forma *distinta*? A nadie se le ocurriría clavar un clavo con un destornillador, ¿no? Pero hay veces en que uno tiene una caja de herramientas y quiere forzar el uso en forma inadecuada. ¿Y si uno *pensara distinto*? En definitiva, se trata de resolver un problema, ¿qué importancia tiene *el cómo* en la medida que usted pueda encontrar la solución?

Creo que de eso se trata este libro: es un libro de cuentos, de historias, de magos y de personas que nos dejamos seducir, de juegos, magnates, tortugas, liebres, mayordomos, figuritas, bolitas, sombreros, caballos, pergaminos, barras de chocolate, contraseñas, cubiletes, cartas, dados, monedas de oro, escobas de 15, fútbol, sudokus, aviones y autos... La lista podría seguir, pero prefiero parar acá.

Como decía al principio, este es un libro de cuentos, es un libro de matemática, es un libro de cuentos de matemática recreativa... o lo que es lo mismo, es un libro con el que me propuse invitarla/lo a pensar, entretenerse, divertirse y educarse... todo al mismo tiempo. Eso es lo que provee la matemática: no conozco mejor combinación. Y si no me cree, pase... *y vea*, o mejor dicho, pase... *y lea*.

1. MATEMÁTICA EN LA VIDA COTIDIANA

Figuritas

El 17 de junio de este año, cinco días después de la inauguración del Mundial en Brasil, recibí un mail de mi querido amigo y ex alumno Carlos Sarraute. Creo que vale la pena que lo lea con atención: "Te cuento un problema que tiene desvelados a los padres de niños en edad escolar en estos días: ¿cuántas figuritas hay que comprar para completar el álbum del Mundial? ¿Y cuánta plata termina saliendo? Las figuritas se venden en paquetes de cinco pero, simplificando, el problema se podría plantear así: suponiendo que las figuritas se compran de a una, que vienen distribuidas al azar (uniformemente), y que el álbum tiene lugar para 600 figuritas (en realidad son 639)... si uno no intercambia figuritas, ¿cuál es la cantidad de figuritas que hay que comprar para llenar el álbum?".

Acá paro. Desde niño siempre tuve una pasión particular por el tema de las figuritas. En alguna parte tengo todavía los álbumes que fui coleccionando pero, curiosamente, ¡nunca pude completar ninguno! Más allá de que me digan que ahora eso no sucede, que las figuritas se imprimen todas por igual, que las planchas reproducen las caras de todos los jugadores uniformemente, que no hay preferencias, que no hay jugadores 'distinguidos' (para que salgan más o salgan menos), me cuesta trabajo imaginarme que sea cierto... pero, como no conozco el tema, quiero hacer de cuenta que eso no sucede más.

Lo que sí puedo garantizar es que cuando yo era niño (sí, ya sé, hace tanto tiempo que la gente tenía que 'saltar' por la calle porque la Tierra aún estaba caliente...), seguro que había figuritas difíciles. Recuerdo dos casos en particular: uno fue el de José Manuel Ramos Delgado, 'zaguero' derecho de Lanús (y de River y del Santos de Brasil, compañero de Pelé en algún momento, y del seleccionado argentino), y el de Julio San Lorenzo (ex jugador de Nueva Chicago, Racing y que también jugó en Banfield). Sus figuritas fueron imposibles. No sólo eso: creo que una vez vi una de Ramos Delgado, pero de San Lorenzo, no... nunca. Y es por eso que nunca pude terminar ese álbum. Y como ese ejemplo, estoy seguro de que cada uno que se haya acercado al fútbol de alguna manera tiene su propia anécdota para contar. Tanto debe ser así que, si no, el dicho 'figurita difícil' no tendría sentido de existir.

Por otro lado, no sé cuán popular se hizo el caso de un jugador de Costa Rica que está participando de este Mundial, Joel Campbell, quien se compró 100 paquetes (de cinco figuritas cada uno) para poder 'tenerse a sí mismo', pero ¡no tuvo suerte! Si bien en total son 639 jugadores, teniendo 500 de una sola vez Campbell pretendió aumentar muchísimo su probabilidad de conseguir la propia, pero no lo logró.

Ahora, quiero volver al problema. Antes de avanzar con la cuenta, me interesa hacerle a usted una pregunta: si uno se decidiera a no cambiar figuritas con sus amigos, no recurrir a una plaza un sábado por la tarde o domingo por la mañana o a Facebook o fijarse en las páginas de internet para encontrar personas que, como usted, están buscando conseguirlas todas... Sólo imagine que usted tiene el dinero suficiente como para comprar un número grande de paquetes: ¿cuántas figuritas —o paquetes— estima que tendría que conseguir para poder llenar el álbum?

Es importante el detalle de no intercambiar figuritas con nadie, porque mi objetivo es 'cuantificar en dinero' lo que hay que invertir para tener una esperanza razonable de completar el álbum.

Antes de avanzar con la cuenta, necesito que usted y yo establezcamos un acuerdo: quiero hacerle acá un par de preguntas. Como usted no está conmigo para contestarlas, lo voy a hacer como si estuviéramos juntos, pero le pido que no avance en la lectura si no está satisfecho con las respuestas que usted 'me dio'. Acá voy.

En principio, si fuéramos a tirar una moneda al aire, ¿cuántas veces cree usted que deberíamos arrojarla para tener una buena expectativa de que salga cara? Naturalmente, no hay garantías de que salga cara aun tirándola cien veces, porque podría darse una secuencia de cien 'cecas' consecutivas; pero la pregunta apunta hacia lo que podríamos 'aspirar' o 'esperar' que suceda. La/lo dejo pensando por un momento.

Sigo yo: creo que escuché que me decía que 'con dos tiros' deberíamos estar contentos, porque como hay dos 'lados posibles' (cara y ceca), y la probabilidad es 1/2 en cada caso, entonces, si la arrojamos al aire dos veces, entonces podríamos imaginar que una de las veces salió cara.

De la misma forma, si tuviéramos un dado, la probabilidad de que salga —por ejemplo— un cuatro es 1/6. En realidad, la probabilidad de que salga cualquier número es 1/6, no importa cuál sea. Entonces, vuelvo a hacerle la misma pregunta, pero referida a un dado: ¿cuántas veces habrá que tirar el dado para sentirnos más o menos cómodos de que tenemos una buena posibilidad de que el número que hemos elegido 'salga'?

¿Cómo dijo? No escuché bien... ah, sí, tiene razón: seis veces. Uno tiene 'derecho' a esperar que si tira un dado seis veces, una de esas veces el lado del dado que aparece sea un cuatro.

Una observación más que voy a necesitar un poquito más adelante. Como usted advierte, cuando la probabilidad (en el caso de la moneda) era de 1/2, me alcanza con tirar dos veces la moneda al aire, y no sé si usted prestó atención pero se puede hacer esta cuenta:

$$1/(1/2) = 2$$

¿Por qué hice esa cuenta? Para mostrarle que si la probabilidad es 1/2, la cantidad de veces que tengo que tirar la moneda es uno dividido por esa probabilidad. En el caso del dado, la probabilidad de que salga un cuatro es 1/6. Usted estuvo de acuerdo conmigo en que había que tirar el dado seis veces para estar confiados de que nos va a salir un cuatro. Ahora, le sugiero que piense conmigo: si uno hace uno dividido por la probabilidad de que salga un cuatro, resulta ser:

$$1/(1/6) = 6$$

Es decir, en ambos casos sucede algo curioso: cuando uno quiere saber cuántas veces tiene que tirar la moneda o el dado, lo que tiene que hacer es la siguiente cuenta: uno dividido por la probabilidad de que suceda lo que quiero. Recuerde este hecho porque lo voy a usar casi en forma inmediata.

Quiero ahora empezar con el caso de las figuritas. Para hacer las cuentas más fáciles voy a suponer que en lugar de venderse en paquetes de cinco se venden por unidad, y en lugar de valer cinco pesos por paquete vale un peso cada figurita. Está claro que estoy modificando la realidad, pero a los efectos de lo que quiero hacer, eso resulta irrelevante.

Sigo. En principio, supongamos que en lugar de haber 639 figuritas en el álbum hubiera nada más que tres. Estamos por empezar a comprar figuritas y queremos estimar cuánto dinero nos hará falta invertir para completar un álbum de tres figuritas. Si compro la primera figurita, seguro que 'no la tengo', por lo que la probabilidad de que la pegue en el álbum es uno o, lo que es lo mismo, un ciento por ciento. Es decir, un peso tendré que invertir seguro para la primera figurita.

Continuemos. Una vez que pegué la primera figurita, me faltan dos para completar el álbum. Si yo comprara una figurita solamente, ¿cuál es la probabilidad que sea una de las dos que me falta? La probabilidad es 2/3, porque de las tres posibles, dos me vienen bien. Es decir en dos casos sobre tres posibles obtendría una figurita que me sirve y es por eso que la probabilidad es 2/3. Ahora quiero usar lo que le pedí que recordara: para saber cuántas veces tenía que tirar la moneda al aire o arrojar el dado, lo que había que hacer es uno dividido la probabilidad. En el caso de las figuritas, como la probabilidad de que salga una de las dos que quiero es 2/3, entonces el número de figuritas que tengo que comprar se calcula como:

$$1/(2/3) = 3/2 = 1{,}5$$

O sea, hasta acá tuve que comprar una figurita (cuando no tenía ninguna en el álbum), ahora tengo que comprar 1,5 más. Para terminar, me falta una figurita (porque se supone que ya pegué dos). ¿Cuál es la probabilidad de que me salga si compro un paquete? Esa probabilidad ahora es 1/3, porque sobre las tres figuritas que pueden aparecer, me sirve solamente una. Como antes, ¿cuántas figuritas (o paquetes) tengo que comprar? Pues bien, tengo que dividir:

$$1/(1/3) = 3$$

Es decir, que ahora tengo que comprar tres figuritas más. Juntando todo, tuve que comprar: 1 + 1,5 + 3 = 5,5 figuritas (si esto fuera posible, porque uno no puede comprar media figurita).

Ahora, con la misma idea, volvamos a la realidad de las 639 figuritas. La cuenta que hay que hacer para saber cuántas figuritas tengo que comprar para llenar el álbum se hace de la siguiente forma:

$$639/639 + 639/638 + 639/637 + \ldots 639/3 + 639/2 + 639/1 = 4.497{,}21 \text{ figuritas}$$

Este dato es muy interesante, porque entonces uno deduce que si cada figurita cuesta un peso, el dinero que hay que invertir —sin intercambiar figuritas con nadie— es de casi 4.500 pesos para llenar el álbum. ¿Sabrán los chicos lo que cuesta? Mejor aún: ¿sabía usted cuánto dinero hay en juego cuando uno habla de algo tan inofensivo como un álbum de figuritas?

No sé cuánto le importa a usted ni cuán significativo es para los niños, pero sí estoy seguro de que la compañía que los imprime hizo bien los deberes y tooooodos los cálculos, sin ninguna duda.

El peso de un toro

El 29 de febrero del 2012, estaba sentado en Long Beach, California, en el salón en donde se realiza la convención anual de TED[1]. Imagine un auditorio con más de 1.500 personas reunidas con la idea de *dejarse sorprender*. Digo esto porque no son conferencias comunes en las que alguien habla y otros escuchan. Acá quienes hablan cuentan con muy poco tiempo (a lo sumo 18 minutos) y su objetivo central es *cautivar* a quienes tienen enfrente. No es fácil. No es fácil ser creativo. Decir algo nuevo, atractivo, seductor e ingenioso. Y en tan poco tiempo.

Los conferencistas vienen desde todas partes del mundo y ser elegido para hablar allí es ciertamente una distinción. En una de las sesiones de la tarde Chris Anderson, el *curador* de estas reuniones, invitó al estrado a un señor que llegaba desde Israel.

---

1. TED (Technology, Entertainment, Design) es una organización sin fines de lucro liderada por Chris Anderson. Desde el año 1984 se realizan convenciones anuales donde personalidades de distintas partes del mundo exponen sus ideas en charlas de no más de 18 minutos. Desde el año 2009, se organizan versiones locales en distintas ciudades del mundo. Los videos de las conferencias pueden verse en forma gratuita por internet en el sitio www.ted.com y si usted quiere acceder a una versión *sumarísima* de "lo mejor" le sugiero que vaya a este sitio: http://www.ted.com/playlists/77/new_to_ted

Su nombre: Lior Zoref. Se presentó él mismo diciendo que su sueño en ese momento particular de su vida era poder dar una charla en TED. Sus amigos le dijeron que estaba *loco*, ya que no había nada que él pudiera decir que fuera de interés para una audiencia tan masiva y ecléctica. Sin embargo, Zoref lo logró. Más aún: logró convencer a todo el panel que toma las decisiones sobre los candidatos, de que valía la pena darle una oportunidad. El tema que propuso Zoref fue 'la sabiduría de la multitud'.

Dicho así suena grandilocuente, potencialmente cierto pero ambiguo, difícil de exponer salvo a través de ejemplos, pero al mismo tiempo desafiante... Lo que importa es que Zoref lo logró. Sígame por acá.

Como usted bien sabe, cada vez que uno entra en un cine, en un teatro, en un auditorio o en una reunión con mucho público, por delicadeza y respeto a los concurrentes, nos solicitan que apaguemos los teléfonos celulares (o que los pongamos en modo *vibrador)*. En este caso, Zoref nos pidió lo contrario. Dijo que —al menos por unos minutos— todo el mundo tendría permitido usar su teléfono celular. Y no sólo eso, nos pedía *por favor que* lo usáramos.

El autor de la idea que él habría de elaborar frente a nosotros fue un joven de 16 años (Or Sagy) quien le sugirió un experimento notable. Le dijo: "Llévate contigo al estrado a un *toro*. Sí, a un toro. Vivo. Una vez allí, pídele a la gente que está en el auditorio que mande un mensaje de texto a cierta dirección electrónica estimando *el peso del toro*".

Sin decir cuál era su objetivo final, eso fue exactamente lo que hizo Zoref. Aparecieron dos personas que trajeron un toro[2] al

2. En realidad, no fue un toro sino un buey, pero a mí me resultan indistinguibles. Con el tiempo descubrí que había sido un buey, pero a los efectos prácticos, toro o buey no marcan diferencias.

escenario. Superado el instante de confusión inicial, Zoref explicó el experimento que pretendía hacer. En realidad, sólo nos dio un número para enviar un mensaje de texto. Todo lo que había que hacer era conjeturar cuánto podría pesar el toro y mandar el mensaje con ese número (el peso).

Lo que terminaría pasando es que una computadora recibiría todos los mensajes que se emitieran durante 60 segundos *y en tiempo real* habría de calcular el promedio de los números. El objetivo era demostrar la 'sabiduría de la multitud'.

Durante un minuto, 500 personas (sí, exactamente 500 personas) votaron (votamos). ¿Qué cree que pasó? ¿Quiere detenerse un minuto en la lectura y pensar qué sucedió?

Me gustaría estar a su lado en este momento hablando sobre este texto. Antes de leer la respuesta o antes que yo le cuente lo que pasó, le preguntaría (le pregunto): ¿Estuvo usted alguna vez en un recital de música? ¿O en una cancha de fútbol? ¿O en un acto donde —por ejemplo— se debe cantar el himno? ¿Qué sucede en cada uno de esos casos?

Si nos separaran a cada uno de nosotros y nos hicieran cantar solos, probablemente *nos sacarían a patadas* del lugar, por lo desafinados. Sin embargo, cuando uno se mezcla en una multitud, cuando una voz es indistinguible de la otra, todo parece funcionar bien, como si fuéramos un coro entrenado. O sea, aunque cada uno desafine de manera distinta, *en promedio* desafinamos de forma organizada, hasta entonar la música correctamente, como si *convergiéramos* hacia la canción adecuada, como si *todos* entendiéramos de música.

Trasládelo ahora al ejemplo del toro. Lo más probable es que los integrantes de *esa* audiencia hubiéramos tenido muy poco contacto con toros, casi me atrevería a decir que salvo *mascotas*, no me imagino a ninguno de los que allí estábamos lidiando con animales ni de granja ni en establos ni mucho menos con toros y vacas u otros animales de hacienda.

Las estimaciones había que hacerlas en libras pero yo las voy a convertir a kilos para transformarlas en unidades que nos son más conocidas[3]. Pasaron algunas cosas muy curiosas: antes de dar a conocer el resultado final, Zoref extrajo dos datos interesantes: la persona que estimó el número más bajo fue alguien que dijo que el toro pesaba 140 kilos[4]. Como le dijo Zoref, *"se nota que el señor sale poco"*. El que apuntó *demasiado arriba* estimó que el toro pesaba 3.632 kilos[5], muy lejos del valor real.

Ahora sí, el final: el promedio entre los votantes fue de 813 kilos y medio. ¿El peso real del toro? Aunque parezca increíble: ¡815 kilos![6] Sí, le erramos (me incluyo) por un kilo y medio.

¿Qué enseña esto? Hay muchos ejemplos sobre '*sabiduría de la multitud*', o '*sabiduría popular*'. De hecho, hay mucha gente que aprovecha lo que sucede en las redes sociales para *saber cuáles son los temas que le interesan a la gente*[7] y los incorporan a su agenda.

Otro ejemplo notable se da en el campo de la computación. El sistema operativo Linux es de fuente abierta y más del 90% de las 500 computadoras más rápidas del mundo utilizan alguna variante de Linux. Linux es el subproducto del trabajo y creatividad de muchísima gente distribuida por todo el mundo que aporta sus ideas a esta suerte de *pozo común*.

---

3. La conversión la hago así: 1 libra = 0,454 kilos. Por lo tanto, 100 libras = 45,400 kilos.

4. O sea, 308 libras.

5. En este caso, 8.000 libras

6. El promedio fue de 1.792 libras y el peso 'real' del toro era de 1.795 libras.

7. Los *trending topics*.

Por su parte cuando usted hace una búsqueda en Google, aparece un enorme número de páginas ordenadas. Ese orden se basa en lo que entre todos estamos determinando como '*orden de relevancia*'.

En la justicia, el *juicio por jurados* se basa en la misma idea: es más probable que las mentes de varias personas lleguen a un veredicto más acorde con la verdad que si la determinación la toma un hombre solo, el juez.

Para terminar, quiero utilizar una frase cuyo autor desconozco pero que leí en el blog de Ben Lillie[8]: "Grandes *mentes* piensan parecido. Mentes *creativas* piensan juntas".

¿No se trata de eso? ¿No se trata de mejorarnos como sociedad aportando entre todos para el bien común? Ahora, en plural: "Ustedes, ¿qué piensan?".

---

8. Director del blog "The Story Collider" ("El Colisionador de la Historia"), y además editor de TED.com

Protágoras

El siguiente problema de lógica es realmente fascinante. Involucra (de acuerdo con la literatura) a Protágoras.

Protágoras fue un filósofo nacido en la Antigua Grecia. Contemporáneo de Platón, se lo considera el primer '*relativista*' o quien fuera el primero en proponer el punto de vista filosófico conocido hoy como '*relativismo*'.

En realidad, lo que se conoce de su obra es lo que han *dicho o escrito* otros sobre él, especialmente Aristóteles y Platón. Sus trabajos más importantes, "La verdad" y "Sobre los dioses", no resistieron el paso del tiempo y, por lo tanto, solo pudieron rescatarse pequeños fragmentos. Platón lo definió como un *sofista*, alguien que se autoproclamaba *maestro* y viajaba por toda Grecia ofreciéndose para enseñar a jóvenes estudiantes algunas artes como retórica y cómo hablar en público. Por supuesto, me declaro totalmente incompetente para sostener cualquiera de estas afirmaciones. Sólo resumí lo que he leído en una porción muy menor de la literatura.

Sin embargo, el problema que quiero proponer, lo tiene a Protágoras como protagonista, justamente en su papel de *maestro itinerante*. Más aún: la historia tiene que ver con una *supuesta paradoja*[9].

---

9. ¿Qué es una paradoja? Estoy seguro de que hay muchísimas respuestas a esta pregunta, y por eso, voy a transcribir solamente una de ellas, la de la En-

Le pido entonces que me acompañe a reflexionar sobre cómo resolvería usted una situación conflictiva. La historia es así: Protágoras tenía un estudiante a quien consideraba una suerte de *protegido*. A él le enseñaba todo lo que tuviera que ver con *el derecho, las leyes y la forma de arbitrar justicia*.

El inconveniente se presentaba porque este estudiante no tenía los medios para poder pagarle a Protágoras la instrucción que le daba. En épocas de la Antigua Grecia, la instrucción no se administraba en forma colectiva como hacemos hoy, en colegios y/o escuelas, sino que se realizaba en forma particular, individual o en muy pequeños grupos.

El afecto que le inspiraba el joven lo llevó a Protágoras a ofrecerle una solución al problema del pago. Le propuso que él le pagara el día que ganara su primer juicio. El trato parecía razonable: el estudiante recibiría la mejor instrucción y todo lo que tenía que hacer era aguardar hasta completarla, conseguir su primer cliente, ganar el juicio pertinente y entonces sí, pagarle a Protágoras el tiempo y el trabajo que habían hecho juntos.

El acuerdo no tardó en llegar, pero el problema se manifestó más adelante. Si bien el joven ya estaba en condiciones de representar a algún cliente, no lograba encontrar que nadie lo tomara como su abogado. Como el tiempo pasaba y la situación perduraba, Protágoras comenzó a irritarse y sostenía que el joven no tenía una actitud lo suficientemente agresiva para tratar de conseguir que alguien lo contratara.

---

ciclopedia Británica: "Un argumento en apariencia auto contradictorio, cuyo significado se revela a través de un análisis cuidadoso. El propósito de una paradoja es llamar la atención y provocar un pensamiento 'fresco' (o nuevo)". Aunque parezca un ejercicio intelectual estéril, el estudio y análisis de una paradoja suele proveer una ayuda inestimable para mejorar el pensamiento crítico, especialmente en el mundo de la ciencia.

Cuando ya no existía el afecto que los había llevado a funcionar como profesor/alumno, Protágoras se hartó de la situación y tomó una decisión impensada en un comienzo: decidió hacerle juicio al alumno por falta de pago.

Y acá es donde se generó la paradoja de la que hablaba al principio. De hecho, le sugiero que revise el texto y se tropezará con una suerte de callejón sin salida[10]. No se prive de la oportunidad de encontrar el problema que se presenta ni bien Protágoras le hace juicio a su estudiante.

Fíjese lo que podría pasar. Pongámonos en la situación de ambos, o el punto de vista de cada uno.

De acuerdo con la visión de Protágoras, si él *ganara* el juicio, entonces el alumno tendría que pagarle todo lo que le debía. Por otro lado, si Protágoras *perdiera* el juicio, entonces su alumno habría ganado su primer pleito y, por lo tanto, tendría que pagarle igual. Es decir, desde el punto de vista de Protágoras, cualquiera de las dos posibilidades le son favorables: ganara o perdiera el juicio, el alumno tendría que pagarle.

Ahora, miremos lo que piensa el alumno. Si él *ganara* el juicio, entonces no tendría que pagarle nada a Protágoras, porque el pleito que le inició su ex maestro era porque él no le pagaba. O sea, quedaría demostrado que él (el estudiante) no le debía nada. Por otro lado, si el estudiante *perdiera* el juicio con Protágoras, entonces tampoco tendría que pagarle, porque el acuerdo original con él era que le pagaría el día que hubiera ganado su primer juicio y éste… lo habría perdido.

Moraleja: Protágoras cree que pase lo que pase con el juicio, el alumno tendrá que pagarle. Por el otro lado, el alumno sos-

---

10. Nunca entendí bien esta frase, porque si uno entra en un callejón sin salida, ¿por qué no sale por la entrada?... Pero ésa es otra historia.

tiene que pase lo que pase con el juicio, él no tendrá que pagar nada.

Es obvio que no pueden estar bien las dos posiciones, porque el juicio tendrá algún resultado y en función de quien sea el ganador, el estudiante deberá pagar o no.

¿Cómo resolver esta situación? En todo caso, *¿tendrá solución el problema?* ¿Quiere pensarlo en soledad?

En realidad, no tengo una solución que deje satisfecha la curiosidad. ¿Por qué? Es que es imposible realizar un análisis racional. En un momento ambos actuaron como si el acuerdo que habían pactado estuviera vigente: el alumno *solamente* pagará cuando gane el primer juicio. Pero por otro lado, de acuerdo con la conveniencia de cada uno, pareciera que las dos partes aceptan que un tribunal pueda invalidar el acuerdo. Es decir, si el tribunal o el juez *falla* que el alumno tiene que pagar, entonces no es posible *recurrir* a algo que no está en juego en el juicio (el acuerdo que ambos pactaron) para entonces *no pagar*. Pero al mismo tiempo, si Protágoras *perdiera* el juicio, entonces no puede apelar a ese mismo acuerdo para que el joven tenga que pagarle.

La moraleja de esta paradoja es que es imposible *ponerse las dos camisetas al mismo tiempo*... o, lo que es lo mismo, *jugar para los dos equipos simultáneamente*. ¿Le suena familiar?

Arroz, bacterias y la población de la Tierra

Hay un problema que circula hace siglos y que involucra a un rey y a un súbdito a quien el rey le quiere pagar por un favor que le hizo y lo invita a que le pida "cualquier cosa que quiera", que él lo va a satisfacer.

Es muy probable que usted haya escuchado hablar de esta historia o que la haya leído en alguna parte. Sin embargo, quiero proponerle reflexionar sobre algo que uno no siempre tiene en cuenta, y que muestra cuán 'anti intuitivos' nos resultan los 'números grandes'. Pero primero vuelvo al rey y al hombre del pueblo para refrescar su memoria.

Ante *semejante* ofrecimiento por parte del rey, el súbdito piensa un rato y le propone lo siguiente. En principio se consigue un tablero de ajedrez (un cuadrado de ocho filas por ocho columnas, o sea, 64 casillas) y le dice qué, empezando por cualquiera de los extremos, quiere que el rey le provea del arroz suficiente como para ir duplicando en cada casilla la cantidad de granos de arroz que puso en la anterior. Es decir, empezando por un grano en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta, y así hasta llegar a completar todo el tablero.

Ahora tengo una pregunta para usted: ¿Cuántos granos de arroz cree usted que habrá al finalizar este proceso? Se advierte que habrá muchos granos, sí, pero ¿cuántos? No le propongo que haga un cálculo exacto sino que trate de *estimar* ese número. Más aún: si me permite sugerirle algo, no avance en la lectura si no ha hecho ningún esfuerzo por imaginar cuántos granos habrá. Créame que vale la pena tratar de calcular la estimación como para poder capturar aunque sea mentalmente cuán grande es este número.

Una ayuda: cuando el proceso llega a la mitad, es decir cuando se lleven cubiertas 32 de las 64 casillas (las primeras cuatro filas), ya hay casi 4.300 (cuatro mil trescientos) millones de granos. Si uno los pusiera sobre una balanza, equivaldrían a algo así como 100 mil kilos o el peso de unas 170 vacas.

Pero avancemos un paso más: al finalizar el proceso, al cubrir las 64 casillas, ¿cuántos granos habrá? ¿De qué orden de magnitud?

Voy a escribir a continuación el número. Léalo en voz alta (aunque yo no esté con usted mientras lo hace):

18.446.744.073.709.551.615

Ahora voy a escribir el *texto* de lo que supongo que usted leyó: "Dieciocho trillones, cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones, setenta y tres mil setecientos nueve millones, quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince...". (Parece un trabalenguas, ¿no?)

Igual que antes: por más que uno lo lea, el número es tan desorbitantemente grande que uno no tiene noción del tamaño. Es por eso que viene bien usar alguna analogía con algo que *sí* nos sea representativo.

Bien, en ese caso, la cantidad de arroz que habría en el tablero sería equivalente a *¡mil veces la producción mundial de arroz del año 2012!*

De nuevo: ¡mil veces la producción mundial de arroz de todo un año (2012)!

¿Será útil pensarlo de esta forma para entender la *magnitud* de la que estamos hablando? Y por otro lado, ¿advierte usted lo que significa el *crecimiento exponencial*? Es decir, este tipo de procesos, en donde en cada paso que da uno *duplica* la cantidad que había, es un ejemplo de lo que usted debe haber escuchado muchas veces y se conoce con el nombre de *crecimiento exponencial*. Para correrme un poco del ejemplo clásico de los granos de arroz, quiero invitarla/invitarlo a avanzar un paso más.

Suponga que usted tiene una botella cualquiera. No importa tanto el tamaño que tenga pero piense que dentro de ella hay bacterias. Esas bacterias tienen una particularidad: se reproducen muy rápidamente y, de acuerdo con las mediciones, la cantidad se duplica una vez por minuto. Los científicos observaron que a las once de la mañana había una sola bacteria, a las 11:01 había dos bacterias, a las 11:02 había cuatro, a las 11:03 había ocho, y así siguiendo. Lo curioso (y notable al mismo tiempo) es que la botella se llenó de bacterias exactamente a las doce del mediodía: no cabía ninguna más.

Algunas preguntas:

a) Sabemos entonces que a las doce del mediodía la botella se completó. ¿A qué hora la botella estaba llena por la mitad?
b) ¿A qué hora la cantidad de bacterias alcanzaba a cubrir *una cuarta* parte de la botella?

Las respuestas vienen a continuación, pero le sugiero que no las lea antes de dedicarle algunos minutos a pensar la respuesta.

Ahora sigo yo. Fíjese lo que pasa yendo hacia atrás en el tiempo. Si a las doce la botella se llenó y las bacterias se duplican una vez por minuto, eso quiere decir que a las 11:59 (un minuto antes del mediodía), la botella tenía que estar llena hasta la mitad. Es que justamente en el momento que se dupliquen completarán la botella. De la misma forma, *dos minutos antes* del mediodía, la botella tenía que estar llena hasta solamente un cuarto de su capacidad.

Y ahora, un dato que creo aún más impactante: cinco minutos antes del mediodía, a las 11:55, la botella parecía virtualmente vacía. Si usted hace las cuentas verá que la botella tenía bacterias que alcanzaban a ocupar apenas un 3% de su capacidad[11]... casi nada.

Una pausa. ¿Por qué escribí todo esto, además del dato que supongo que es anti intuitivo? ¿Hay alguna conclusión que usted está tentada/tentado de sacar?

Si uno hubiera estado dentro de la botella (e imaginándose 'bacteria'), a las doce menos cinco vería que está virtualmente vacía, con muchísimo espacio para movilizarse. ¿Quién podría imaginar que cinco minutos después *explotaría* todo?

Ahora traslade esta situación a la vida en la Tierra. Está claro que —por ahora— hay lugar para todos, y para aquellos que vayan naciendo también. No se me escapa que la población de la Tierra no se duplica tan fácilmente (ni mucho menos). De hecho, ahora (año 2014) somos un poco más de siete mil millones de habitantes. Acompáñeme rápido por estos números: llegamos a superar los mil millones alrededor del año 1804. Tuvieron que pasar más de 123 años (casi un siglo y un cuarto) para llegar a dos mil millones (en 1927). Pero, hicieron falta nada más que 33 años para llegar a los tres mil millones en 1960. Desde aquí avanzamos mucho más apurados: cuatro mil millones en 1974,

11. Para ser exactos, está cubierta un 1/32 de la botella.

cinco mil millones en 1987, seis mil millones en 1999 y siete mil millones en marzo de 2012.

Puede que los números no sean exactos pero a esta altura creo que no es lo más importante. Lo que *sí* me parece que vale la pena, es detenerse un instante para pensar lo que significan estos tipos de crecimientos, aunque no sea exactamente *duplicarse* una vez por minuto. En vista del ejemplo de las bacterias, convendría tener un *ojo atento* a lo que sucede con las tasas de crecimiento, porque si no, podríamos estar como las bacterias a las doce menos cinco: por ahora no pasa nada, pero en cinco 'minutos', podemos quedarnos sin espacio habitable en la Tierra.

¿Será por eso que ahora el crecimiento poblacional se ha desacelerado?

Los mapas de Eric Fischer

El 26 de junio del año 2000, Bill Clinton y Tony Blair, las autoridades máximas de los ejecutivos norteamericano e inglés, se ubicaron en la sala de prensa en la Casa Blanca, en Washington, para anunciar en forma conjunta el éxito del proyecto biológico multinacional más espectacular de la historia del hombre: el primer borrador del 'genoma humano'. Algo así como la cédula de identidad biológica de cada individuo.

El objetivo logrado fue monumental: secuenciar e identificar tres mil millones de unidades químicas que figuran en el manual de instrucciones genético de cada persona. Esto debería servir —por ejemplo— para encontrar las raíces genéticas de ciertas enfermedades y poder diseñar luego tratamientos que las combatan.

Nada de esto se hubiera podido hacer de no haber mediado la utilización de computadoras cada vez más potentes, con mayor capacidad de almacenamiento de datos, con más memoria, con la habilidad para buscar y reconocer patrones y para hacer comparaciones que a los humanos nos llevaría siglos si las quisiéramos hacer a mano.

Está claro que los datos *no son nuevos*. Estuvieron/están ahí, en cada uno de nosotros. El problema no es tanto cómo recolectarlos sino cómo analizarlos. ¿Qué mensaje encierran? O en todo caso, ¿qué mensajes están atrapados dentro de esa marea de información? ¿Cómo descubrirlos?

Escribí esta introducción con un objetivo que no camina por un terreno tan espectacular como el de la secuenciación del genoma humano; se trata de algo mucho más pedestre, pero que hubiera sido imposible de realizar hace nada más que un lustro, o quizá menos.

Acompáñeme con estas reflexiones que son irrelevantes comparadas con lo que representó la decodificación del genoma, pero que igualmente hacen a nuestra forma de vivir.

No sé si usted se preguntó alguna vez dónde estaba ubicada cada persona cuando envió un mensaje a través de Twitter o cuando sacó una foto y la 'subió' a la red (por ejemplo a través de Flickr o de Picasa).

Supongamos entonces que yo le diera acceso a las bases de datos de Twitter, Picasa, Facebook, o Flickr. ¿Qué haría usted con ellas? No me refiero a violar la privacidad de los contenidos, pero, manteniendo el anonimato de los autores, qué preguntas cree usted que se podrían contestar para echar luz sobre el comportamiento humano escondido en esos mensajes, fotos, blogs, etcétera.

Como sucede muchísimas veces en la ciencia, no sólo alcanza con tener los datos sino que es mucho más importante saber qué preguntas hacer. Por ejemplo:

- ¿Desde qué lugares (geográficos) se envían los mensajes?
- ¿En qué idiomas?
- ¿Usando qué plataformas? (iPhone, Android, Blackberry)

Por otro lado, si uno pudiera saber el lugar geográfico desde donde fueron tomadas las fotografías que cada persona 'sube' a la red a través de programas como Picasa o Flickr, podría preguntarse:

- ¿Qué lugares son los más fotografiados?
- ¿Qué porcentaje está sacado por turistas y/o por residentes?

Una vez más, si uno tuviera estos datos, ¿qué hacer con ellos?

Que pase Fischer. ¿Quién es Fischer? Eric Fischer tiene 41 años, vive en Oakland (California) y desarrolló su interés por unir la creación de mapas con su pasión por la computación. Primero fue estudiante (y luego empleado) de la Universidad de Chicago. Después lo contrató Google, en donde trabajó hasta el año pasado y hoy se desempeña en forma independiente con su propia empresa. Pero, ¿por qué hablar de él?

Varias razones. Fischer consiguió que Twitter le diera acceso a tres mil millones de tuits (o tweets). Sí, leyó bien: ¡tres mil millones de tuits![12] Es un número impresionante. ¿Qué hacer con ellos? En realidad, Twitter le entregó los datos pero no el *contenido* de los mensajes. Sin embargo, lo que sí le ofreció es acceso a:

- el lugar geográfico desde donde fue enviado cada mensaje;
- el sistema operativo utilizado desde el que fue enviado (para simplificar: iOS que se usa en los iPhone, iPad o productos equivalentes de Apple, Android o Blackberry);
- el idioma utilizado en el mensaje.

---

12. Originalmente Fischer utilizó 280 millones de tuits (o tweets) pero ahora sus mapas ya recogen los datos de más de tres mil millones.

Fischer desarrolló un programa en septiembre de 2009 que le permitió hacer un *mapa coloreado* con esos datos. Les puso un *punto de color rojo* a los mensajes enviados con un iPhone, un *punto verde* a los enviados desde un equipo con Android y un *punto de color púrpura* a los enviados usando un Blackberry. Y luego, hizo visibles los resultados, país por país, ciudad por ciudad. Toda esta información puede bajarse gratuitamente desde www.mapbox.com/labs/twitter-gnip/brands/#. Si tiene una computadora con acceso a internet, vaya hasta ese sitio y busque la ciudad que más le interesa. Ni bien lo haga verá cómo se despliegan unos mapas espectaculares.

¿Qué importancia tendría conocer los datos de la marca de teléfono celular inteligente que utiliza cada persona? En particular, muestra las características socio-económicas de los usuarios. Un mapa que usa los metadatos extraídos de los millones de tuits clasificados por su ubicación geográfica indica claramente dónde está ubicada la gente más rica en cada ciudad. Los iPhone son mucho más caros que los equipos con Android (en general), y los Blackberry son utilizados por un sector muy particular (y cada vez más reducido) de la población. Si uno ingresa en el mapa de algunas ciudades argentinas (la Capital Federal y todas las que componen el conurbano, Córdoba, Rosario, Santa Fe, Mendoza, Tucumán, por poner sólo algunos ejemplos), el impacto es inmediato.

Las regiones que uno *intuye* que tienen mayor poder adquisitivo quedan corroboradas por los mapas de Fischer. Por ejemplo, en la zona norte de la Capital, Palermo y Recoleta predominan los iPhones. En cambio en Barracas, Paternal, Liniers, la coloración es distinta. Y lo mismo sucede al comparar Avellaneda con San Isidro.

Fischer sostiene (y es difícil no estar de acuerdo con él) que es poco probable que alguien descubra algo nuevo al visualizar los mapas. Sin embargo, sirven para confirmar lo que uno sospecha que pasa, no sólo pasa en las zonas y/o barrios que uno conoce mejor, sino que se extrapola a aquellos que están más distantes del observador.

La idea de Fischer fue 'descargar' toda la información, los números 'desnudos', y convertirlos en mapas que fueran visualmente poderosos en la medida que atravesaran un conjunto de tópicos, desde los más controvertidos, como pueden ser los raciales, hasta las divisiones por idioma.

La utilización del idioma sirve para ubicar distintos núcleos urbanos en donde las concentraciones de distintas comunidades son más visibles. Esto resulta más útil en países que reciben inmigraciones muy fuertes, como Estados Unidos, Canadá, España, Francia, Inglaterra, o en países en donde hay una variedad idiomática notable (China, por poner un caso). En la Argentina, las preguntas habría que hacérselas en las zonas fronterizas, especialmente en el Noreste, con la fuerte penetración del portugués e incluso del guaraní. Los datos sobre los idiomas se pueden encontrar en http://www.mapbox.com/labs/twitter-gnip/languages/

Por otro lado, Fischer, con las bases de datos fotográficos de Flickr y Picasa, tuvo acceso a los lugares geográficos desde donde se 'suben' fotos a la red (internet). Los coloreó de forma equivalente a lo que había hecho con los mensajes de Twitter, y logró mapas preciosos con los lugares del mundo más fotografiados (algunos son muy predecibles pero otros no).

Siguiendo la locación del fotógrafo, pudo saber cuándo una persona que sacó una foto y la subió a la red se 'corrió' de ciudad o de país (por ejemplo, si solamente sacó fotos en un período de treinta días en un único lugar geográfico y luego cambia, se lo considera un turista). Con esa información, Fischer exhibe las zonas del mundo más frecuentadas, más buscadas y más 'lindas' para ser expuestas[13]. La idea es analizar las fotos tomadas por el público que las habita o las visita. Hay ciudades en donde la mayoría de las fotos son sacadas por turistas (Las Vegas en los Estados Unidos, o Venecia en Italia), pero en otras, el turismo llega poco o no se manifiesta a través de las fotos.

La visibilidad del propio Fischer aumentó considerablemente una vez que sus mapas fueron expuestos en uno de los museos más relevantes del mundo, el MoMA (Museo de Arte Moderno de Nueva York). El nombre de la exposición fue "Locals and Tourists" (algo así como "Residentes y Turistas") y estuvo en 'cartelera' durante el año 2010. En http://www.flickr.com/photos/walkingsf/sets/72157623971287575/ es posible visualizar lo que Fischer llama "The Geotaggers World Atlas" (en mi traducción libre, ya que la palabra 'geotagger' es un neologismo: "El Mapa Mundial de Marcadores Geográficos"). El atlas ordena las ciudades de acuerdo con el número de fotos que son tomadas en los distritos centrales. Si bien el sistema favoreció a las ciudades 'monocéntricas' (con un *centro* bien definido como Buenos Aires, Nueva York, París), las mejores fotos se consiguieron en ciudades con múltiples centros como Taipei. En este link http://www.flickr.com/photos/walkingsf/4671492357/in/set-72157624209158632 aparece la Capital Federal.

Mientras tanto Eric Fischer está preparando ahora un nue-

13. Las 136 ciudades se pueden ver en http://www.flickr.com/photos/walkingsf/sets/72157624209158632/detail/

Por otro lado, Santa Fe tiene este link:

http://www.flickr.com/photos/walkingsf/5793952636/in/set-72157624209158632

A su vez, Buenos Aires se puede ver en http://www.flickr.com/photos/walkingsf/4671492357/in/set-72157624209158632 vo museo que se llamará "Exploratorium Museum" y que abrirá dentro de poco en San Francisco. La potencia cada vez más rápida de las computadoras, combinada con la matemática subyacente y la capacidad para hacer *preguntas*, permite que nos conozcamos mejor, ya sea descubriendo mensajes encerrados en nuestro ADN o detectando las ciudades que más nos invitan a la fantasía.

Hinchas de Boca

¿Cuántos teléfonos celulares hay en la Argentina? La respuesta depende de la fuente que uno consulte. Algunos sostienen que hay más de 50 millones y otros (los más conservadores) un poco menos. No importa. A los efectos de lo que quiero proponerle pensar, lo más relevante es que hay decididamente más teléfonos celulares que personas que habitan el país.

Las compañías telefónicas que proveen el servicio de telefonía celular tienen en su poder una herramienta de un *extraordinario* poder: la base de datos que generan sus usuarios. Pero espere: no me refiero a los nombres de las personas que son los dueños de los teléfonos. Ése sería un dato insignificante, equivalente a decir que tienen los nombres de una guía telefónica[14]. No. Me refiero a otra cosa. Sígame por acá.

Cada vez que usted hace una llamada, no sólo está usando su teléfono y el número que tiene asignado, sino que también necesita utilizar una antena (o más). En el momento que se produce la llamada la señal que usted envía llega a la 'torre' más cercana que tiene su proveedor. Desde allí sigue entonces el proceso. Por

14. ¿No es notable que haya guías de teléfonos con líneas fijas pero no celulares? En realidad, como me hizo observar Carlos D'Andrea, ¿no es notable que aún siga habiendo guías de teléfonos?

supuesto, si usted se está moviendo, las antenas van cambiando a medida que usted va cambiando de locación, y esta operación es totalmente transparente para el usuario que no presta atención (ni razón hay para que lo haga) al despliegue tecnológico necesario para que la conexión ocurra y se mantenga.

Sin embargo, todos estos mini episodios quedan registrados. Usted no es más dueño de lo que hizo, sino que ha dejado una cantidad de rastros/huellas, algo así como si hubiera marcado con una tiza todo su trayecto. Fíjese que estoy omitiendo hablar del contenido de su conversación. Ésa sería la preocupación más frecuente, por lo que significaría una obvia invasión a la privacidad. Pero hay otro tipo de datos que quedan registrados y que le otorgan a las telefónicas un poder descomunal. Es tan grande el poder que tienen con esa base de datos, es tan *extraordinaria* su potencialidad, que creo que debería discutirse si ese material les pertenece o si debiera ser regulado por el Estado. No sé. No he pensado el tema, y estoy seguro de que habrá gente experta que tendrá opiniones educadas. La mía, ciertamente, no lo es. Pero quiero explayarme un poco más en por qué considero que esa base de datos contiene una cantidad de información que podría cooperar en la solución de muchísimos problemas. ¿De qué hablo? Me explico, primero, con un ejemplo.

Nicolás Ponieman, Alejo Salles y Carlos Sarraute[15] son tres científicos argentinos egresados de la universidad pública. Trabajan —entre otras cosas— como asesores/consultores de distintas com-

15. Nicolás Ponieman es estudiante de la Licenciatura en Física, en Exactas (UBA); Alejo Salles es egresado de Exactas (UBA) y doctor en Física de la Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), y Carlos Sarraute es egresado de Exactas (UBA) y doctor en Ingeniería Informática del ITBA. Ponieman y Sarraute trabajan en la compañía Grandata mientras que Salles es investigador del CONICET.

pañías telefónicas que proveen servicios de telefonía celular. Cada una de estas compañías es poseedora de los datos de los que hablaba anteriormente. Es decir: las compañías tienen registradas *todas* las llamadas entrantes y salientes que recibió cada teléfono, qué antenas fueron utilizadas y durante cuánto tiempo. Las empresas *codifican* los números de los usuarios de manera tal que al entregar el material, no sólo no aparece nada de lo conversado, sino que tampoco aparece el número del usuario: es un código. Por supuesto, el código de cada teléfono será siempre el mismo a lo largo de cualquier estudio y/o uso que se haga con ellos. Por otro lado, los resultados que provengan del análisis de esos datos *solamente* pueden ser utilizados con un fin académico (científico) y, más aún, tienen que aparecer ubicados en distintas categorías ('agregados'), sin individualizar ni revelar los detalles (en particular, el nombre de la empresa).

Para que tenga una idea de la magnitud del estudio, piense que analizaron 40 millones de teléfonos celulares. El objetivo del trabajo era hacer un estudio que permitiera mejorar la predictibilidad de los *movimientos* y la *ubicación* de grupos de personas. Es decir, en este caso particular, estudiaron los movimientos de los que llamaron 'hinchas de Boca'. ¿Cómo hacer para detectar quiénes pertenecen a ese grupo? Se propusieron identificar a los usuarios que hicieron llamadas en zonas aledañas a la cancha de Boca durante varios domingos seguidos en horarios de partido y usaron ese material para *distinguir/elegir* algunos teléfonos celulares de otros. No alcanza con que una persona hubiera ido a la cancha de Boca con un teléfono celular, sino que para que quede un registro tiene que haber hecho o recibido alguna llamada en el lapso que se fijaron para el estudio[16]. Por supuesto, no se les

16. Cada llamada se identifica por su sigla en inglés CDR, "Call Detail Record", o sea la 'huella' que dejó la llamada.

escapa a ellos ni a usted, que es una identificación muy *grosera*, y muy posiblemente con múltiples errores; pero a los efectos prácticos, es una buena aproximación.

Como decía en los párrafos anteriores, el objetivo era poder *predecir* la *locación* y la *movilidad* de los teléfonos celulares de personas que pertenecían a ese grupo ('hinchas de Boca') en un determinado momento.

En esta suerte de prueba *piloto* quise saber cuáles eran las hipótesis que tenían *antes* de hacer el relevamiento y cuáles fueron las conclusiones que terminaron publicando.

Las hipótesis que querían verificar con este estudio fueron:

- que la *movilidad* de las personas presenta —a nivel estadístico— muchas regularidades (se pueden predecir con alta probabilidad de acierto),
- que la *ubicación* de los usuarios de celular se puede predecir también con una buena probabilidad de acierto[17],
- que el modelo muy simple utilizado se puede mejorar sensiblemente agregando información 'externa' de fenómenos sociales, como los datos del fixture del torneo de fútbol.

Luego, una vez finalizado el estudio, corroboraron todas esas hipótesis. El trabajo fue presentado con marcado éxito en el congreso NetMob que se hizo a principios de mayo de este año en el MIT, en Boston, Massachusetts, Estados Unidos[18].

17. Para *preparar* el modelo, usaron un conjunto de antenas que les sirvieron como *entrenamiento* durante cinco semanas.

18. El trabajo puede verse en http://www.technologyreview.com/news/514646/glimpses-of-a-world-revealed-by-cell-phone-data/ y forma parte de la "Third Conference on the Analysis of Mobile Phone Dataset" ("Tercera Conferencia sobre el Análisis de la Base de Datos de los Teléfonos Móviles").

Por supuesto, saber dónde están (o no) los hinchas de Boca tiene una utilidad relativa. En todo caso, servirá para los servicios de marketing que seguramente estarían interesados en conocer este material.

Pero lo que yo quiero poner en evidencia acá es que con esos datos es posible —por ejemplo— analizar el flujo de personas que ingresan (y egresan) del centro de una ciudad, para mejorar y optimizar la distribución del transporte público, ofrecer rutas alternativas, guiar al tránsito en tiempo real (como se hizo en un estudio espectacular, basado en la misma idea, en Costa de Marfil). O bien se pueden aprovechar los datos que dejaron los teléfonos celulares en Haití luego del terremoto del año 2010 para entender cómo se produce la dispersión de personas luego de una catástrofe natural.

Un trabajo equivalente con cualquier base de datos de similares características permite mejorar la predictibilidad en la *movilización* y *ubicación* de las personas involucradas, pero, al mismo tiempo, con este mismo tipo de modelos se pueden predecir y entender procesos más complejos, como la forma en la que se *desparrama* o *distribuye* la información, o incluso un *rumor*, o cuáles son los patrones con los que se esparce un virus o una enfermedad contagiosa. Y los ejemplos podrían seguir.

Cada día el mundo digital genera varios *millones de millones de millones* de bytes[19] que provienen de múltiples fuentes: sensores climáticos, redes sociales, imágenes digitales, videos subidos a internet o compras hechas usando la red y, como ya he explicado, las llamadas efectuadas por usuarios de teléfonos celulares, por sólo nombrar algunas. El aprovechamiento de todos estos

---

19. 'Millones de millones de millones' es equivalente a 1018, o sea un 'uno' seguido de ¡dieciocho ceros!

datos, saber *desbrozarlos*, desagregarlos, entenderlos y rescatar los mensajes que tienen escondidos, es uno de los mayores desafíos de la Tecnología de la Información. Por el momento, las compañías telefónicas recogen y almacenan una cantidad de datos que, si son *bien* interpretados, pueden proveer una información *macroscópica* muy valiosa sobre las interacciones de la población. Justamente, el análisis *cuidadoso* de los mismos puede transformarse en una herramienta muy poderosa para mejorar esas interacciones, para optimizarlas... La Argentina no puede quedarse atrás. Y una vez más: ¿No valdría la pena discutir si esas bases de datos deberían ser reguladas por el Estado también? ¿El Estado no debería tener acceso a esa información para mejorar las condiciones de vida de la población? ¿Usted qué piensa?

¿Por qué la otra cola se mueve más rápido... *siempre*?

Quiero compartir con usted una sensación de frustración que me parece que es universal. Lea el caso que sigue y piense si se siente identificada/o, o no. La escena sucede en un supermercado, por ejemplo. Uno tiene ya decidido qué es lo que va a comprar y se dirige hacia el lugar en donde están ubicadas las cajas. Hay varias abiertas, pero también es cierto que en todas hay gente esperando, 'haciendo cola'. ¿Cuál elegir? Uno hace —de apuro— una suerte de estimación mirando la cantidad de mercadería que hay dentro del carrito de cada 'compañera/o de desgracia' y se inclina por uno. Igualmente, sigue atento a lo que sucede a su alrededor en el caso de que se 'abra' algún espacio inesperado o que alguna cola fluya más rápido que la que uno eligió. Pero en cuanto empieza a aparecer más gente, la posibilidad de cambio es cada vez más remota (o imposible). Y aquí comienza la frustración: uno, ya establecido en una cola que parece 'no moverse nunca', advierte con desesperación que las filas de al lado avanzan mucho más rápido. La cajera o el cajero que atiende *nuestra* cola es mucho más lento, atiende el teléfono, lo distraen sus compañeros, no sabe el precio de algún producto (o no lo encuentra), se involucra en chistes internos con los demás trabajadores, se queda sin cambio, o justo viene el reemplazo porque se le terminó el turno de ese día... etcétera. Mientras tanto, la presión interna va creciendo en forma directamente proporcional al tiempo que uno permanece estancado y atascado en una situación que parece irreversible. ¿Por qué será que —en apariencia— las colas de al lado *siempre* se mueven más rápido de la que uno eligió?

Lo notable de este episodio es que no está solamente referido a colas en un supermercado, por supuesto. Si usted está manejando en alguna parte de la ciudad en donde hay más de dos carriles (alguna avenida) o en una autopista, o si está haciendo la cola en un banco para pagar algún impuesto, o en un hospital para ser atendido... o vuelve de un fin de semana largo y tiene que pagar el peaje... en fin, miles de situaciones de la vida cotidiana, sabe perfectamente a qué me refiero. Pero más allá de esta descripción brevísima de una de las mini frustraciones de la vida cotidiana, ¿qué tendrá esto que ver con la matemática? ¿Por qué habría de escribir sobre esto?

En realidad, hay una rama de la matemática que se dedica al *estudio de las colas*. Sí, más allá de la sonrisa que intuyo le genera mi frase, hay gente especializada en estudiar cómo se puede hacer para minimizar el tiempo de espera y maximizar la eficiencia (de las cajeras, por ejemplo). La 'teoría de colas' se usa en telecomunicaciones, en ciencias de la computación, en la organización del tráfico aéreo, en el diseño de parques temáticos (piense en Disneylandia, por ejemplo) o en cualquier área que involucre servicios en donde la demanda es aleatoria. Piense en la gente que hace cola para presenciar un River-Boca o un Estudiantes-Gimnasia. Hay decenas de libros y miles de trabajos científicos que hacen aportes sobre la "teoría de colas" y se siguen publicando con una frecuencia cada vez mayor.

Lo esencial es analizar dos variables que son aleatorias (azarosas): por un lado, la cantidad de personas que reclamarán un servicio en un determinado momento y, por otro, el tiempo que involucra el proceso. Es obvio que no voy a poder hacer acá un desarrollo *serio* sobre el tema, pero sí quiero dar una idea de qué se trata. Sígame por acá.

Todos los métodos modernos para la optimización de redes tienen sus raíces en un trabajo hecho por Agner Krarup Erlang, un matemático danés que trabajaba en la Compañía de Teléfonos de Copenhague a comienzos del siglo XX. Erlang fue el verdadero pionero en la especialidad. Su objetivo fue tratar de resolver el problema del diseño de una red de teléfonos. ¿Qué tiene que ver esto con las colas? Espere. ¿Cuántas 'redes troncales'[20] se necesitan para una determinada cantidad de llamadas entre habitantes de un pueblo y otro? Hay que entender que a comienzos del siglo XX, para poder hablar por teléfono era imprescindible que hubiera una operadora que recibía en una 'central' o 'conmutador' el pedido de una persona que quería comunicarse con otra. Uno podría pensar el sistema de la siguiente forma: cada casa tenía un cable que la unía con la central telefónica. Cuando dos personas querían hablar entre sí, una de ellas llamaba a la central en donde una operadora recibía ese llamado y hacía un puente con el cable que unía la central con la casa de la otra persona.

Por supuesto, el sistema era increíblemente lento y se necesitaban operadoras humanas (no sé bien por qué lo aclaro, pero por las dudas...) que hacían de *intermediarias*. Y eso sucedía *dentro* de un pueblo o una ciudad. Cuando había que intercomunicar dos pueblos, ¿cuántos *troncos* había que tender para dar un servicio razonable? No se podía poner solamente *uno*, ya que impli-

20. Por 'red troncal' o 'tronco' se entiende un ramal o un cable más 'grueso' que conecta dos conmutadores.

caría demoras enormes por la cantidad de llamadas bloqueadas; pero tampoco se podía instalar uno para cada teléfono (que sería el otro extremo) por lo costoso que significaría y el desaprovechamiento que habría… ¿Cuán baja sería la probabilidad de que *todos* los usuarios necesitaran hacer llamadas entre dos pueblos al mismo tiempo?

La compañía de teléfonos necesitaba una suerte de *acuerdo* entre estos dos extremos: un solo cable para todos, o que cada persona/teléfono tuviera un cable asignado. Por otro lado, además del número de llamados simultáneos, también hay que estimar el otro factor, el *tiempo*: ¿cuánto tiempo duraba cada llamada? Hay gente que hablaba una hora por teléfono y otras que sólo necesitaban un minuto.

Después de años de estudio, Erlang publicó un trabajo *central*: "Telephone Waiting Times" ("La espera para hablar por teléfono"). En él demostró que teniendo en cuenta el promedio de llamadas por hora y la longitud promedio de cada una, se podía estimar que *siete* troncos serían suficientes para atender las necesidades de la población. Puede que usted no lo recuerde, pero cuando yo nací (y crecí) —en épocas en las que era un privilegio tener un teléfono—, mis padres debían esperar *horas* hasta que la operadora estableciera la comunicación con Berazategui (por ejemplo) y pudieran hablar con mis tíos… Y yo, aunque lo parezca, no tengo 300 años. Sólo 64, por ahora.

Erlang fue el primero en hacer estudios detallados sobre el tráfico telefónico y desarrolló las fórmulas pertinentes para optimizar los costos y el tiempo, a tal punto que en 1946, el Comité Internacional Consultivo de Teléfonos y Telégrafos (CCITT, por sus siglas en inglés) lo honraron poniendo su nombre (un 'Erlang') a la unidad básica que se usa para el tráfico telefónico.

Ahora, al supermercado: un cliente que llega hasta una caja registradora es como una llamada telefónica, y una cajera que está libre es como el segmento de una red troncal que está disponible. Para mantener las *colas* en movimiento, el supermercado necesita estimar el número de personas que llegan por hora y asignar suficientes cajeras de manera tal que todo el mundo sea atendido en forma rápida. Pero Erlang demostró que ésa es una receta que preanuncia un *desastre*. La gente no arriba en forma espaciada y en igual número por hora, sino en tandas o grupos. Por lo tanto, si un negocio tiene un número 'correcto' de cajeras para atender el número promedio de clientes que llegan en una hora, va a tener igual muy pocas cajas disponibles o desocupadas a ciertas horas del día y eso se va a transformar en largas filas, con la consiguiente frustración.

En ese caso, es mucho más conveniente tener *una sola cola* con todos los clientes que están en el negocio en ese momento, y a medida que se va desocupando una caja, el primero de la fila será el primero en ser atendido. El problema con esta solución es la *percepción* que tiene cada uno de nosotros: ver una cola con tamaña cantidad de gente, psicológicamente nos produce un impacto negativo. Uno no entiende emocionalmente lo que resulta obvio desde el punto de vista racional: si hay —digamos— diez colas esperando ser atendidos por diez cajeras, si se produce una demora en una de ellas, detiene a *todos* los componentes de esa fila. Si la misma demora se produce en el caso de una fila única, entonces la cola se sigue moviendo a medida que las otras cajas quedan disponibles. Dicho de otra forma: el problema en una caja afecta pero en forma diluida al resto de los clientes.

Y por último, un ejemplo clásico: una autopista. Suponga que tiene tres carriles: A, B y C. Lo que suele pasar es que uno se siente atrapado en uno de ellos, y *siempre* sucede que uno ve que los de al lado se mueven más rápido. O se mueven, mientras uno está quieto. Pero, ¿podemos evitarlo? Piense conmigo por qué es *esperable* que esto suceda *casi* siempre. Voy a ordenar los tres carriles de izquierda a derecha poniendo el más rápido en el extremo izquierdo y el más lento en el derecho. Por ejemplo, el ordenamiento BAC, significa que la fila B es la más rápida, la A es la del medio[21] y la C es la más lenta. ¿Cuántos posibles ordenamientos hay? En total son seis: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA. Si usted está, digamos, en la fila B, de los seis posibles órdenes, ¿cuáles son los que tienen a B como el más rápido? Solamente dos: BAC y BCA. Por lo tanto, *dos sobre seis (2/6) = (1/3)*. Solamente una tercera parte de las veces es más probable que usted esté en la fila más rápida. En los otros cuatro órdenes, hay una fila más rápida que la suya (y en algunos casos *¡las otras dos filas van más rápido!*).

De cualquier modo, el problema pasa más por la percepción que por la realidad, o en todo caso, es 'casi' inevitable que suceda. La probabilidad obra en contra nuestra.

Eso sí: diseñar autopistas con un número razonable de carriles, estimar apropiadamente el número de cajeros que tiene que haber en un supermercado o los puestos de peaje que deben estar disponibles en momentos de mayor tránsito, controlar la red de semáforos en una ciudad para entender las variaciones de la densidad del flujo a distintas horas del día, prever el número de puertas abiertas a la entrada y/o salida de un evento deportivo o de un recital o no sé... muchísimos ejemplos más que usted agregará convenientemente... todo esto, tiene que ver con la capacidad de previsión, estimación y análisis que los humanos

21. Cuando escribo 'la del medio' quiero decir que no es ni la más rápida ni la más lenta.

tenemos a nuestra disposición. La matemática tiene *mucho* para decir. Luego, debemos optar por implementar las conclusiones que se obtengan, y ésa... *ésa* ya es otra historia.

El precio de la cooperación

Es curioso cómo hay ciertos temas que son recurrentes. Ciertamente no soy un experto en analizar los comportamientos humanos, pero me fascina tratar de entender nuestras conductas. La matemática tiene una rama que se dedica a explorar algunos aspectos de nuestras reacciones: la Teoría de Juegos. Por supuesto que no somos todos iguales, por lo tanto se mide lo que es más probable que suceda y NO lo que *seguro* va a suceder. Eso sería imposible, aunque con las herramientas que tenemos a mano, podemos predecir, lo que no es poco. En todo caso, es preferible tener una expectativa razonable sobre lo que podría pasar que no tener ninguna.

A pesar de que los ejemplos que figuran a continuación son muy conocidos en la literatura desde hace más de medio siglo, mi idea es invitarla/o a pensar sobre cómo reaccionaría usted en determinadas situaciones. Como no hay nadie que lo mire y como —por ahora— no hay nadie que pueda leer su pensamiento, sus respuestas las conocerá usted en la soledad de su interior. Es por eso que le sugiero que no se apure a contestar, y sobre todo, que *no se mienta o engañe* a usted mismo: trate de responder con honestidad intelectual. Cualquier otro camino le hará perder la oportunidad de compararse con el resto de los humanos. Una cosa más: no espere que yo aporte la solución de nada, ni que sea capaz de interpretar las respuestas. Todo lo que voy a hacer es presentar algunos ejemplos e invitarla/o a reflexionar hacia el final. Acá voy.

El primer caso tiene que ver con un dilema propuesto por Robert Wolf, matemático inglés especialista en lógica. Su trabajo fue recogido después por otros matemáticos[22] pero el crédito le corresponde a él. El objetivo de Wolf fue exhibir que cuando cree que está obrando en beneficio propio, algunas veces hace todo lo contrario.

Suponga que usted y un grupo de diez conocidos están en una reunión en casa de un filántropo excéntrico[23]. Este señor les pide a todos que a partir de un determinado momento permanezcan en silencio, y le entrega a cada uno un pequeño control remoto que tiene nada más que un botón.

Él les va a dar la opción de apretar el botón —o no— cuando se los indique; no pueden comunicarse entre ustedes y ninguno verá lo que hacen los otros: la determinación es puramente individual.

Cuando el filántropo diga "¡Ya!", cada uno podrá optar por apretar el botón o no, pero las reglas son las siguientes: si *ninguno* de los presentes aprieta el botón, *todos* recibirán diez mil pesos. Ahora bien, si hay uno que aprieta el botón, tanto él como

---

22. Por ejemplo, John Allen Paulos, un magnífico difusor de la matemática en el mundo. Paulos estuvo en la Argentina hace un par de años y dejó una impresión inmejorable. Sus trabajos tienen un notable reconocimiento internacional y su condición de ateo militante lo ha puesto muchas veces en el centro de algunas tormentas, de las que *siempre* ha salido airoso. De hecho, yo conocí el ejemplo de Wolf en un libro de Paulos.

23. ¿Por qué será que *siempre* los filántropos tienen que ser considerados excéntricos? ¿No hay filántropos normales?

los que hayan apretado el botón recibirán tres mil pesos, y el resto no recibirá nada.

La pregunta es la siguiente: si estuviera en esa posición, ¿usted qué haría? ¿Apretaría el botón o no? Es decir, ¿aprieta el botón para recibir *seguro* tres mil pesos o se *aguanta* apostando a que todos van a hacer lo mismo y espera una retribución de diez mil para todos los que están en la reunión?

Una vez que haya contestado esa pregunta, sin importar cuál opción haya elegido, le propongo ahora cambiar los parámetros. Supongamos que usted *apretó* el botón. ¿Lo habría apretado si en lugar de estar en juego 10.000 versus 3.000 hubiera sido 100.000 contra los mismos 3.000? Estoy 'casi' seguro de que su posición sería distinta.

Y si, por caso, usted no lo hubiera apretado al comienzo, ¿cambiaría su posición si fueran diez mil por no apretar y 9.500 por presionar el botón?

En resumen, nuestras decisiones en casos extremos parecen más sencillas, pero cuando en la vida real los planteos son mucho más difusos, con decisiones que no son tan *blanco o negro*, las reacciones son más variables.

De hecho, pareciera que la *cooperación* y la *solidaridad* tienen un precio: dependiendo del número que esté en juego, uno está dispuesto a pensarse como parte de un grupo y aspira a que todos hagan lo mismo. Pero si la recompensa no parece tan grande, entonces uno tendería a tomar el camino individual. ¿Cuál es ese número 'frontera'? ¿Es que tenemos un 'precio'?

Otro ejemplo muy interesante es el de las mujeres que supuestamente intercambian droga por dinero. Dos mujeres acuerdan llevar bolsas indistinguibles una de otra (suponga que son bolsas de supermercado, para poder fijar las ideas). Ambas se encontrarán en un lugar predeterminado y, virtualmente sin detenerse, van a cambiar las bolsas.

Una vez que lo hacen, cada una parte en dirección opuesta y listo. Acá viene la pregunta: como ninguna de las dos puede revisar el contenido de la bolsa que va a recibir, la tentación sería, para una de ellas, *no* poner droga sino harina (por ejemplo) y recibir un dinero en compensación como si hubiera sido cocaína. Para la otra, el razonamiento podría ser equivalente: llenar la bolsa con fajos de papel de diario que simulen dinero, y recibir la droga a cambio de nada.

Si ambas optan por hacer lo convenido, cooperando tal como acordaron, obtienen lo que querían, pero tienen que pagar un precio por ese acuerdo. El camino óptimo parecería ser entonces el de cumplir con lo pactado.

Sin embargo, el razonamiento también podría ser así. Llamemos A a la mujer que tendría que llevar el dinero y B a la que tendría que llevar la droga. A puede pensar: "Si B elige el camino de la cooperación (y trae la droga), yo puedo elegir el camino individualista y poner papel de diario. En el mejor de los casos, me quedo con la droga y no me costó nada, y en el peor de los casos, si B tomara el camino individualista también, al menos a mí no me costó nada. En consecuencia, independientemente de lo que haga B, me parece que es mejor tomar el camino egoísta, que termina protegiéndome".

Por supuesto que B puede razonar de igual forma y, por lo tanto, terminarían intercambiando harina por papel de diario.

¿Qué hacer: cooperar o ser egoísta?

Los dos ejemplos anteriores son sólo eso, ejemplos. Cada uno de ustedes sabrá si puede darle un contenido distinto y aplicarlos a la vida cotidiana. Usted habrá escuchado (como yo) que 'cada hombre/mujer tiene un precio'. ¿Es verdad eso? En el primer caso, el del filántropo, ¿existe algún número que a uno le *tuerza* el brazo y le modifique su afán cooperativo o solidario?

En el caso de la droga, el hecho de que uno no pueda ser descubierto, ¿será suficiente para modificar su lógica de solidaridad o de cumplir con lo pactado?

Claramente, la matemática no tiene (ni se espera que la tenga) respuestas para este tipo de problemas, pero lo que sí hace es exponer el problema en forma de un modelo. Por razones fáciles de imaginar, en el caso del filántropo convendría no apretar el botón y asumir que todos obramos igual: con solidaridad. En el caso de las mujeres que intercambian las bolsas, solamente se trata de cumplir con lo pactado. Pero la vida ofrece *tentaciones* que invitan a cambiar conductas. Cada uno sabrá si lo hace o no, independientemente de si será en beneficio propio y en detrimento de otros, o sencillamente por no cumplir con lo pactado.

Test de Ignorancia de Hans Rosling

¿Cuánto le interesa 'medir' su grado de conocimiento (o ignorancia) sobre un determinado tema? ¿Le interesa 'evaluarse'? Antes de avanzar: estoy seguro de que si el 'test' se hiciera en un lugar público, en donde hay varias personas escuchando sus respuestas, su inclinación a participar en cualquier evento que la/lo exponga falible disminuiría fuertemente. Más aún: es lo que nos sucedería a todos. Pero en este caso, como intuyo que usted está leyendo este artículo en soledad, usted estará evaluándose a sí misma/mismo.

Por otro lado, no se espera que uno sepa 'de todo y sobre todo'. Es tanto lo que ignoramos, por no decir que virtualmente ignoramos 'casi todo', que cualquier resultado que aparezca al finalizar este relevamiento no la/lo dejará en mala posición... ni aun ante usted misma/mismo.

Se trata de evaluar cuál es su grado de información sobre temas que tienen que ver con el mundo que la/lo/nos rodea. Acá va la historia.

El primer día de diciembre del año 2013, la BBC de Londres, en su página web en castellano, ofreció siguiente la encuesta, que fue generada por Hans Rosling[24], un científico sueco dedica-

24. Hans Rosling nació en Uppsala, Suecia, en 1948. Es doctor en medicina y matemático (dedicado a la estadística). Se desempeña como profesor

do —entre otras actividades— a la estadística. Lo que Rosling se propuso es mostrar qué poco sabemos sobre cómo está compuesta la *población mundial*.

Para confirmarlo, creó un grupo de nueve preguntas. Ante cada pregunta usted verá tres posibles respuestas (una suerte de 'multiple choice'), entre las que deberá elegir cuál le parece correcta (siempre hay una y sólo una que es correcta) e ir anotando sus respuestas.

Rosling tituló su encuesta 'Test de Ignorancia'[25] y lo probó con grupos de ciudadanos suecos y británicos. Los resultados indicaron que sabían 'del mundo que los rodea menos que los chimpancés', y escribió:

> Si yo escribiera las opciones en unas bananas y les dijera a los chimpancés del zoológico que me dieran las respuestas, ellos escogerían bananas al azar. A los británicos y suecos les fue peor que eso.

Parece un poco cruel, pero intuyo —conociéndolo a Rosling— que fue sólo una manera simpática de decirnos (a todos): "Vea, actualícese en lo que piensa del mundo, porque lo que usted *cree* que pasa, ¡no pasa... o, en todo caso, no pasa más! Tiene usted una percepción equivocada del mundo que lo rodea".

Rosling señala que mucha gente no es consciente de los enormes avances que la mayoría de los países han hecho en las últimas décadas y opina que llegó la hora de poner los pies en la tierra.

---

en el Instituto Karolinska, una universidad cerca de Estocolmo dedicada exclusivamente a la medicina y una de las instituciones más reconocidas del mundo en su especialidad. Rosling es, además, fundador y director general de la Fundación Gapminder, una organización sin fines de lucro.

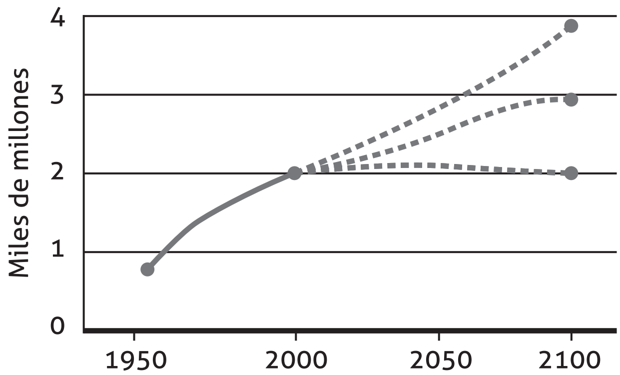
25. Test de Ignorancia: http://www.bbc.co.uk/mundo/noticias/2013/12/131125_test_ignorancia_finde.shtml. Por otro lado, el documental original de la BBC de Londres salió al aire el 7 de noviembre del año 2013 y se puede ver en http://www.gapminder.org/videos/dont-panic-the-facts-about-population

Ahora le toca a usted. Acá va el test.
¿Cuánto sabe usted acerca de la población mundial?

Pregunta 1

En 1950 había menos de mil millones de niños (edades entre 0-14) en el mundo. Para el año 2000, había casi 2.000 millones. ¿Cuántos piensan los expertos de la ONU que habrá en el año 2100?

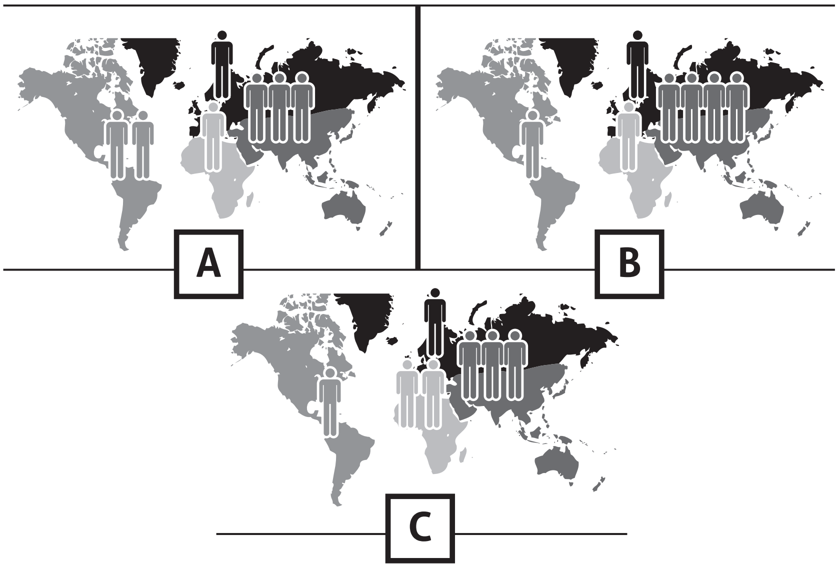
a) 2.000 millones
b) 3.000 millones
c) casi 4.000 millones



Pregunta 2

¿Cuál de estos mapas muestra mejor la distribución de los 7.000 millones de personas que hay en el mundo entre América, Europa, África y Asia? Cada figura representa mil millones de personas.

a) A
b) B
c) C



Pregunta 3

¿Cuál es el promedio de expectativa de vida al nacer en el mundo de hoy?

a) 50 años
b) 60 años
c) 70 años

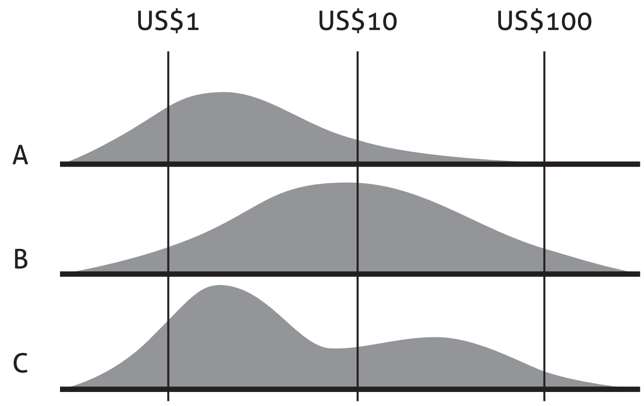
Pregunta 4

¿Cuál es la tasa de alfabetización de los adultos en el mundo de hoy?

a) 80%
b) 60%
c) 40%

Pregunta 5

¿Qué gráfico muestra la distribución de ingresos en el mundo de hoy, medida en dólares ganados al día?



Pregunta 6

En el mundo de hoy, los hombres de entre 25 y 34 años han asistido a la escuela un total de ocho años. Y las mujeres del mismo grupo: ¿cuánto tiempo?

a) Tres años
b) Cinco años
c) Siete años

Pregunta 7

En los últimos veinte años, ¿cómo ha cambiado la proporción de la población mundial que vive en extrema pobreza?

a) Se disminuyó a casi la mitad
b) Siguió igual
c) Casi se duplicó

Pregunta 8

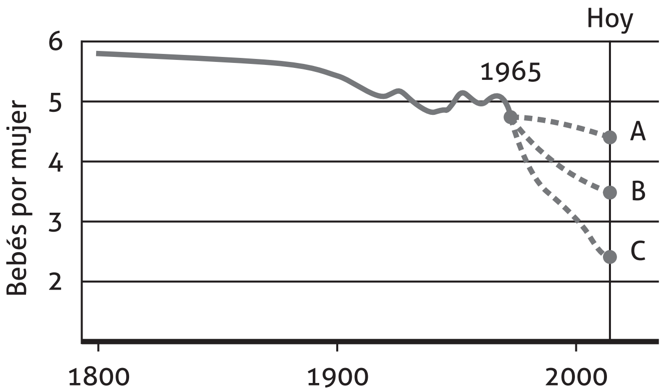
Aproximadamente, ¿cuánta energía viene directamente de paneles solares y turbinas de viento?

a) 1%
b) 5%
c) 10%

Pregunta 9

En 1965, a nivel mundial las mujeres tenían en promedio cinco bebés. ¿Cuántos tienen en promedio en la actualidad?

a) 4,5
b) 3,5
c) 2,5



Ahora, las respuestas, y para el final, una reflexión.

Respuesta 1:

2.000 millones, casi igual que en el año 2000. Hemos llegado a lo que Hans Rosling llama la “Era del Niño Tope”.

Respuesta 2:

Mapa B. América, África y Europa tienen una población de cerca de mil millones cada uno, mientras que la población de Asia es aproximadamente 4.000 millones.

Respuesta 3:

70 años. Ha habido un aumento de diez años en la expectativa de vida en las últimas cinco décadas, gracias a los grandes avances en el área de la salud.

Respuesta 4:

Alrededor del 80% de los adultos en el mundo hoy pueden leer y escribir.

Respuesta 5:

B: Rosling afirma que, en el pasado, nuestro mundo estaba claramente dividido en dos grupos, ricos y pobres, que correspondían a lo que se llamaban países 'desarrollados' y 'en vías de desarrollo' (similar al gráfico C). Pero hoy en día es distinto. En lo que se refiere a ingresos, tenemos una curva de distribución continua y la mayoría de la gente vive en el medio.

Respuesta 6:

Siete años. Ha habido una enorme mejora en el acceso de la mujer a la educación. Rosling afirma: "Es trágico cuando las niñas no pueden ir al colegio debido a tabúes culturales, pero la cantidad de afectadas está disminuyendo".

Respuesta 7:

La pobreza extrema se redujo a casi la mitad en las últimas dos décadas. Es una de las grandes historias de éxito de nuestra era. Mil millones de personas todavía viven en condiciones de extrema pobreza, pero 6.000 millones no (lo que quiere decir que ganan más de 1,25 dólares por día).

Respuesta 8:

Alrededor del 1% (o entre 1% y 2%) de la energía del mundo es eólica y solar. El hecho es que cerca de 80% de la energía que se utiliza en el mundo todavía viene de los combustibles fósiles y la mayor parte del resto, de plantas nucleares o hidroeléctricas.

Respuesta 9:

2,5 bebés. Uno de los grandes cambios en los últimos cincuenta años es la disminución en la tasa de fecundidad promedio de cinco a 2,5 y sigue cayendo[26].

Ahora, confronte el número de respuestas correctas con esta tabla que provee Rosling.

De 0 a 2: errar es humano
De 3 a 5: mediocre, o al nivel de un chimpancé
De 6 a 9: gran simio

Reflexión final

Los datos que respaldan las estadísticas presentadas por Hans Rosling son de fácil acceso[27], pero a mí me cuesta trabajo mirar al mundo en esa forma. Es decir, entiendo que la tendencia a nivel

---

26. Un video *imperdible* acá: http://www.gapminder.org/videos/the-river-of-myths/

27. http://www.gapminder.org/news/sources-for-data-shown-in-dont-panic/

mundial muestra mejoras indiscutibles, pero tomemos por caso un ministro de Salud que se propone reducir la tasa de mortalidad infantil. Incluso si lo lograra, la muerte de *un solo niño* por causas que pudieron evitarse provoca una tristeza irreparable en ese grupo familiar. Por este motivo, mirar las estadísticas en forma global adolece de un problema muy serio: se devora el caso individual, el caso personal, el caso que 'toca'.

Sé que lo que escribo no resiste un análisis serio, pero no puedo evitarlo. Los números serán correctos y creo genuinamente en Rosling y, sobre todo, conozco sus intenciones y los datos que provee; pero mientras tanto, cuando uno lee que el 80% de la población mundial está por *encima* del nivel de pobreza extrema porque gana más de más de un dólar y medio por día, me cuestiono dos cosas: a) ¿cuánto ganan por día las personas que afirman que con un dólar y medio diario un individuo puede considerarse *por encima* de cualquier línea de pobreza? ¿En serio lo dicen?; b) aunque el 80% esté por encima de cualquier línea, ¿cómo es posible que haya más de mil millones de personas que no? Una vez más, las estadísticas pueden ser impecables, pero estamos hablando de personas... PERSONAS, no números.

Para el final. Olvídese de mi último párrafo y hagamos todo lo posible para que esta tendencia que marca Rosling se optimice cuanto antes y que, al igualarnos para arriba, quedemos todos por encima de todos los indicadores en salud, mortalidad, educación, acceso a agua potable, fuentes de energía y discriminación por sexo. En todo caso, sería bueno que llegara el momento en el que las respuestas a todas las preguntas del Test tuvieran respuestas obvias... o aún mejor: que no tuvieran sentido las preguntas.

¿Comprar o esperar?

Es muy posible que usted no haya escuchado nunca hablar de Oren Etzioni. Yo tampoco hasta hace un par de días. Fue allí cuando me tropecé con una historia singular que quiero compartir.

Etzioni es profesor de "Inteligencia Artificial" en Seattle, la Universidad del estado de Washington, en el noroeste de los Estados Unidos. Muy cerca, en Redmond, está el cuartel general de Microsoft y también allí se construyen los aviones de la Boeing. Etzioni es uno de las personas con mayor prestigio en esa área de la ciencia y hace unos días fue contratado[28] por Paul Allen, uno de los cofundadores con Bill Gates de Microsoft.

Corría el año 2003. Etzioni tenía en ese momento un hermano que vivía en Los Ángeles. Cuando éste estableció la fecha de su casamiento le avisó a Oren porque quería que fuera uno de los testigos. Como faltaban casi ocho meses, Oren decidió comprarse el pasaje en avión para que le saliera más barato. Finalmente, llegó el día del viaje y Etzioni quiso comprobar lo que sospechó desde un principio: con tanto tiempo de anticipación debería haber pagado muchísimo menos que quienes lo hubieran comprado después.

28. Allen lo contrató para que sea ahora director ejecutivo del Allen Institute de Inteligencia Artificial.

Y llegó el día del viaje. Ni bien el avión alcanzó su 'altura de crucero' le comentó al pasajero que tenía a su derecha lo feliz que estaba porque había logrado un precio tan barato por el boleto. Su compañero de fila no sólo no se inmutó, sino que le dijo que él había pagado casi un 40% menos. Etzioni, sorprendido, le preguntó entonces si había comprado el pasaje por internet (como había hecho él), y éste le contestó que sí. Eso no fue todo: le dijo que como le avisaron que tenía que viajar a Los Ángeles con urgencia, había terminado comprando el boleto el día anterior. Oren estaba enfurecido. Pensó que quizá sería uno de los últimos pasajes y la compañía había decidido 'rematarlos' para que el avión no saliera con asientos vacíos. Y comenzó a averiguar alrededor de él, en las filas anteriores y posteriores. Ya desesperado descubrió lo peor: *todos* habían pagado menos que él. Y no sólo eso: *todos* habían comprado sus boletos *después que él*.

Si esto nos hubiera pasado a usted y/o a mí es posible que nos hubiéramos fastidiado también, pero las acciones que tomó Etzioni fueron ciertamente diferentes de las que —creo— hubiéramos tomado nosotros. Por eso quiero escribir esta historia.

Oren Etzioni fue el primer graduado que Harvard tuvo en el año 1986 en ciencias de la computación. Como ya era profesor en la Universidad de Washington, aprovechó todos sus conocimientos (y contactos) científicos y se propuso tratar de averiguar cómo conseguir y usar bases de datos para *predecir* si los pasajes entre cada par de ciudades subirían o bajarían de precio en función del tiempo. De hecho, pensó a cada asiento como si fuera un objeto que se cotiza en alguna bolsa de comercio. Naturalmente, las compañías aéreas no le darían la información de cómo determinan el precio de cada asiento, pero las variables para hacer lo que él quería son muchas: distancia temporal con la partida, lugar en la cabina, tipo de avión, precio de la competencia, frecuencia de los vuelos, partes meteorológicos, unidades disponibles en la flota de aviones en el momento del vuelo, épocas del año, días de la semana, horario del día, disponibilidad de 'puertas' para el embarque y desembarque, peso de la carga, precio del combustible en esa fecha, disponibilidad de la tripulación, etc. Pero también hay que considerar que —como decía anteriormente— cuando un avión está programado para salir, una vez que está garantizado un número mínimo de pasajeros, la compañía necesita *llenar* el espacio disponible. Cada asiento que sale vacío, implica una pérdida. Las compañías *tienen* su algoritmo para tomar esas decisiones, pero para nosotros, los pasajeros, esa información es transparente, o si usted prefiere, nos está vedada.

Etzioni sabía que él no podría *asegurar con un 100% de certeza* cualquier predicción realizada con su algoritmo. Podría sí hablar de probabilidad: en función de lo que había sucedido en otras situaciones equivalentes, el sistema de Etzioni debía ser capaz de calcular la probabilidad de que el precio subiera o bajara, e ir ajustando sus predicciones a medida que se acercara la fecha de partida. O sea, su objetivo no era reproducir lo que hacen las líneas aéreas, sino dar un servicio al cliente advirtiéndole qué probabilidad hay de que el precio suba o baje y, en función de ello, sugerirle que o bien espere o bien que compre. En algún sentido, sería como si Etzioni pudiera extrapolar la encuesta privada que hizo con sus compañeros de vuelo ese día (consultándoles la fecha y el precio que habían pagado) y confeccionarla seriamente con un número mucho mayor de personas. El problema era ideal para ser abordado por un programador, quien debía diseñar un algoritmo que tomara la mayor cantidad de datos posible para descubrir las tendencias que tenían encerradas. Y acá está la clave (y le pido que me preste atención): Etzioni no quería competir con las compañías aéreas para saber 'por qué' debería pasar algo, sino solamente deseaba predecir 'qué y cuándo' habría de pasar en función de lo ocurrido antes. Era una tarea muy difícil, pero no imposible.

Una pausa para incluir brevemente a dos actores más. Viktor Mayer-Schonberger nació en Austria, es doctor en derecho y profesor en la Universidad de Oxford, Inglaterra. Por otro lado, Kenneth Cukier es un periodista inglés, corresponsal en Japón durante seis años y editor del famoso diario británico *The Economist*. ¿Por qué hablo de ellos en este lugar del relato? Porque ambos entrevistaron a Etzioni para saber qué y cómo hizo para lograr su propósito.

Etzioni les contó que —en principio— siguió el precio de 12 mil boletos rastreando información por internet, en base a los datos de un par de agencias de viaje, durante un período de 41 días. Eso le alcanzó para diseñar un modelo que podía predecir —aún modestamente— qué convenía hacer: comprar o esperar. El algoritmo sería efectivo si sus predicciones de comprar o esperar superaban el 50% de aciertos. Es decir, uno siempre parte con la alternativa de tirar una moneda: si sale cara, comprar. Si sale ceca, esperar. ¿Cómo hacer para mejorar ese algoritmo? O puesto en términos de Shakespeare: "¿Comprar o no comprar?". A tal punto fue así que su proyecto se llamó Hamlet.

Para tener idea y poner en perspectiva acompáñeme en este trayecto. Lo que Etzioni necesitaba entonces era conseguir los siguientes datos: tomar dos ciudades cualesquiera; elegir un vuelo cualquiera que las uniera, en principio sin escalas; fijar una compañía (si es que había) que ofreciera el servicio; seleccionar cada asiento de la cabina, dependiendo del tipo de avión que utilizaran para cubrir el trayecto; detectar el primer día en el que era posible pagar/reservar un pasaje, y empezar a llevar un registro de esos datos.

A medida que iba pasando el tiempo, debía analizar la fluctuación de cada uno de esos precios cuando se acercaba la fecha del viaje propiamente dicho; incorporar el dato adicional de permitir escalas y determinar cómo alteraba el valor del asiento; incluir también la posibilidad de utilizar días alternativos, y considerar aeropuertos cercanos.

Como usted advierte, ya es abrumador el solo hecho de tratar de hacer una descripción exhaustiva de los datos a tener en cuenta. Pero si bien se necesita una 'tonelada' de datos, las computadoras pueden almacenarlos.

Después, hay otra historia: hay que comparar lo que sucedía con otras compañías que ofrecían el mismo servicio, o sea, la competencia. Y finalmente, cuando el vuelo se materializaba, saber cuáles habían sido los precios pagados por cada asiento, el precio *real*. Y no me quiero olvidar de algo importante: el número de asientos vacíos con el que salió el vuelo para poder interpretar y/o predecir lo que sucedería en el futuro.

Por supuesto, tener los datos es esencial, pero insuficiente. Después, hay que escribir un algoritmo que sepa qué hacer con ellos. Es decir, si alguien me diera *toda* esa información a mí, ¿estaría yo en condiciones de contestarle a un amigo si le conviene comprar o esperar un determinado pasaje? ¿Podría yo justificar mi predicción?

Un ser humano, por mejor capacidad de análisis que tenga, no tiene —ni de cerca— la posibilidad de revisar/rastrillar/ordenar todos esos datos. Es como el caso de las computadoras que juegan al ajedrez. En un momento, cuando apareció Deep Blue[29], el ser humano estaba (todavía) en condiciones de

29. Deep Blue fue el nombre que recibió una computadora diseñada por IBM para jugar al ajedrez. El 11 de mayo de 1997, se convirtió en la primera

'pelear' una partida. Hoy es imposible: la computadora gana siempre.

Bien, eso fue lo que hizo Etzioni.

Pero para lograrlo, se consiguió algunos compañeros de camino. Consiguió gente que respaldó su proyecto, o dicho de otra forma, gente que puso dinero y se asoció a él. Formó una sociedad que llamó Farecast[30] (algo así como un pronosticador de tarifas). El programa no sólo predecía cuál era la probabilidad de que los boletos subieran o bajaran, sino que anunciaba sus predicciones en forma pública. Además, dejaba un registro en la página Farecast.com para que el propio público pudiera seguir los vaivenes de los precios, como quien sigue el valor de una acción en la bolsa. Como escribieron Schonberger y Cukier, el proyecto necesitaba —para mejorar el cálculo de probabilidades— conseguir más datos, muchos datos, 'toneladas de datos'. Hasta que lo logró. Etzioni no revela en sus comentarios quién fue, pero pudo finalmente tener acceso a la base de datos de una de las compañías aéreas más importantes de los Estados Unidos. No le dieron el algoritmo, sino que consiguió la evolución de los precios. Eso fue suficiente.

A partir de allí, su sistema podría predecir con una probabilidad aceptable si convenía comprar o no un pasaje, basado en el valor de '***todos*** los asientos de ***todo***s los vuelos' de la mayoría de las rutas norteamericanas de aeronavegación comercial en el

---

máquina diseñada por el hombre en derrotar a quien era en ese momento el campeón mundial el ruso Garry Kasparov. Deep Blue y Kasparov jugaron seis partidas: la computadora ganó dos, Kasparov una y empataron las tres restantes.

30. *Forecast* en inglés significa 'pronóstico'. *Fare* quiere decir 'tarifa'. La compañía se llamó Farecast uniendo los significados de las dos palabras, como si pudiera 'predecir la tarifa'.

curso de un año. Los datos involucrados son escalofriantes: el programa analiza casi 200 mil millones (sí, doscientos mil millones) de números para hacer sus predicciones.

El éxito y el entusiasmo fueron instantáneos. Cuando Etzioni había decidido ampliar la compañía para hacer predicciones no sólo en la industria de los pasajes aéreos sino también anticipar si convenía reservar habitaciones de distintos hoteles o establecer la probabilidad de comprar o no autos usados... en ese momento, año 2008, apareció Microsoft y le compró el algoritmo y la idea. Eso sí: la compañía de Bill Gates le pagó 115 millones de dólares.

Según Schonberger y Cukier, en el año 2012 el sistema hizo predicciones correctas en tres de cada cuatro veces que fue utilizado, o sea, un 75%. No es poco. Como suele suceder cuando un 'grande' se 'come' a un 'chico', Microsoft incorporó lo que fue Farecast a su 'buscador' Bing. Ahora, usted y yo podemos acudir a Bing, obtener el servicio e ignorar el origen. Sin embargo, creo que la historia, esta historia, merecía ser contada con otro énfasis.

Para el final, algo para pensar. Todos repetimos una idea que es muy cierta: las computadoras actuales son cada vez más rápidas, cada vez tienen más capacidad de guardar datos y cada vez la memoria es más barata. Todo bien. Pero esa capacidad de almacenamiento y la rapidez para poder bucear y rastrear la información, es la que está permitiendo descubrir mensajes escondidos en esos datos que ni siquiera sabíamos que existían. Lo notable es que todo esto es un campo 'casi' virgen. El que llega primero se queda con todo. Y eso es lo que necesita el país (entre otras cosas, claro está): promover las llamadas ciencias 'duras'. Hacen falta más matemáticos, programadores, analistas de sistemas, criptógrafos, físicos, químicos, nanotecnólogos, ingenieros, biólogos, geólogos, biogenetistas, analistas de sistemas, gente que se dedique a la aviónica, a la industria del video juego (sí, el video juego, de donde surgen 'infinitas' ideas), al diseño de satélites, etc. Aquí es donde están las mayores posibilidades para inventar y desarrollar. O si usted prefiere, necesitamos capacitar cada vez más gente en estas áreas para estimular y facilitar el acceso a la información y educación de nuestro jóvenes y, sobre todo, generar las condiciones para que puedan expresar su capacidad creativa de manera tal que aparezcan y florezcan nuestros 'Etzioni'[31].

31. Carlos Sarraute me hizo el siguiente agregado: "Sí, hacen falta más personas como Etzioni, pero también hace falta un *ecosistema* que permita transformar *ideas* en *valor*. Es posible que un 'Etzioni' argentino habría tenido muchas menos chances de vender su empresa en 100 millones de dólares si estuviera radicado acá".

Captcha y Recaptcha

¿Cuántas veces le pasó que quiso entrar en alguna página de internet y se tropezó con que tenía que 'interpretar' una o dos palabras que en principio no tenían ningún sentido? Aparecen 'deformadas', mezclando minúsculas con mayúsculas, en ocasiones también aparecen números. La mayoría de las veces son difíciles de leer correctamente y uno tiene la sensación de que si no puede contestar bien lo que le preguntan *nunca más podrá acceder a ese sitio*. Con el tiempo uno aprende que el programa le ofrece otras oportunidades y ya no se siente tan frustrado. Además, como uno sospecha que lo hace por cuestiones de 'seguridad' y pareciera que hay alguien que está 'monitoreando' lo que hacemos y quiere protegernos, uno se esfuerza (en soledad, ciertamente) por tipiar las dos palabras (o lo que parecen como palabras) con todo cuidado. Hasta acá, todo bien. Lo hemos incorporado *casi* como una forma de vivir con internet, sobre todo cuando uno ingresa a hacer una operación que involucra dinero (transacción bancaria, compra de boletos para eventos deportivos o películas o adquisición de ropa o libros o música). En suma, uno lo hace y no se cuestiona demasiado. Ahora bien, la pregunta es: ¿qué hay detrás de ese sistema? ¿Quién lo inventó? ¿Para qué sirve exactamente?

Situémonos en el año 2000, a principios de este siglo. Todo lo que tuviera que ver con internet estaba siendo recién explorado pero ya se había producido el boom que interrelacionaba y conectaba al mundo. Los privilegiados que tuvimos acceso virtualmente desde el comienzo recibíamos con fastidio correos no deseados, enviados por gente que *no* conocíamos, ofreciéndonos artículos (o servicios) que *no* queríamos, y lo peor es que parecían saber (aún hoy) quiénes éramos, ya sea usando el nombre, el apellido o la dirección electrónica.

El origen de cada correo era una casilla que o bien rebotaba los mensajes de vuelta o bien los ignoraba. Más aún: cada uno de nosotros era *uno entre miles o cientos de miles* que recibíamos el mismo correo electrónico. Era imposible que una persona física se propusiera mandar todos esos mensajes al mismo tiempo por lo que, pensando un poco, es fácil imaginar que debería haber algún programa que tomaba la base de datos de alguna compañía con la información personal de todos nosotros, y preparaba automáticamente una lista de destinatarios a los que les enviaría ese mensaje. Y hasta allí quería llegar.

Esos mismos programas no sólo servían/sirven para enviar correos en forma masiva, sino que también simulan ser *humanos* que tratan de ingresar a algún sitio de internet.

Tomemos como ejemplo a una empresa que ofrece la compra por internet de entradas para ir a un concierto o a un partido de fútbol. Si un programa de computadora pudiera ingresar sistemáticamente y comprar *todos* los tickets que se ofrecen para después revenderlos, no habría manera de descubrirlo. En cambio, si aparece la intervención humana, allí sí uno puede desenmascarar a los revendedores y ponerles un límite.

Es que si las empresas que proveen los servicios que uno quiere adquirir (un libro o una canción o, como decía anteriormente, una entrada para un evento musical o deportivo) tuvieran que verificar que quien está haciendo el pedido es una persona 'de verdad' y no una máquina, el costo involucrado sería imposible de sostener.

Y allí es donde apareció el joven Luis von Ahn. A pesar de que su apellido —de origen alemán— no lo demuestra, Von Ahn nació en Guatemala. Se doctoró en Ciencias de la Computación en la Universidad de Duke, en Carolina del Norte, Estados Unidos. En el año 2000 tuvo una idea revolucionaria. En lugar de tener que contratar personas que 'atendieran' los pedidos de los usuarios y lograran determinar cuáles eran ficticias y cuáles eran reales, Von Ahn diseñó un método extraordinario: las computadoras aún hoy son *incapaces* de 'leer' esos jeroglíficos que nosotros usamos como letras si están distorsionados o aparecen borroneados. Como le habrá pasado a usted, cuando uno tiene que 'leer' la palabra que le proponen, en principio hay que hacer un esfuerzo para 'descifrar' las letras y/o números involucrados. Con todo, un humano lo puede hacer. Para la computadora, es virtualmente imposible.

Luis von Ahn advirtió que había descubierto (o inventado) una herramienta poderosísima. La llamó 'Captcha'. Parece un nombre raro pero son las iniciales en inglés de estas palabras: "Completely Automated Public Turing Test to Tell Computers and Humans Apart". En castellano, mi traducción libre sería "Test de Turing Completamente Automático para Distinguir Computadoras de Seres Humanos". ¿Por qué 'Test de Turing'? Porque con ese nombre se conoce al test introducido por el matemático inglés Alan Turing[32], quien se convirtió en el verdadero

32. Le propongo que lea el artículo que apareció sobre Alan Turing en la contratapa de *Página/12* el 27 de agosto del año 2008. También

héroe en la Segunda Guerra Mundial luego de haber descifrado el código de encriptación de los alemanes[33] y que —según los que entienden de historia— fue el dato clave para que los aliados ganaran la guerra. En 1950 Turing escribió su trabajo fundacional llamado "Computing Machinery and Intelligence"[34].

Pero me desvié. En el año 2000 aparecen en escena los Captcha. El portal Yahoo utilizó la idea inmediatamente y eso hizo que Von Ahn pasara a tener una fama instantánea. Una vez que se doctoró, fue contratado como profesor en la prestigiosa Universidad de Carnegie Mellon en Pittsburgh, y cuando cumplió 27 años la Fundación MacArthur otorgó uno de los premios a los jóvenes considerados 'genios'. En dinero, 500 mil dólares.

Curiosamente, ése no fue el final, sino una etapa intermedia para Luis von Ahn: tuvo *otra* idea que, creo, es incluso más potente que la anterior. Voy a imaginarme su potencial línea de pensamiento con el riesgo —obvio— de estar alejado de la realidad, pero eso es irrelevante.

Luis von Ahn debe haber visto que, cinco años después de que apareciera (y patentara) Captcha, millones de personas se pasaban varios segundos de su día tratando de descifrar un código formado por cuatro o cinco jeroglíficos. Y todo por el solo afán de demostrar que esas personas éramos/somos humanos (y no máquinas). ¿Cómo aprovechar semejante energía y esfuerzo?

Entonces, se le ocurrió lo siguiente: como escribí antes, los programas actuales tienen problemas para interpretar símbolos

---

se puede ver en http://www.pagina12.com.ar/imprimir/diario/contratapa/13-110452-2008-08-27.html

33. Conocido con el nombre de 'Enigma'.

34. "Maquinarias para computación e inteligencia", en donde Turing se cuestionaba si las computadoras 'pueden *pensar*'.

cuando no son 'parejos' o esperables. Este tipo de programas se llaman OCR, Optical Character Recognition ('reconocedor óptico de caracteres'). Si bien ahora son muy potentes, todavía no son capaces de descifrar palabras que no están escritas en forma consistente con el resto del texto, que aparecen borroneadas o distorsionadas, o porque las páginas están amarillas por el paso del tiempo. De hecho, el propio Von Ahn dice que para libros que fueron escritos hace más de cincuenta años, los programas OCR sólo pueden *comprender* el 70% del texto. Ni hablar además de libros escritos en la Antigüedad. ¿Qué hacer entonces?

A Von Ahn se le ocurrió que en lugar de poner *una sola* palabra, pondría dos. ¿Por qué *dos* palabras? La primera serviría para descubrir a los que no fueran humanos, y la segunda, para que un humano *tratara de interpretar* una palabra que el programa 'reconocedor de caracteres' no podía.

Entonces, cuando uno ve *dos* palabras, tiene que entender que está ofreciendo dos funciones: la primera es la misma que cumplía Captcha, o sea, autenticar que uno es un ser humano. La segunda es cooperar con la digitalización de un libro, por ejemplo. A este nuevo protocolo, Von Ahn lo llamó 'ReCaptcha' y es el que se usa en la actualidad.

De hecho, el programa envía esa segunda palabra diez veces de manera que diez personas diferentes hagan el trabajo de 'desentrañar' lo que quiere decir. Cuando las diez dijeron lo mismo, la palabra queda descifrada y el digitalizador da por aceptado ese texto.

Sin embargo, hay algo más que quiero incluir en este texto. Pensemos en términos económicos: si uno invierte —en promedio— *diez* segundos por usuario y se estiman alrededor de 200 millones de ReCaptchas diarios en el mundo, eso significa más de 550 mil horas-hombre por día[35]. Si uno tuviera que contratar a trabajadores 'humanos' dedicados a hacer este trabajo y les pagara un salario *muy mínimo* de 30 pesos por hora, esas empresas deberían invertir alrededor de 16 millones de pesos diarios. Tomando el salario mínimo por hora en los Estados Unidos (un poco más de *siete* dólares), el dinero involucrado sería de 4 millones de dólares diarios, lo que equivale a más de 1.000 millones de dólares por año.

Lo que hizo Von Ahn permite ahorrar ese dinero y hacer —entre todos— un esfuerzo común en forma inadvertida; dicho de otra manera, estamos *todos* trabajando sin saberlo. Y gratis.

No puedo terminar este artículo sin decir que Google adquirió la tecnología que ideó Von Ahn en el año 2009 y ahora ha sido incorporada a más de 350.000 sitios de internet, incluidos Facebook y Twitter. Con esta tecnología Von Ahn sostiene que se están *descifrando* en el orden de 100 millones de palabras por día, lo que permite inferir que sirve para digitalizar alrededor de 2 millones y medio de libros por año. Hasta el año 2012, de acuerdo con sus datos, participaron más de 750 millones de personas distintas en digitalizar al menos *una palabra*. O sea, más del 10% de la población mundial participó del proyecto.

La causa que impulsa a Google es muy noble: está haciendo un esfuerzo descomunal —que celebro— por digitalizar *todos* los libros desde que los humanos dejamos registros escritos. Lo que sucede es que en el camino participamos todos y no lo sabíamos. ¿O usted tenía idea?

---

35. En este sitio de internet, está la conferencia TEDxCMU que el propio Luis von Ahn dio en Carnegie Mellon: http://tedxcmu.com/videos/luis-von-ahn

Encuestas siglo XXI

La irrupción de las redes sociales en el paisaje que compone nuestra vida cotidiana, le agrega a la clase política y en particular al gobierno una herramienta básica para sondear a la opinión pública. Saber qué nos duele, nos importa, nos interesa, determinar qué es lo que está pasando en 'el llano', conocer hacia dónde está mirando 'el pueblo' tendría que tener una incidencia muy fuerte sobre los integrantes del poder ejecutivo y sobre los legisladores. Si bien falta poco para que podamos expresarnos de manera directa, en tiempo real y en forma masiva, todavía es necesario apelar a una herramienta clásica y básica: las encuestas.

Históricamente el problema a resolver es el siguiente: si somos 40 millones de habitantes, ¿cómo hacer para averiguar lo que pensamos todos preguntándole solamente a un grupo reducido de personas?

Los que vivimos en esta primera parte del siglo XXI sabemos cómo funciona una encuesta, pero lo que también tengo claro es que lo que *no* sabemos es *por qué* funciona. Es decir: ¿cómo puede alguien arrogarse el derecho a decir que conoce lo que piensa 'la gente' si solamente consultó a un grupo pequeño? ¿En qué se basan quienes hacen las evaluaciones para poder decidir?

Pareciera que no nos queda más remedio que creer, casi como si fuera una religión. 'Alguien dice' que conociendo la opinión de un poco más de mil personas es suficiente para saber lo que pensamos todos, y los demás le creemos. Pero, ¿es realmente así? ¿Cómo se hace una encuesta y por qué funciona? O mejor dicho, ¿por qué *debería* funcionar?

Lo extraordinario es que la respuesta la provee —una vez más— la ciencia. En este caso, la matemática. De hecho, en forma sistemática nos bombardean con encuestas que nos radiografían diariamente y que sirven para decirnos en forma periódica qué es lo que pensamos, qué nos gusta, qué queremos, qué nos quita el sueño, qué querríamos tener, con qué fantaseamos, dónde querríamos ir, qué trabajos querríamos tener, qué comida nos gusta, qué es lo que *creemos* que necesitamos, etc. Todo se reduce entonces a encuestar. O a encuestarnos, si usted prefiere.

Empiezo por el lugar obvio: siempre hay una forma de saber lo que piensa un grupo grande de personas: ¡preguntarles a todas! Esto es lo que se hace el día de una elección o de un plebiscito. Pero claro, esta solución tiene un problema (muy grande): es muy costosa. Hay que parar el país durante todo un día, involucrar forzosamente a una buena parte de la población para que haga de 'jueces/jurados', imprimir una cantidad enorme de 'boletas', renovar credibilidades (DNI, libretas de enrolamiento, libretas cívicas, o todas las variantes que usted pueda incluir), invadir escuelas, iglesias, clubes, parroquias, etc. Y como dije al principio, tiene un costo descomunal.

Este ejercicio lo practicamos periódicamente para renovar parte del Congreso o para elegir presidente o gobernadores; sin embargo, no lo hacemos para pulsar la opinión de la población en temas ríspidos, controversiales y de difícil solución (aborto, eutanasia, legalización de ciertas drogas para uso personal, por poner algunos ejemplos puntuales) u otros que serían más pedestres pero relevantes para ciertos subgrupos poblacionales en distintas regiones del país. El último plebiscito que yo recuerdo tuvo que ver con el que casi termina en un conflicto bélico con Chile.

Como es fácil advertir, hay momentos en los que es necesario 'saber' qué piensa la población, sólo que no es posible ni sustentable estar haciendo una compulsa popular frente a todo tema que necesitamos evaluar. Sería casi como vivir en un estado de *asamblea permanente*. Entonces, ¿qué hacer? Históricamente, la solución pasa por organizar una *encuesta*. Es decir, se pretende diseñar un método que permita consultar a un grupo reducidísimo de personas y, en función de los resultados que se obtengan, *extrapolar* los porcentajes e imaginar entonces que uno *sabe* lo que piensa la población toda para luego obrar en consecuencia.

En todo lo que sigue voy a hablar como si los encuestadores y organizaciones que se dedican a encuestar en el país no tuvieran ni nombre ni apellido. Y desde el punto de vista de la matemática, pero con una observación: *no es mi especialidad*[36].

Empiezo con algunas preguntas. Voy a suponer que la idea es pulsar la opinión de los argentinos sobre un determinado tema, no importa cuál.

a) ¿Es posible consultarle a un grupo de dos mil personas lo que piensa sobre algo e inferir —rigurosamente— lo que sucedería si le preguntáramos a los 40 millones? ¿Es serio eso? Más aún: ¿es científico?

---

36. Si bien no es mi especialidad, alguna vez, allá lejos y hace tiempo, fui el profesor responsable durante algunos años de la materia Probabilidades y Estadísticas en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA.

Sí. Si la encuesta está bien hecha, en forma rigurosa, cumpliendo con los requisitos indispensables (de los que voy a hablar un poco a continuación), no sólo se puede inferir lo que piensa un universo de 40 millones de personas sobre un determinado tema sino que incluso se puede calcular (o estimar) el error que se comete. La matemática ofrece esas herramientas.

b) ¿Se obtiene una respuesta *perfecta*?

No, no es perfecta pero es muy aproximada. Tanto que uno puede incluso calcular a lo sumo cuán lejos va a estar de la respuesta 'real', o sea, la que se obtendría si se consultara a *todas* las personas.

c) ¿Cualquier grupo de dos mil personas sirve?

No, no cualquiera. El grupo tiene que ser elegido 'al azar'. Y ése es un tema NO menor. Aunque parezca trivial, no es tan sencillo 'elegir al azar'.

d) ¿Tienen que ser dos mil personas exactamente? ¿No pueden ser menos? O al revés: ¿no convendría que fueran más?

Depende del 'error' con el que usted quiera hacer su cálculo. Cuanto menor sea el número de personas que integren "la muestra", mayor será el error que se cometa. Sin embargo, si bien es cierto que cuantas más personas usted encueste menor será el error cometido, llega un cierto punto 'casi de saturación' en donde por más que uno incremente mucho el número de personas que participan de la muestra, las ventajas son muy pequeñas.

De hecho, con 1.100 personas, los datos que se obtienen son muy buenos y permiten tener —en la mayoría de los casos— una idea bastante fina de lo que pasa con el universo total. El error se estima en más o menos un 3% del valor real.

e) ¿Las 1.100 personas dependen de que los argentinos seamos 40 millones? ¿Y si fuéramos más? O sea, si una encuesta se hiciera en Alemania (80 millones) o en China (1.354 millones), ¿hace falta encuestar a más personas? Y si fuera en Cuba (11 millones) o en Uruguay (un poco más de 3 millones), ¿alcanzarían menos?

No, y esto es verdaderamente anti intuitivo y extraordinario al mismo tiempo. La muestra de 1.100 personas es *independiente* del número que conformen el universo total. Da lo mismo que sean 40 millones, 400 millones o 4.000 millones. Si me lo permite, le sugiero que *no siga leyendo tan rápido sin dedicarle un instante a pensar lo que acaba de leer*: ¡no importa cuál sea la población total, si uno elige 'al azar' 1.100 personas, el valor obtenido sobre el tema que a usted le interesa encuestar será una aproximación en más o menos 3% del valor que le daría si usted les hubiera preguntado a todos!

f) ¿Qué particularidad tienen que tener las 1.100 personas? ¿Cómo se eligen?

Como decía anteriormente, éste es un dato *clave* y *crucial*. La elección de las 1.100 personas TIENE QUE SER AL AZAR. Los humanos tenemos muchas dificultades para entender *bien* lo que significa 'al azar'. De hecho, hay mucha literatura escrita que explica la dificultad de generar 'números al azar', aunque parezca una trivialidad.[37]

---

37. No se conocen formas de generar números al azar ni siquiera usando computadoras. El problema es que toda computadora 'corre' un programa. Si uno descubre cuál es el programa que está generando los números, entonces puede 'anticipar' lo que va a salir. El tema es precioso pero muy largo y ha dado lugar a muchísimo material escrito. De hecho, los números que se pueden generar se llaman 'al *pseudo* azar'.

Hay múltiples ejemplos de desviaciones brutales que se produjeron porque las muestras no cumplieron con esta regla *básica*[38].

Ahora sí, algunas reflexiones. Estoy seguro de que usted escuchó hablar de 'margen de error'. ¿Qué quiere decir? Confronte lo que sigue con su *idea* sobre el 'error'.

En principio (y digo en principio porque *no es todo* lo que dice), cuando a uno le hablan de 'margen de error' en realidad le están informando que se trata de "un número que mide la 'tolerancia' que usted se permite aceptar, entre el valor 'real' (si se pudiera consultar a toda la población) y el valor que resulta luego de haber realizado la encuesta".

Por ejemplo: supongamos que uno quisiera saber si los argentinos estamos a favor o no de la legalización de la marihuana para uso personal, y los resultados obtenidos al encuestar a 1.100 personas fueron que un 75% opina que sí y un 25% opina que no.

El hecho de que se hayan encuestado a 1.100 personas al azar significa que el resultado tiene un 'margen de error' de más/menos 3%. Pero un momento: acá quiero hacer una pausa para una reflexión que creo importante.

De acuerdo con lo que escucho habitualmente, la conclusión que saca una persona ante estos datos, es que el *verdadero valor* (si consultáramos a todos los argentinos) de los que están a favor de la legalización de la marihuana para uso personal es un número que 'cae' entre un 72% y 78%[39]. En principio es una es-

---

38. Hace poco más de un año, el 6 de enero de 2013 apareció en *Página/12* un artículo muy sugerente al respecto. Se puede ver también en http://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-211281-2013-01-06.html

39. Ya que 75% - 3% = 72%, que daría el extremo inferior del intervalo, y 75% + 3% = 78%, que daría el extremo superior del intervalo.

timación correcta, aunque con un *asterisco*. Y présteme atención porque se trata de un detalle que no siempre aparece al revelar el resultado de una encuesta y constituye —creo— una novedad: hace falta agregar que esto sucedería un 95% de las veces.

¿Cómo un 95% de las veces? En general, uno no escucha *nunca* hablar de este hecho. Me explico: un 95% de las veces el resultado obtenido por la encuesta caería en ese intervalo (72% a 78%), pero NO SIEMPRE. Es decir, si uno hiciera la encuesta 100 veces y le preguntara a 100 muestras de 1.100 personas diferentes cada vez, entonces el valor caería entre 72% y 78% en 95 de las 100 encuestas... ¡pero no necesariamente en todas!

Y esto se relaciona con el potencial 'error en la muestra'. Parece un tema menor, pero no lo es. Si bien las muestras son tomadas al azar, *presentan un margen de error*. Uno está tentado de ignorarlo, y posiblemente se lo pueda permitir, pero *es necesario observarlo*, aunque sea un poco más engorroso de entender. En la vida cotidiana, y sobre todo en los medios de comunicación, se tiende a *ignorar* o *minimizar* este hecho que al menos requiere ser descripto alguna vez. Uno está más o menos tranquilo de que los resultados van a estar bien, porque en 95 de 100 casos 'va a dar lo que debe', pero, al mismo tiempo, es bueno saber que hay *cinco* casos de esos cien en donde 'puede que no'. Y lo notable es que la matemática *¡también mide este tipo de error!*

De hecho, si uno quisiera ser riguroso y tratar de 'eliminar' los errores tanto como fuera posible, conviene repetir las encuestas varias veces con diferentes grupos de personas y luego hacer un 'promedio' con esos resultados[40].

Ahora, quiero volver al 'número' de personas que integran la muestra. Si fuera todo tan fácil, yo podría elegir un subgrupo de

---

40. Véase subnota 3 y la historia de Nate Silver.

diez personas y listo. Les pregunto a ellos, me fijo en el resultado y se terminó la historia. Con esta idea quiero plantear que ninguno de los dos extremos es aceptable: ni preguntarle a diez ni preguntarle a 40 millones. Entonces, ¿qué hacer? Uno comienza a aumentar el grupo de personas a encuestar y a estimar el error que comete. Está claro que diez son insuficientes, pero ¿cuántas hacen falta? ¿Cincuenta? ¿Cien? ¿Mil? ¿Diez mil? ¿Cien mil?

Si la respuesta va a ser —por ejemplo— cien mil, aunque sea mucho mejor que 40 millones, hay algo que 'falla'. Cien mil son muchísimos todavía: *tenemos que reducir el número*. Y mucho. ¿Cuántos entonces? ¿Cincuenta mil? No. ¿Diez mil? Ahora ya no sé. ¿Serán necesarios diez mil? Si bien querría seguir bajando, diez mil es bastante más manejable. Sigue siendo un número grande pero no imposible. Yo podría seleccionar al azar diez mil personas y preguntarles… pero, ¿estará bien? ¿Serán suficientes diez mil para poder inferir lo que queremos?

¿Qué tendrá la matemática para decir? ¿En qué lugar uno podría —o debería— hacer el corte? ¿No se podrá disminuir más? Y si lo reducimos, ¿cuánto nos estamos perdiendo? O mejor dicho, ¿cuánto estamos dispuestos a sacrificar? ¿Cuánto nos empezamos a alejar de la realidad?

Y acá paro. La/lo invito a mirar el siguiente listado y luego voy a 'intentar' dar una explicación sobre cómo interpretarlo y hacer algunas observaciones importantes sobre el origen del cuadro y los cuidados que hay que tener.

Tamaño de la muestra	+/- 'error porcentual'
50	14
100	10
200	7
300	6
400	5
500	5
600	4
700	4
800	3.5
900	3.5
1.000	3.1
1.100	3
....	
2.400	2
....	
9.600	1

En principio, fíjese en las dos columnas. En la de la izquierda, se lee: "Tamaño de la muestra". En la de la derecha, "Margen de error de la muestra". ¿Cómo entender esto? Me explico.

La parte izquierda no ofrece problemas: mide cuántas personas fueron consultadas. A su vez, la columna de la derecha mide el 'error' —en porcentaje— que se comete (en más o en menos). Fíjese cómo al pasar de 50 a 400, el error disminuye de un +/- 14% a un +/- 5%. Más aún, si uno encuesta a 1.100 personas, el error ahora se reduce a +/- 3%. Por último, para tener un error de +/- 1% hace falta ahora encuestar a 9.600 personas[41].

---

41. El error de la muestra se calcula como la inversa de la raíz cuadrada del número de personas que la componen. De allí surge esta 'tabla'.

Por lo tanto, el error que uno se permita tolerar indicará el tamaño de la muestra que uno tendrá que elegir.

Final

Las encuestas no sólo son necesarias sino que se han transformado en imprescindibles para conocer el pulso actualizado de lo que está sucediendo con la sociedad a la que 'afectan' sus decisiones. Es imposible hacer plebiscitos constantes, las redes sociales dan una información tremenda en términos cuantitativos y también cualitativos, los medios de comunicación masivos intentan instalar los 'temas' que deberían figurar en las agendas de los gobernantes; pero son esas mismas redes sociales las que exhiben sin filtro lo que le importa a 'la gente' o a los que habitamos un país. Saber hacer una encuesta, realizarla con honestidad, elegir muestras verdaderamente al azar, medir los datos en forma confiable y, sobre todo, establecer un 'vínculo' entre lo observado y las decisiones futuras, es sólo el medio a través del cual un gobierno ahora se puede tildar de 'moderno' y además de 'sensible'. No son más las tapas de los diarios las que indican el camino. Somos nosotros mismos. Eso sí: hace falta 'escucharnos'.

Subnota 1

¿Cómo elegir 1.100 números al azar?

Voy a poner un ejemplo de lo que sería 'al azar' en el caso del padrón electoral argentino.

Supongamos que usted está delante de todas las personas habilitadas para votar. Supongamos también que somos 30 millones. No importan los nombres, pero sí el número de cada DNI. Ahora bien: ordenemos a estas personas NO en forma creciente ni decreciente[42], sino por el *dígito final*. Es decir, agrupemos a todos los DNI que *terminan* en el número cero, después a los que terminan en uno, luego a los que terminan en dos... y así hasta los que terminan en *nueve*.

Como necesitamos elegir 1.100 números de esta lista, vamos seleccionando uno cada 27.272 DNI[43]. Ésta es sólo *una* forma de elegir al azar. Ciertamente no es la única ni mucho menos. Pero *no sería al azar* tomar los números de teléfono (porque no toda persona del padrón tiene teléfono), ni elegir la misma cantidad de mujeres que de hombres (porque eso sería 'dirigir' la encuesta), ni tratar de juntar la misma cantidad de jóvenes que de personas más adultas, ni los distintos grupos de socios de un club, etc. Toda selección 'a priori' distorsiona 'el azar'.

Subnota 2

Creo que es obvio que no iba a poder aportar *toda* la matemática necesaria para este artículo, no sólo por el espacio sino también por la cantidad de requisitos previos necesarios. Sin embargo (y esto me parece muy importante), no hace falta una matemática *profunda*, reservada únicamente para un grupo muy reducido de personas que están a punto de licenciarse o de obtener un doctorado en matemática. Es algo que se estudia —por ahora— en los primeros años de las carreras (matemática, física, computación, por poner algunos ejemplos). Digo por ahora, porque creo que *se deberían enseñar en los últimos años de **todos** los colegios secundarios.*

42. Si los ordenáramos en forma creciente los estaríamos agrupando por edades ya que a medida que van naciendo nuevos ciudadanitos, se va incrementando el número del DNI.

43. Haga la cuenta: 1.100 × 27.272 = 29.999.200

La transformación que se ha producido en las sociedades en la última parte del siglo XX y en lo que va del siglo XXI, hace *imprescindible* que un alumno que egresa con su educación media completa, sepa programar –como mínimo- y tenga a su alcance herramientas de combinatoria, probabilidades y estadística. Por lo tanto, si bien en el artículo no aparece *toda* la matemática que es imprescindible para llegar a las conclusiones que figuran anteriormente, mi objetivo fue el siguiente: cuando usted termine de leer esta nota (si es que llega hasta el final) debería estar preparado para contestar algunas preguntas básicas respecto de las encuestas y también estar advertido de algunos cuidados que hay que tener cuando lea los resultados impresos de encuestas con las que uno se tropieza en la vida cotidiana.

Subnota 3 – Nate Silver

Es famoso el ejemplo actual de Nate Silver, un matemático norteamericano que predijo públicamente el resultado de las elecciones presidenciales de 2008 en 49 de los 50 Estados, que llevó a Obama a la Casa Blanca. Pero Silver se mejoró a sí mismo en las elecciones de 2012 cuando Obama fue reelecto: ¡predijo correctamente el resultado en los 50 Estados! Utilizó los resultados de los distintos encuestadores en el país y luego diseñó un algoritmo para promediarlos, que terminó por darle un resultado 'perfecto' (o muchísimo más ajustado).

Silver trabaja/trabajó para el *New York Times* y ahora lo contrató también la ESPN. Su libro[44] (que recomiendo fuertemente) se ha transformado en un *best seller* desde hace varios meses.

44. *The Signal and the Noise. Why so many predictions fail… but some don't* (La Señal y el Ruido: por qué fallan tantas predicciones... pero algunas no).

Accidentes aéreos

Éste es un buen momento para escribir sobre accidentes aéreos. Es decir, debería corregir lo que acabo de escribir: *nunca* es bueno escribir sobre accidentes de ningún tipo, pero me quiero explicar. En el momento en que se produce alguna tragedia, inmediatamente corremos detrás de las historias que tienen para contar los familiares de las víctimas, los ingenieros que trabajan en el cuidado de aviones como el que tuvo el percance, mecánicos especializados en el mantenimiento de ese tipo de naves, signos que debieron haberse tenido en cuenta, las 'cajas negras', psicólogos que dan su aporte sobre posibles ángulos para imaginar lo que se vivió en la cabina en los instantes finales, caras de circunspección y tristeza por parte de los conductores de los noticieros, los títulos de 'catástrofe' o 'desastre aéreo' que adornan por varios días la vida cotidiana de todos los que sobrevivimos la superabundancia de información totalmente irrelevante, que involucra también a gente que se dedica a 'leer las manos' o el futuro y que anticipó que esto 'podía pasar… y al final, como yo dije, pasó'.

La idea —de ellos— es tratar de buscar (¿encontrar?) *patrones*. 'Algo' que debió haber sido descubierto o detectado y que, como no lo fue, terminó desencadenando el accidente. Ni hablar de episodios de superstición que se contraponen con hechos científicos, ni la lucha, siempre latente, entre la 'fe' y la 'razón'. Hay todavía mucha gente que trata de encontrar entre los datos disponibles razones que prueben que el episodio estaba 'predeterminado' o 'tenía que pasar'.

Datos como 'fatiga' del material que componía el fuselaje o las alas, 'horas' de vuelo que no fueron respetadas, pilotos y/o comandantes que no debieron estar volando... en fin, siéntase libre a esta altura de completar lo que me falta acá con sus experiencias personales: no hay manera de no haber atravesado por varias de ellas en la vida. Antes de avanzar quiero hacer una observación que quizá sea obvia, pero necesito escribirla para sentirme tranquilo: espero que quede claro, una vez que termine de leer, que está totalmente alejado de mi intención usar el mínimo sarcasmo para referirme al 'accidente propiamente dicho', con sus víctimas y familiares relacionados. No pasa por ahí mi objetivo, ni de cerca.

La Argentina tiene —lamentablemente— múltiples ejemplos de vuelos que terminaron en accidentes que pudieron evitarse. No me quiero referir a ellos ya que el material escrito es suficientemente abundante. No. Quiero hablar de 'otro tipo' de accidentes, los que son exactamente eso, 'accidentes'.

Acá entra en escena Arnold Barnett, profesor de estadística en el MIT Sloan School of Management. Se especializa —tal como lo indica él mismo en su currículum[45]— en matemática aplicada focalizada en problemas de salud y seguridad. En algún momento sus trabajos fueron utilizados por Gerald Ford (cuando era presidente de los Estados Unidos) en particular en el análisis de quienes perdieron la vida durante la guerra de Vietnam. De hecho,

45. https://mitsloan.mit.edu/faculty/detail.php?in_spseqno=41132

Barnett fue un gran opositor a la guerra y sus trabajos científicos apuntaron siempre en esa dirección. Hoy en día es considerado uno de los mayores expertos mundiales en seguridad aérea.

Ahora bien: ¿por qué hablar de Barnett? Es que cada vez que se produce algún accidente aéreo de proporciones (que involucre a alguno de los aviones que más vuelan internacionalmente, como los que fabrican la Boeing, Airbus, McDonnell Douglas —que se fusionó ahora con la Boeing—, Sukhoi, Túpolev, etc.) es muy grande la tentación de hacer un análisis como los que describí anteriormente. En especial, y esto es de lo que quiero hablar, el que compara los accidentes que se producen cuando los mismos aviones son comandados por pilotos que *no pertenecen al Primer Mundo*.

Es decir, el análisis que hizo Barnett tenía dos objetivos:

a) Demostrar que los accidentes que se producen en la navegación aérea son 'al azar', aleatorios, y que la probabilidad de que sucedan es muy (pero realmente, muy) baja...
b) Probar que *no es cierto* que las compañías aéreas que *no* pertenecen al Primer Mundo son más proclives a tener accidentes. Teniendo en cuenta el cuadro que figura en este artículo, producto de una década de análisis, si alguien cree que vuela más seguro en compañías aéreas de países del Primer Mundo, comete un error de apreciación. No quiero decir que sea más seguro volar 'en éstas' que 'en aquéllas', sino que *no hay lugar donde correr porque ninguno es 100% seguro*. Y en todo caso, si se pretende comparar unas con otras, los datos son contundentes.

Sígame por acá. La idea es que en el mundo hay, aproximadamente, 25.000 vuelos diarios. Los números son ciertamente una estimación y de ninguna manera pretenden ajustarse a un 'conteo' exhaustivo, pero es un parámetro universalmente aceptado. De hecho, la idea es que en el mundo hay 7 mil millones de pasajeros por año, algo equivalente a decir que *toda* la población mundial vuela una vez al año.

Estos números son consistentes con el siguiente cálculo. Si asumimos que en promedio cada uno de estos aviones puede llevar 140 pasajeros y el promedio que ofrecen las compañías aéreas es de un 72% de asientos ocupados, el resultado es 101 pasajeros. Luego de agregar a los 5 integrantes de la tripulación (en promedio), llegamos a un total de 106 personas por avión. Si se supone también que —en promedio— el 30% de los aviones en el mundo están en vuelo en cada momento del día, esto significa que:

$$25.000 \times 0{,}3 \times 106 = 795.000$$

Por otro lado, si dividimos esos 7 mil millones de pasajeros por los 365 días del año y por 24 (las horas del día), se tiene:

$$7.000.000.000/365 = 19.178.082,$$

y luego, a este resultado lo dividimos por 24:

$$19.178.082/24 = 799.087$$

Por lo tanto, los números *parecen* ser consistentes. ¿Por qué hice estos cálculos? El número de vuelos diarios y la cantidad de aviones en el aire en cada momento del día, hace que la cantidad de accidentes experimentados sea casi 'inexistente'. El análisis de Barnett muestra que el riesgo que se corría en el siglo pasado, en la década del 60 (hace cincuenta años), era de 1 en 700.000.

Treinta años después, en la última década del siglo XX, ese número disminuyó ¡14 veces! Y ahora pasó a ser de 1 en 10 millones. En una parte de sus conclusiones Barnett asegura que los accidentes aéreos son *totalmente aleatorios*, con una probabilidad de suceder verdaderamente pequeñísima. El dato que escribe es el siguiente: una persona que toma un vuelo diario sufriría un accidente aéreo que le costaría la vida una vez cada... ¡4.100 (cuatro mil cien) años!

Pongámoslo de esta manera: la seguridad que ofrecen los aviones hoy en día es increíblemente superior en términos estadísticos a 'casi' cualquier actividad de nuestra vida cotidiana que involucre un medio de transporte. Es decir: si el precio fuera accesible, uno no debería tener ninguna duda: viajar en avión es la mejor alternativa en términos de tranquilidad y potenciales riesgos de accidente. No hace falta mirar mucho alrededor para comprender que esta última frase es cierta desde hace mucho tiempo. Lo que sucede —creo— es que el horror que despierta en nosotros el 'tiempo' que media entre el momento en que el accidente está a punto de suceder y en el que 'termina sucediendo' (la caída, la explosión, el impacto con el agua/tierra) es comparativamente mucho más brutal que un choque con un auto o el descarrilamiento de un tren. Entiéndame bien: una muerte es una muerte independientemente de cuál sea el factor que la desencadena. Estoy solamente tratando de interpretar por qué nos produce una sensación de horror distinta la caída de un avión que otro tipo de accidente. En todo caso, mi mensaje es el siguiente: si puede, tome un avión. Sin duda es la forma más segura de viajar.

Para terminar, lo prometido: la tabla que compara los porcentajes de muertos por accidentes en compañías aéreas del 'Primer Mundo' versus los de compañías aéreas del 'mundo en desarrollo'. Eso sí, una advertencia importante que hace el autor: la comparación está hecha en rutas *internacionales* en donde compiten. Es decir, una compañía aérea en Egipto o en Uruguay o Argentina solamente aparece en las comparaciones con las rutas que hace hacia —por ejemplo— Europa, Estados Unidos, Japón o Australia, pero no en vuelos de cabotaje o domésticos que unen, digamos, Egipto con Marruecos o Libia, o Uruguay con Brasil y Bolivia, o Argentina con Colombia o Perú. Sin embargo, *sí* están incluidos todos los vuelos que se hacen de cualquier país latinoamericano a Europa o Estados Unidos, independientemente del número de conexiones intermedias en la medida que no haya cambio de avión.

	Vuelos	Muertes
Compañías del Primer Mundo	38%	45%
Compañías de países 'en desarrollo'	62%	55%

¿Cómo interpretar esta tabla? Durante la década que utilizó Barnett para hacer su investigación, las compañías aéreas del mundo en desarrollo realizaron el 62% de los vuelos. Si fueran tan 'seguras' como las del Primer Mundo, deberían haber generado el 62% de las muertes de sus pasajeros o incluso más, si es que fueran más proclives a generar desastres. Sin embargo, ocasionaron el 55% de las muertes, lo que indica —al menos— que no les fue peor que a sus competidores más desarrollados. Por lo tanto, si alguien pensó que era preferible usar las 'otras', decídalo por otras causas, pero no por los accidentes producidos.

Netflix

Desde hace poco tiempo, la Argentina se incorporó al núcleo de países servidos por Netflix. La compañía se ha popularizado rápidamente y lo que sucedió acá tiene un correlato con lo que está pasando en el resto del mundo. ¿Qué es Netflix? Netflix es una compañía norteamericana, fundada en 1997, cuya base está en la ciudad de Los Gatos, California. Si bien originalmente fue la primera en proveer un servicio de DVDs a domicilio para todos aquellos que pagaran una suscripción mensual, la evolución de la tecnología la transformó ahora en proveedora del mismo material (películas y series), pero ya no es necesario el transporte *físico* del contenido, sino que éste llega a través de una conexión a internet en lo que se denomina *streaming video* o sea, el flujo de video generado por una fuente remota. Dicho de otra forma: tener una suscripción a Netflix sería equivalente a tener acceso a un canal de cable que llega a su computadora (o cualquier dispositivo equivalente) a través de internet.

Dos observaciones esenciales. A diferencia de lo que sucede con un canal de televisión, donde el gerente artístico es quien determina qué se emite, en el caso de Netflix es el usuario quien elige *qué* quiere ver; y además determina *cuándo* lo quiere ver.

Son datos no menores y que marcan también un cambio en el juego que existió desde los inicios de la televisión. Ahora el cliente controla el *qué*, el *cuándo* y el *dónde*.

Y un agregado: además de películas, Netflix ofrece series de televisión, ya no sólo las que reproducen los canales de aire y/o de cable: por primera vez en la historia produjo un documental (*The Square*) que solamente se puede ver si uno está suscripto y que fue nominado al Oscar en la edición del corriente año; por otro lado, en 2013 debutó *House of Cards* ("Castillo de naipes" o "Casa de naipes"), la primera serie generada específicamente para que se viera por internet y cuya calidad fue reconocida con un premio Emmy.

¿Por qué hablar de Netflix?

Casi desde que inició sus actividades Netflix advirtió que el *gran negocio*, además de la suscripción, era poder *predecir* y, por lo tanto, *recomendar* qué es lo que el usuario podía querer ver. Es decir, personas que como usted o yo preferimos en un momento determinado quedarnos en casa para ver una película en lugar de ir a un cine o al teatro, tenemos la alternativa de elegir qué y en qué momento mirarla. Pero aquí aparece el gran dilema: ¿qué mirar? Una vez saciada la necesidad personal o social de ver los estrenos, las novedades, lo que está de moda, ¿cómo hacer para saber qué elegir entre miles de películas y/o series?

Y es aquí donde —una vez más— entra la matemática. Si usted es usuario de internet desde hace tiempo y ha *bajado* música, un libro, una película o una serie de televisión (por poner solamente algunos ejemplos), decía, usted se habrá tropezado con que aparece 'alguien' dentro del sitio que usted está visitando que le dice: "Las personas que leyeron *Cien años de soledad*, de Gabriel García Márquez también leyeron *La guerra y la paz* de Tolstoy". O bien, "las personas que bajaron 'Yesterday' de los

Beatles, también compraron 'Holiday' de los Bee Gees". O "los que vieron *Pasqualino Settebellezze* también vieron *I pugni in tasca*". Obviamente, la lista podría seguir y seguir.

Netflix tenía (y tiene) un programa que se llama Cinematch. Luego de mirar una película invita al usuario 'rankearla', algo así como adjudicarle un puntaje (entre una y cinco estrellas) de acuerdo con cuánto le haya gustado. Esos *ratings* se guardan y constituyen una base de datos fabulosa que luego Netflix aprovecha. La idea *madre* que usan tanto Netflix como Amazon (por poner otro ejemplo) se basa en que si a dos personas les gusta un determinado producto (música, literatura, película), es muy posible que tengan más cosas en común. Claro, detrás de algo tan ingenuo y sencillo, transparente para el usuario, hay un algoritmo que tiene en cuenta millones de datos, relaciones entre ellos y multiplicidad de preferencias. Cinematch es el nombre de ese programa que aparece subyacente en el sitio web de Netflix y que le sirve para analizar los hábitos de sus 'espectadores' y que, una vez que alguien termina de ver una película, le recomienda otras. En promedio, un suscriptor de Netflix que lleva algunos años ha *calificado* alrededor de 200 películas entre las que vio en un pasado reciente y las que vio en otras épocas. Por lo tanto, Netflix tiene muchísima información acerca de lo que nos gusta a los consumidores (y también lo que no nos gusta). La idea entonces es buscar *patrones*, observaciones que a una persona común le costaría —o le sería imposible— detectar. Primero, porque no tenemos tiempo, y segundo porque aunque nos propusiéramos hacerlo en forma individual, nos llevaría el mismo tiempo que les llevó a nuestros antepasados pasar de conseguir fuego frotando dos piedras hasta llegar al encendedor electrónico. Un algoritmo bien escrito lo hace sin esfuerzo. Y me apuro a escribir algo más: casi el 70% de las películas que miran los usuarios de Netflix resultan ser una consecuencia directa de las recomendaciones de Cinematch. Y no sólo eso, el sistema de recomendaciones también 'enseña' a mirar, a elegir películas que no son ni las más promocionadas, ni las de los grandes estudios de Hollywood, ni las de mayor rating: aparecen películas independientes, de mercados que suelen ser marginales. En definitiva, uno *se educa y aprende a elegir también*.

Pero me desvié. Cinematch *anticipa* o *predice* el ranking que un usuario le debería poner a determinadas películas, y se basa para hacerlo en las notas (o número de estrellas) que esa misma persona les puso a películas que vio anteriormente.

Para decirlo en forma más matemática (y le pido que me acompañe en este razonamiento porque es muy sencillo): Cinematch opera con *cuaternas* como ésta:

(número de usuario, número de película, fecha, calificación)

Como usted advierte, los tres primeros datos están fijos y determinados. El único *número* o *coordenada* que está 'libre' es la última, la de la calificación.

El cofundador y CEO de Netflix, Reed Hastings —quien también fue miembro del directorio de Microsoft y ahora integra el de Facebook—, advirtió que el algoritmo que usaba la empresa había llegado a un 'tope' de su capacidad predictiva. Y como todo innovador se preguntó si el problema estaba en ellos mismos, en que no eran capaces de *mejorar* su algoritmo. Vale la pena acotar que Netflix tiene en este momento más de 44 millones de suscriptores en todo el mundo (más de una Argentina completa) que pagan alrededor de ocho dólares mensuales, y cuenta con más de cien mil títulos entre películas y series. Si uno quisiera verlas todas, tardaría más de 68 años.

Recomendar, recomienda cualquiera. Hacerlo con precisión, es una tarea no menor.

Hastings (y la gente que trabaja con él, supongo) tuvo entonces una idea extraordinaria: propuso hacer un concurso *abierto* a la comunidad toda (científica o no). Cualquier persona o grupo de personas que fuera capaz de mejorar en más de un 10% las predicciones de Cinematch, recibiría un millón de dólares[46].

La competencia fue anunciada en octubre del año 2006. Netflix les ofreció a los participantes una pequeña porción de su enorme base de datos, de manera tal que los competidores los pudieran usar para *entrenarse* y escribir un algoritmo predictivo. A esos efectos les dio 100.480.507 cuaternas que involucraban la opinión de 480.189 usuarios sobre 17.770 películas. Se inscribieron más de 30 mil equipos. Sí, lo escribo otra vez: más de 30.000 grupos interesados.

Una vez que una persona o grupo proponía un algoritmo superador de Cinematch, Netflix tenía reservado *otro grupo de datos* que para usarlos como a modo de *examen*. Este examen consistía en lo siguiente: en lugar de entregarles las cuaternas completas, Netflix les daba 2.817.131 *ternas* (con los primeros tres lugares ocupados), pero se reservaba el último 'numerito' para el jurado.

---

46. ¿Qué quiere decir 'mejorar'? Quiere decir que con los datos que Cinematch tenía pudo predecir el número de estrellas que un determinado usuario le pondría a ciertas películas. Después, la realidad mostró si tuvieron razón... o no. Netflix les daba esos datos a los competidores (sin mostrarles el último 'numerito', el del número de estrellas) y después les tomaba un examen. Para ello tenía tres grupos de datos: las predicciones de Cinematch, las predicciones del algoritmo nuevo y la realidad. Si el nuevo algoritmo hubiera sido capaz de 'acertar' en más de un 10% las predicciones que había hecho Cinematch con ese grupo de películas y usuarios, ese programa podría considerarse *mejor* que el que había usado Netflix.

El algoritmo *tenía que ser capaz de generar —justamente— ese cuarto dato y si, al compararlo con lo que había hecho Cinematch, lograba mejorar en un 10% las calificaciones*, pasaba a competir por el millón de dólares.

Como expliqué anteriormente, sólo los miembros del jurado conocían el conjunto completo de las calificaciones y, a los efectos de preservar el anonimato, se excluía el nombres de los clientes, la edad, el lugar geográfico donde se encontraban, el grupo étnico, etc. De esa forma, los participantes del concurso debían basar sus resultados en números y no en cuestiones de tipo social ni psicológico.

Un paso más: llegado el momento en que un grupo superara el 10% que se proponía Netflix, allí mismo empezaba una cuenta regresiva de treinta días: el 'resto' de los participantes tenía un mes exacto para presentar sus algoritmos. Si nadie podía superar el 10%, se declaraba ganador al equipo que sí lo había logrado y se le entregaba el millón de dólares.[47]

La competencia comenzó el 2 de octubre de 2006 y ¡seis días después! un grupo llamado WXYZ Consulting (de origen chino) mejoró los resultados de Cinematch... aunque no alcanzaron el 10% sino que apenas rozaban el 1%. El 15 de octubre de 2006 ya eran tres los grupos que habían mejorado a Cinematch y el que mejor performance logró consiguió estar 1,06% por arriba del algoritmo de Netflix. Como los resultados eran dinámicos y

47. Un dato MUY IMPORTANTE: el grupo ganador *no tenía* que firmarle a Netflix un contrato de exclusividad por su algoritmo. Netflix lo podría usar —si así lo decidía— pero los ganadores estaban autorizados a venderlo a otras empresas interesadas. Parece algo trivial, pero claramente no lo es: los autores de las ideas y del desarrollo le vendían a Netflix la oportunidad de adoptarlo, pero se reservaban el derecho de comercializarlo y seguían como dueños *intelectuales* de lo que habían generado.

públicos, aparecía constantemente una suerte de 'tabla de posiciones' que mostraba a qué distancia —en porcentaje— estaban las predicciones de cada algoritmo con respecto a las que sugería Netflix.

En junio del año 2007, más de 20 mil de los 30 mil equipos inscriptos, provenientes de más de 186 países, seguían participando en la competencia. Al llegar al segundo año del concurso, solamente tres equipos lograron ser líderes durante varios meses. En particular el grupo llamado BellKor, integrado en su mayoría por científicos de los laboratorios AT&T, estuvo al frente desde mayo de 2007 hasta septiembre de 2008. Luego de dos años de trabajo, cinco grupos mejoraban en más de un 9% a Cinematch: BellKor in BigChaos, BigChaos, Pragmatic Theory, BellKor y Gravity. Durante muchos meses, parecían atascados, empantanados.

Allí se produjo un vuelco interesante: varios grupos que seguían compitiendo, como en un maratón, decidieron unir fuerzas y repartir el dinero en caso de ganarlo. Los equipos se fueron consolidando y las ideas empezaron a fluir. Faltaba poco para la meta, pero como suele suceder en los Juegos Olímpicos, para poder ganar como lo hace Usain Bolt, es necesario mejorar una centésima de segundo, y *ésa* es la parte más difícil.

En octubre de 2008, pasó al frente un grupo ahora llamado BigChaos, integrado en su mayoría por científicos austríacos. A partir de ese momento, parecía que todo quedaría reducido a lo que producían estos dos competidores: BigChaos y BellKor.

El 26 de junio de 2009, luego de varias consolidaciones y 'pases' entre equipos, un grupo denominado Bellkor's Pragmatic Chaos llegó a superar el algoritmo de Cinematch en un 10,05%. Allí comenzó otra historia.

En principio, empezó la cuenta regresiva de treinta días. Todos los que quedaban tenían tiempo hasta el 26 de julio de ese año (2009) a las 6:42:37 PM para presentar su algoritmo superador y acceder a competir con Bellkor's por el millón de dólares. Si no llegaba ningún otro grupo, entonces Bellkor's se quedaría con el dinero.

Increíble e inesperadamente, el 25 de julio, menos de un día antes del cierre, un equipo ahora denominado The Ensemble llegó a una mejora del 10,09% sobre Cinematch y, tal como estaba estipulado, un día después, Netflix detuvo el concurso y dio por finalizada la recepción de algoritmos. A partir de ese momento, todo quedaba reducido a decidir cuál de los dos equipos se quedaría con el millón de dólares.

El jurado se había reservado para sí mismo otro grupo de datos (1.408.789 ternas más) para poder decidir. Finalmente, luego de muchas discusiones —parecía que había habido un empate 'técnico'—, la gente de Netflix determinó que BellKor's Pragmatic era el equipo ganador. Desde el punto de vista matemático hubiera sido imposible distinguir uno de otro. Ganó BellKor's Pragmatic Chaos porque entregaron sus resultados finales veinte minutos antes que lo hiciera The Ensemble. "Esos veinte minutos valieron un millón de dólares", dijo Hastings en el momento de la entrega del premio, el 21 de septiembre de 2009.

Este grupo estuvo integrado al final por siete personas entre ingenieros en computación, programadores, matemáticos, especialistas en estadísticas y hasta un matemático experto en video juegos. Un dato curioso es que varios de ellos se conocieron el día de la entrega del premio: habían trabajado sin moverse de su lugar de origen y, de hecho, provenían de Austria, Canadá, Israel y Estados Unidos. La gente de The Ensemble fue otra suerte de 'alianza global' integrada por más de treinta personas de varios países y continentes.

Por supuesto que los algoritmos son, fueron y serán útiles para mucho más que decidir cómo 'rankear' películas. Piense que los dos grupos tuvieron en sus manos más de 100 millones de calificaciones (o de 'notas') y el desafío de *predecir* con tanta precisión puede ser aplicado ahora en diferentes campos de la ciencia, específicamente de la sociología, las relaciones humanas y comerciales. En todo caso, una de las preguntas esenciales que queda abierta (por supuesto) es la siguiente: ¿cuán predecible es el 'gusto humano'? O aumento la apuesta: aunque fuera posible predecirlo persona por persona, ¿podrá algún día una computadora ser capaz de aprenderlo y/o de deducirlo?

El trabajo en conjunto, en equipo, hecho por gente que no se conoció hasta el último mes, sirve para mostrar también la *potencia* que significa tener personas con distinta formación pensando algo común[48].

Para el final, me guardé un dato curiosísimo (e inesperado). Netflix había logrado lo que quería: mejorar su algoritmo de predicción. Pagó el millón de dólares a los ganadores, pero... ¡nunca usó el algoritmo! Sí, leyó bien. ¿Por qué? Porque en el tiempo que medió entre el anuncio de la competencia y la entrega del premio, la empresa tuvo que 'reinventarse' o 'redefinirse' con la llegada de lo que se conoce con el nombre de 'streaming video'. O sea, el gran negocio ahora ya no es enviar DVDs a la casa de los clientes como era en 2006, sino proveer el material directamente por internet a través de sus propios servidores. Aunque parezca mentira, no es lo mismo decidir qué película uno quiere

---

48. Esto se conoce con el nombre de 'sabiduría de la multitud' o 'crowd sourcing', o sea, aprovechar las ideas de mucha gente, buscar la cooperación de grupos grandes de personas, para resolver un problema. El 2 de junio de 2013 apareció en la contratapa de *Página/12* un artículo al respecto (http://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-221380-2013-06-02.html) que permitió estimar el peso de un toro.

ver dentro de unos días, que si tiene la chance de verla 'en el momento', cuando busca 'satisfacción instantánea'. Pero ésa ya es otra historia. Los humanos somos raros, ¿no?

Diez globos

El 29 de octubre del año 2009, se cumplieron cuarenta años desde que oficialmente 'empezó' a funcionar internet. Por supuesto, estaba muy lejos de ser lo que es hoy, pero fue el puntapié inicial. Ese día, una organización llamada DARPA (Defense Advance Research Projects Agency, o sea, Agencia de Proyectos de Defensa de Investigación Avanzada) perteneciente al Estado norteamericano, propuso un ***desafío*** interesantísimo. Quizás usted tenga el mismo prejuicio que yo: un proyecto militar me produce 'ruido' instantáneamente, y ya no sé si me interesa avanzar. Sin embargo, le propongo que haga lo que hice yo cuando Carlos Sarraute[49] me contó de qué se trataba: olvidé el origen y me quedé fascinado con la idea. Justamente, esa *idea* es la que quiero contar en este artículo, no sólo por las ganas de comunicar algo curioso que pasó hace casi cinco años, sino porque me interesaría proponer el mismo desafío acá, en la Argentina[50].

49. Doctor en Matemática (y amigo) especialista —entre otras cosas— en Minería de Datos.

50. De hecho, ya conversé para ver cómo implementarlo no sólo con el director del diario *Página/12*, Ernesto Tiffenberg, sino también con Víctor Hugo Morales; Claudio Martínez, director general de El Oso Producciones, la empresa que genera todos los programas de ciencia en los que yo estoy

Verá usted de lo que somos capaces los humanos cuando tenemos un objetivo común, un interés particular en resolver algo y sumamos nuestras capacidades, medios y esfuerzos. Lo que voy a contar pasó en los Estados Unidos, pero mi idea es mostrar que eso mismo somos capaces de hacer nosotros. Acá va.

Para empezar le propongo que piense en un globo. Sí, en un globo. No me refiero a los que se usan en las fiestas de cumpleaños, pero sí —eventualmente— en una kermesse o en un parque de diversiones. Supongamos que el globo, cuando está inflado con gas, mide unos tres metros de diámetro. Es decir, es un globo muy grande.

Ahora que nos pusimos de acuerdo en el tipo de globo, piense que lo va a remontar como si fuera un barrilete y lo que quiere hacer es dejarlo 'flotando' en el aire a unos 20 metros de altura y durante unas ocho horas. El globo estaría 'anclado' a tierra de manera tal que no se 'volara'. Por otro lado, el tamaño del globo haría imposible que una persona pasara cerca de él en cualquier calle de cualquier ciudad y no se diera cuenta de que el globo estaba 'allá arriba', y ni hablar si uno estuviera en una zona un poco más plana.

Bien. Ahora piense que se tienen *diez* de estos globos pintados de un rojo bien brillante. El objetivo de DARPA fue el siguiente: anunciaron por distintas vías de comunicación que los globos serían elevados y dispuestos *todos* al mismo tiempo en diez ciuda-

---

involucrado y muchos otros también; el ministro de Ciencia, Técnica e Innovación Productiva, Lino Barañao; el director de Canal 7, Martín Bonavetti; el presidente de RTA (Radio y Televisión Argentinas), Tristán Bauer; el director de Tecnópolis, Javier Grossman; Santiago Siri, co-creador del Partido de la Red en la Argentina y uno de los referentes más importantes que tiene el país en lo que se llama 'data mining' o 'minería de datos', y el propio Carlos Sarraute, quien fuera el motivador de esta idea.

des y/o pueblos (sin importar el tamaño) en la parte continental de los Estados Unidos (o sea, excluyendo Hawaii y/o cualquier otra isla). Los globos aparecerían a las diez de la mañana de un día en particular (que terminó siendo el 5 de diciembre de 2009) y serían retirados a las cinco de la tarde del mismo día. Y repetirían el episodio al día siguiente (el 6 de diciembre). El desafío entonces consistía en *encontrar los diez globos en el menor tiempo posible*.

El primer grupo y/o equipo de personas que fuera capaz de determinar la locación (longitud y latitud) de los globos, se haría acreedor de 40 mil dólares.

A todo esto, usted debe (debería) estar preguntándose: ¿Para qué? ¿Qué querían hacer con los globos? O en todo caso, ¿qué es lo que se suponía que tenía que hacer la gente al 'ver' esos globos?

Todas las preguntas que se le ocurran son pertinentes. Le propongo un par de escenarios posibles. Suponga que aparecen diez focos infecciosos distribuidos en la Argentina. Son fácilmente detectables si uno está en el lugar, pero el problema es que comiencen a esparcirse por todo el país. La idea podría ser tratar de erradicarlos lo antes posible. O uno podría imaginar que hay un agente químico que está contaminando el agua que consumimos y que origina esos focos en determinados lugares del país. ¿Cómo hacer para descubrirlos todos en el menor tiempo posible? ¿Cómo nos comunicamos aprovechando no sólo los medios de comunicación convencionales —radio, televisión, boca a boca— sino que, ya que estamos en el siglo XXI, los combinamos con las redes sociales (Twitter, Facebook, Instagram, LinkedIn, etc.)? Lo voy a resumir en una sola pregunta: ¿Cuánto tiempo tardaríamos en comunicar e interrelacionar diez lugares o focos de 'potencial conflicto'?

Como usted advierte hubiera sido imposible para una sola persona hacer un rastrillaje de un país, y ni hablar de uno de semejante superficie como Estados Unidos, como lo hubiera sido también Brasil, China, Rusia y aun Argentina. De hecho, ya sería muy difícil si los diez globos estuvieran distribuidos en cualquiera de nuestras provincias más grandes (Buenos Aires, Córdoba, Santa Fe, Salta, Santa Cruz, por poner algunos ejemplos), e incluso en la ciudad en donde usted vive (salvo que sea muy pequeña). El objetivo es elaborar una estrategia (ergo, *hacer matemática*) que permita detectarlos.

Hasta acá estamos de acuerdo, pero ¿cómo hacer? ¿Cuántas personas son necesarias? ¿Cómo se conectan entre ellas? ¿Cómo se distribuyen las zonas? ¿Cómo se comunican entre sí? Peor aún: suponiendo que varios grupos estén a la búsqueda de los mismos diez globos, bien podría suceder (y de hecho, eso fue lo que pasó) que haya algunas personas de un grupo que le envíen señales falsas a los otros para distraerlos. ¿Cómo evitar los engaños? ¿Cómo eludir las trampas? ¿Cómo señalar los globos de manera tal que no haya posibilidades de confusión?

Un detalle importante que no comenté hasta acá, es que los globos fueron desplegados en zonas no desérticas. Es decir, en lugares en donde pasara y/o viviera gente, y no en la cima de una montaña o en el medio de un campo yermo.

El anuncio del desafío (día y fecha de la realización) se hizo público exactamente un mes antes de que los globos aparecieran suspendidos en el aire. Cada equipo tuvo treinta días para constituirse, elaborar una estrategia y prepararse para decidir cómo implementar la búsqueda.

El resultado

Antes de avanzar me permito incluir ya mismo el resultado: hubo *un solo grupo de personas que descubrió los diez globos*[51]. Eso, ya en sí mismo, debería ser un hecho notable. Pero tengo una pregunta para hacerle y le pido que se tome un instante para pensar la respuesta antes de leerla a continuación.

¿Cuánto tiempo cree que pasó hasta que los encontraron todos? Haga usted una estimación y después cotéjela. Sé que suena autorreferencial, pero si le sirve me permito escribir que yo le erré escandalosamente: estimé diez días. ¿Usted?

Lo extraordinario es que un grupo de investigadores del MIT (Massachusetts Institute of Technology o Instituto de Tecnología de Massachusetts) ubicado en la ciudad de Cambridge, muy cerca de Boston, encontró los diez globos en... ¡menos de nueve horas!

Para ser precisos, anunciaron su hallazgo cuando faltaba un poco menos de siete minutos para las siete de la tarde del *mismo día* en que fueron alzados los globos. Este dato para mí es increíble. Por supuesto, el desafío concluyó inmediatamente ni bien corroboraron que los globos eran los correctos. De hecho los globos ya no fueron remontados al día siguiente como tenían previsto los organizadores.

Tengo la gran tentación de contar algunas estrategias que leí del grupo ganador y también de otros que no encontraron todos globos, pero creo que eso anularía la posibilidad de ser creativos para los grupos que quieran participar en la Argentina, ya que

---

51. En este sitio en inglés de Wikipedia, es posible encontrar todos los datos necesarios para entender un poco más el desarrollo del evento, detalles de los grupos ganadores y ubicación de los diez globos: http://en.wikipedia.org/wiki/DARPA_Network_Challenge

—quizá— se verían inducidos a pensar que el único (o mejor) camino es el que les sirvió a los ganadores de Boston. Sin embargo, lo que sí quiero contar es que hubo un grupo que decidió dividir los 40 mil dólares por diez. De esa forma, habrían de asignarle cuatro mil dólares por globo encontrado a los participantes del propio equipo.

¿Qué quiero decir con esto? Voy a llamar 'Grupo Ganador' a los que encontraron los diez globos. Claramente, este equipo estuvo integrado por muchísimas personas. Sin embargo, tiene que haber habido *uno* (que llamo 'A') que fue el que encontró un determinado globo (lo voy a llamar 'globo *uno*'). Esta persona ('A'), recibió dos mil dólares. Pero 'A', fue invitado a participar por alguien (digamos 'B') que ya pertenecía al grupo. Esta persona, recibió mil dólares. De esa forma, había también un estímulo para aquellos que si bien no encontraron 'técnicamente' el globo, hicieron posible llegar a él. Pero 'B' tuvo *también* que ser presentado por otro ('C'), y por lo tanto 'C' recibió dinero por su participación: 500 dólares. Y así siguiendo: cada persona que cooperó, recibió *una parte* de esos cuatro mil dólares asignados a ese globo. El dinero se iba dividiendo por dos cuanto más lejos estuviera de la persona que terminaría reportando el hallazgo. Y si en algún momento se detenía porque ya habían llegado a uno de los cofundadores del grupo, entonces el resto del dinero se entregaba a algún fin benéfico.

Algunas conclusiones

El tema da para escribir muchísimo. De hecho, ya hay mucha literatura al respecto, pero en todo caso mi reflexión final tiene que ver con el *fenomenal poder que tenemos entre todos cuando* *nos juntamos con un objetivo común*. En este caso, el dinero involucrado no me parece que haya sido un factor determinante. No quiero menospreciar ni subvalorar ninguna cifra, pero estoy convencido de que cualquier participante que estuvo como eslabón en 'cualquier' lugar de esta cadena debe sentir la satisfacción de ser parte de ella.

Los medios de comunicación masivos (televisión, radios, diarios, revistas, por citar los ejemplos clásicos) cooperan en la difusión del evento; pero para resolver problemas de este tipo, en los que la velocidad en la comunicación es esencial, en los que la geografía es tan vasta, en los que se requiere solidaridad de parte de la población y el orgullo de ser *uno más*, es *imprescindible* la participación de las redes sociales y de los jóvenes que las usan con tanto éxito.

Es por todo eso que quiero replicarlo en la Argentina, con características que todavía no están delineadas pero que cuentan con la adhesión de gente que, desde sus lugares de trabajo, tienen pasión por lo que hacen y les interesa que la vida del 'prójimo' sea tan disfrutable como la propia. Si no, si hay alguien que se queda involuntariamente excluido de tener las mismas posibilidades que tuve yo, es porque no estamos entendiendo bien este mundo.

Veinte segundos

El 28 de noviembre del año 2013, un grupo de aspirantes a entrar en un colegio *¡primario!* en Hong Kong tuvieron que pasar por una prueba de admisión. A nosotros nos resulta —creo— irritante/discriminatorio que niños tan pequeños tengan que ser sometidos a pruebas de este tipo. Sin embargo, le pido que no se apresure (como hice yo) en sacar conclusiones.

Uno de los problemas que tenían que resolver consistía en *mirar* el dibujo que aparece a continuación y decidir qué número figura debajo del auto. Es decir, el niño tenía que observar el dibujo y decidir cuál era el número que él creía que había quedado tapado por el auto estacionado.

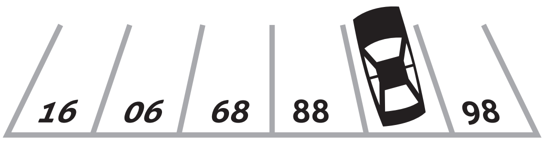
Más aún: les ofrecían 20 segundos para hacerlo. Sí, ¡20 segundos!

Antes de leer la respuesta, le pido por favor que mire el dibujo con atención y tome una decisión. En todo caso, si siente que este tipo de pruebas no son para usted, siga leyendo.

香港小学一年级学生入学考试题

2013-11-28

Hong Kong Elementary School First Grade Student Admissions Test Question



What parking spot # is the car parked in?

请问汽车停的是几号车位？

Please answer within 20 seconds

¿Qué pensó usted? ¿Está tentado de leer la solución o pudo encontrarla en soledad?

Si le sirve (aunque suene muy autorreferencial), le confieso que me pasé un buen rato pensando y que no pude encontrar ninguna relación. No me quise entregar tan fácilmente y, si bien lo dejé por unas horas, volví con más convicción y sobre todo sintiendo '¿cómo podía ser que no fuera capaz de detectar la solución?'.

Me pregunté: "¿Veinte segundos? ¡Qué disparate! ¿Por qué habrían de hacer semejante cosa con niños de seis años?".

Pero no pude. Más allá de mis racionalizaciones para encontrar un poco de paz interior, resignado, volví al lugar en donde había leído el problema y me fijé en la respuesta.

La quiero escribir acá. Haga lo siguiente: de vuelta el libro. Sí, póngalo cabeza abajo. ¿Qué encuentra? ¿Está la solución allí?

Ahora bien: ¿cómo es posible que uno no pueda pensar que si un auto llega a estacionar en una playa en donde *todos* los lugares están numerados, no se le ocurra que esos números tienen que estar 'mirando hacia el otro lado', hacia el lado del que conduce, y no hacia nuestro lado. Si uno fuera capaz de detectar algo tan obvio, la respuesta al problema sería trivial. Más aún: no tendría sentido la pregunta, ¿no es así?

Usted saque sus propias conclusiones. Lo que yo quise hacer es compartir mi frustración y, en todo caso, no es malo frustrarse cada tanto y aprender a coexistir con nuestras propias limitaciones. En todo caso, eso fue lo que me pasó a mí.

Para completar los datos, una breve historia sobre cómo me enteré del problema. El primero en advertirme fue el doctor Carlos D'Andrea, uno de los mejores matemáticos argentinos y gran amigo, quien actualmente se encuentra radicado en España y es, además, profesor en la Universidad de Barcelona. Carlos mandó un correo electrónico a todos sus amigos y colegas advirtiéndonos del problema y supongo que sonriendo ante la insatisfacción que nos generaba a todos.

Pero sigo: con los datos que me aportó Carlos, llegué hasta un artículo de Julie Zeveloff de la revista *Business Insider*; ella apuntaba hacia la persona que verdaderamente dio origen a todo lo escrito. Se llama (o es su seudónimo) Fauna y escribe en la revista *ChinaSmack* de Hong Kong. Lo curioso es la presentación que hizo y que quiero compartir acá:

> ¿Qué es lo que le lleva segundos a un niño de escuela primaria, varios minutos a un estudiante de secundaria, más de media hora a un estudiante universitario y una *vida* a alguien que ya obtuvo su título de doctor?

Sin dar la respuesta, publicaba el dibujo y decía que, de acuerdo con el blog chino Sina Weibo, este problema se expandió en forma viral y se transformó en el segundo más popular en China.

Una reflexión final: ¿No es notable cómo funciona nuestra mente?

2. PONER A PRUEBA LA INTUICIÓN

Falsos positivos

En el mundo actual las estadísticas tienen un lugar preponderante: hay estadísticas para *todo*. Buenas, malas, útiles, irrelevantes, reveladoras… y la lista puede seguir. También sucede que al hacer pruebas o experimentos, algunos resultados se '*corren*' de lo esperable. Por ejemplo en las encuestas previas a una elección, las estimaciones vienen con el equivalente de una *letra chica*, que uno no quiere aceptar pero que es *determinante*: el error. Es decir, un porcentaje en más o en menos sobre el valor indicado. Digo que uno no lo quiere aceptar porque buscamos resultados *tajantes, definitorios, categóricos y contundentes*. "¡Que no queden dudas! Gana A o gana B." Pero los márgenes que suelen determinar una victoria en elecciones parejas son muy estrechos y, por lo tanto, se hace virtualmente imposible *predecir el ganador*. Las encuestas ofrecen sus resultados con error, pero la sociedad no quiere escuchar.

En cuanto a las elecciones, las encuestas tienen fecha de expiración: el día del sufragio. Allí se sabe la verdad, allí se conocerán los hechos. Pero hay otros episodios de la vida cotidiana, en los cuales ese día no existe, ya sea porque es impracticable hacer un *rastrillaje exhaustivo* de todos los casos o sencillamente porque no tiene sentido aspirar a tener determinado tipo de *cer-*

tezas, como sería la estimación *exacta* del tiempo de vida de una persona afectada por cierto tipo de enfermedad.

¿Cuántas veces en su vida escuchó usted hablar de *falsos positivos?* Seguramente muchas. Lo que sucede es que uno no les da importancia —en general— salvo que el involucrado sea uno mismo o algún ser querido. Por ejemplo, un test para determinar si una mujer está embarazada puede no ser 100% seguro, puede suceder que una mujer tenga un resultado positivo y, sin embargo, que no haya tenido su período por otras razones: es un caso *típico* de *falso positivo*.

También podría ocurrir que al cruzar los sistemas de seguridad en un aeropuerto, la alarma suene como si usted estuviera llevando un objeto metálico que debería haber sacado de sus bolsillos; es posible que el sistema sea tan sensible que está detectando una moneda que le quedó olvidada. O podría ser que sonara igual aunque no tenga nada metálico visible o reconocible.

El servicio de correo electrónico que usamos suele enviar a una carpeta SPAM aquellos mensajes que el programa detecta como *indeseable*. Sin embargo, estoy seguro de que a usted le debe haber pasado que fue a parar allí un mensaje que usted hubiera querido retener o leer. Es otro ejemplo de *falso positivo*.

O la propia computadora podría anunciarle que hay un archivo *infectado* con un virus, cuando en realidad no es así. O en las fábricas en donde se requiere un 'control de calidad', algunos productos no lo superan y el sistema los considera 'extraños' cuando debería aceptarlos por buenos. Éste sería un ejemplo de *falso negativo*. Y podría seguir pero quiero parar acá.

Todo esto que escribí tiene una intención: *provocarla/lo a* decidir si el porcentaje de seguridad que ofrece el sistema que le voy a proponer le parece *confiable* o no. Lo extraigo de un excelente trabajo de Claudio Fernández Aráoz, uno de los mejores expertos argentinos en selección de personal[52]. Prepárese a pensar y sacar sus propias conclusiones. Sobre el final, analizamos juntos los resultados.

Suponga que usted se enfrenta con un grupo de profesionales entre los que tiene que seleccionar el 10% para trabajos de gerente en una compañía. No importa cuántos sean, usted solamente quiere quedarse con los mejores postulantes. ¿Cómo hacer para detectar justamente ese 10%?

Sus asesores le acercan un método que le ofrece las siguientes garantías: "Si los candidatos superan una serie de preguntas y resuelven una cantidad de problemas, el método provee una evaluación con el 90% de precisión".

Es decir, aquellos que pasen por el tamiz que usted les propone tienen un 90% de posibilidades de pertenecer a ese grupo del 10% de los mejores.

¿Le parece que un método que tiene la intención de reclutar sólo el "Top 10%" y que ofrece una evaluación con un 90% de precisión es un método confiable?

Usted y yo sabemos que no hay método infalible, eso no lo puede garantizar nadie, pero si le aseguraran una eficacia del 90%, ¿diría que es aceptable o no?

Ahora le toca a pensar a usted. Yo sigo acá abajo, pero créame que no vale la pena leer lo que sigue si no le dedica un rato a pensar mi propuesta en soledad.

52. Llegué hasta el trabajo de Fernández Aráoz a través de mi amigo Santiago Bilinkis, uno de los *curadores* del TEDxRiodelaPlata.

Análisis

Para analizar cuán bueno es el método, le propongo que supongamos que en total hay 100 candidatos. Eso va a hacer que las cuentas sean más sencillas, pero obviamente, el sistema de detección no depende del número de aspirantes si no de la eficacia intrínseca.

Como se trata de detectar el 10% de los postulantes, usted tratará de descubrir los 10 mejores entre los 100. Eso significa también que en el camino usted determinará cuáles son los 90 que —obviamente— no están en ese grupo.

De esos 10 mejores, como usted tiene un 90% de eficiencia, su método le permitirá descubrir a *nueve*, ya que *uno* se le va a escapar. O sea, uno de los *buenos*, uno de los *diez* que usted querría distinguir, no pasó la prueba cuando debió haberla superado. Este candidato será un *falso negativo*.

De la misma forma, entre los 90 que *no están en ese grupo*, ¡se le van a *filtrar* nueve que usted creerá que están entre los buenos! Éstos van a ser los *falsos positivos*.

¿Cuál es la moraleja? Con estos datos que acabamos de pensar juntos, ¿qué le parece ahora el método?

Creo que lo que sucede a usted, como me sucedió a mí, es que un método que parece poco menos que *infalible*, sirve para que usted encuentre *nueve* que son del grupo que usted quiere, pero también *nueve* que son del grupo que *no* quiere. O sea que su eficiencia se reduce a un 50%. Quedan *distinguidas* 18 personas pero solamente *nueve* de ellas son las que usted querría descubrir.

Este ejemplo es muy útil en ese sentido. Sirve para poner en perspectiva el tema del *error* en la apreciación o los *falsos positivos (o negativos)* para usar los nombres más aceptados. Por supuesto que dependerá del contexto pero, cuando se trata de *reconocer* los 'falsos positivos' y cómo tratarlos, los métodos de evaluación requieren de cuidados muy especiales, más allá del campo al que pertenezcan.

Las estadísticas son potentes y muy útiles, pero no infalibles ni perfectas. El problema es que los humanos nos llevamos mal con la ambigüedad, con lo que no sea categórico y *final*. Lamentablemente, los científicos pueden dar muchas respuestas, pero no todas y entiendo que no es fácil aprender a coexistir con la duda, aceptar la frustración de no llegar al 100%. Así es la vida… al menos por ahora.

Resumen

Supuestos:

a) Intención de reclutar sólo el 'top 10%'
b) Evaluación con un 90% de precisión

Pregunta: ¿qué porcentaje del 'top 10%' se recluta finalmente?

Respuesta:

100 profesionales
10% = 10 están en el 'top' que queremos reclutar
90% = 90 son los que queremos dejar afuera
De los 10 que querríamos reclutar, alcanzamos a detectar *nueve*. Se nos escapa *uno*
De los 90 que querríamos excluir, 81 quedan eliminados pero *nueve* quedan incluidos

Moraleja

Aun con una precisión del 90%, retenemos a 18 personas, de las cuales *nueve* están entre los que buscábamos y *nueve* querríamos haber eliminado pero se nos filtraron. Luego, tenemos un 50% de efectividad.

¿Cuántas caras de un cubo se pueden ver al mismo tiempo?

Ésta es una pregunta interesante: ¿cuántas caras de un cubo se pueden ver simultáneamente? ¿Quiere pensar?

En realidad, la pregunta debería ser distinta, ya que uno podría tener el cubo 'pegado' a la nariz —por ejemplo—, en cuyo caso uno vería nada más que una cara. O sostenerlo de forma tal que se puedan ver nada más que dos de las caras. Más aún: estoy pensando en un cubo que no sea tan pequeño como para que me lo pueda poner 'entre los dos ojos'.

Quisiera entonces permitirme reformular la pregunta. Lo voy a hacer así: ¿cuál es el número máximo de caras de un cubo que uno puede ver al mismo tiempo?

Ahora sí, creo que el problema requiere de un rato para reflexionar.

Idea de respuesta

Está claro —creo— que se pueden ver una cara, dos caras y también tres caras. Para ver tres caras será suficiente tener el cubo como muestra esta figura.

Dicho esto, la pregunta que cabe hacerse ahora es la siguiente: ¿se podrán ver cuatro? ¿Qué piensa usted?

La respuesta es que no, no se puede. ¿Por qué? ¿Qué argumento encontrar para convencerse más allá de intentarlo 'físicamente' y tropezar con la dificultad?

Sígame con esta idea: elija cuatro caras cualesquiera de un cubo. Como usted advierte, por lo menos dos de esas caras tienen que ser paralelas. Y eso debería ser suficiente motivo como para determinar que no se van a poder ver cuatro caras al mismo tiempo. ¿Cómo hacer para estar en dos lugares simultáneamente?

Si apoya el cubo en la palma de su mano, e imagina que las caras se prolongan en 'planos', uno debería poder ver lo que sucede en dos planos paralelos. No importa dónde se ubique usted, eso será imposible: si ve uno de los planos, no puede ver el otro (y recíprocamente).

O sea, la 'clave' para dar la respuesta es que al elegir cuatro caras, dos de ellas están en planos paralelos, y eso ya impide que puedan ser vistas por la misma persona. ¿No es notable el argumento para convencerse de que no es posible lograrlo?

Torres de telefonía celular

En el transcurso de nuestra educación primaria y secundaria, uno estudia ejemplos de *semejanza de triángulos*. Creo que todos, en algún momento de nuestras vidas, hemos tropezado con algunos problemas que requieren el uso de esa herramienta para resolverlos.

El que sigue es un caso sorprendente, o al menos lo fue para mí. Es decir, le propongo que una vez que lea el enunciado se dedique un rato a pensarlo. Más allá de cuán largo sea ese 'rato', en el momento en que encuentre o lea la solución, le pido que no abandone el problema. Creo que la/lo estoy invitando a que disfrute del resultado... sí, que *disfrute* del resultado porque no parece posible que pueda ser cierto.

Hay una única manera de corroborar lo que acabo de escribir: empezar ya mismo. Acá voy.

Suponga usted que hay dos torres de telefonía celular. Estas torres se erigen en forma vertical. No importa la distancia que hay entre una y otra, pero lo que *sí* se sabe es que una mide *seis* metros y la otra *cuatro*.

Del extremo superior de cada una, sale un cable que llega hasta la base de la otra. Obviamente, esos cables tienen que cruzarse en alguna parte (ver Figura 1):

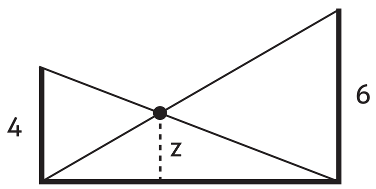


Figura 1

¿Puede deducir usted *a qué altura del piso* se cruzan? Mirando la Figura 1, el problema consiste en determinar *cuánto mide 'z'*.

Hay muchas formas de abordar el problema. Una de ellas es usando *semejanza* de triángulos, pero no es la única. Por eso digo, *ahora le toca a usted*.

Una solución geométrica

Fíjese en la Figura 2.

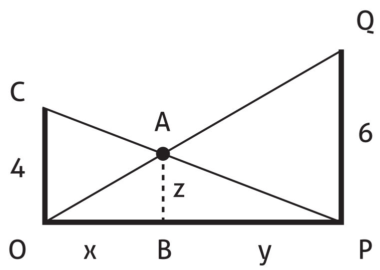


Figura 2

Pongámonos de acuerdo con lo que se ve, ya que dibujé algunos triángulos. Esos triángulos aparecen al haber marcado con la letra A el lugar en donde se cortan los cables, C es el extremo superior de la torre más baja, O es la base de esa torre, P es la base de la torre más alta y Q es el extremo superior de esa torre.

1) La letra *z* sirve para medir la distancia desde A hasta el piso y es justamente *la altura* que queremos medir
2) Si hubiera otra torre de altura *z*, la 'base' de esa torre estaría en B

3) Marqué con *x* la distancia OB, y con la letra *y* la distancia BP

Quedan marcados dos triángulos: COP y ABP. Estos dos triángulos son semejantes (tiene los mismos ángulos).

Por otro lado, aparecen otros dos triángulos: OBA y OPQ, que también son semejantes. Con estos cuatro triángulos y las propiedades de semejanza, se deducen estas igualdades:

$$y/z = (x + y)/4$$
$$(*)$$
$$x/z = (x + y)/6$$

Llamemos *s* = (x + y).
Si reemplazamos en (*), se tiene:

$$y/z = s/4$$
$$x/z = s/6$$

Luego, despejando *x* e *y* de estas dos igualdades,

$$y = (s \times z)/4$$
$$(**)$$
$$x = (s \times z)/6$$

Pero como s = (x + y), usando las igualdades (**)

$$s = \times + y = (s \times z)/4 + (s \times z)/6$$

Es decir...

$$s = (s \times z)/4 + (s \times z)/6 = (s \times z) \times \{1/4 + 1/6\} =$$

$$s = (s \times z)\ (5/12)$$

Luego

$$1 = z\ (5/12)$$

De acá, *todo* lo que hay que hacer es *despejar* el valor de *z*.

$$\boxed{z = 12/5 = 2{,}4 \text{ m}}$$

O sea, la conclusión es que la *altura* a la que se cortan los dos cables es de 2,4 metros.

A esta altura, antes de dar por terminado el problema, me interesa proponerle reflexionar sobre lo siguiente: ¿no es notable que la *altura* a la que se cortan los cables haya sido totalmente *independiente* de cuán lejos o cerca estén separadas las torres?

O sea, las torres pudieron haber estado separadas por 10 metros o por 10 kilómetros o 1.000 kilómetros: no importa. Si los cables estuvieran tendidos del extremo superior de una hacia la base de la otra, la *altura* en donde se cortan es *siempre* la misma: *¡Un poquito menos de dos metros y medio!*

Estoy seguro de que quien ha estado leyendo estas líneas debe tener algunas otras ideas para resolver el problema (y lo bien que hace). Pero lo que a mí me sorprendió, y me llevó a incluirlo en este libro, es lo que escribí anteriormente: la *independencia* de la altura del corte de los cables, respecto de la *distancia* que hay entre una y otra. Notable, ¿no le parece?

Martin Gardner 1.0

Martin Gardner fue uno de los más prolíficos proveedores de ideas sobre matemática recreativa. Tengo la tentación de decir que fue el MÁS prolífico de todos, pero en cualquier caso eso forma parte de la deformación que tenemos los humanos de encontrar siempre 'el más' de todo: el que salta más alto, el que corre más rápido, el que llega más veces primero, el que más se destaca, el que más escribió, el que más rindió, etcétera.

De todas maneras, mientras algunas cosas son opinables (el que 'más' gustó, el que 'más' convenció, el que 'más' impresionó, etc.) hay otras que son 'medibles'. Por ejemplo, se podría hacer una lista de todas las publicaciones de todos los autores que escribieron artículos sobre matemática creativa, contar y detectar cuál fue el que 'más' contribuyó, y se resuelve la cuestión. De la misma forma es fácil determinar quién salta más alto, quién corre más rápido, etc. ¿Por qué tendremos los humanos entonces esa *necesidad*?

Naturalmente, se abre *otra* discusión: un autor pudo haber escrito en forma muy prolífica sin que su obra dejara ninguna huella; y otros, con escaso material cambiaron la historia de la humanidad. Einstein es un buen ejemplo: escribió muy poco, publicó menos, pero no hay artículo más citado dentro de la física que su Teoría de la Relatividad. Es decir, la cantidad no garantiza calidad, ni mucho menos.

Luego de esta irrelevante digresión, escribiré —tal como había prometido— uno de los problemas de Martin Gardner. Dice así: suponga que un amigo y yo nos encontramos en una reunión familiar. Sobre una mesa hay tres monedas. Mi amigo me hace la siguiente propuesta: "Voy a tirar tres monedas al aire. Si todas salen 'cara', te doy diez pesos. Si las tres caen 'ceca', también te doy diez pesos. Pero si caen de cualquier otra forma, con cualquier otra combinación de caras y cecas que *no sean* todas iguales, entonces vos me tenés que dar cinco pesos a mí".

Supongamos que vamos a tirar al aire las tres monedas varias veces y usted fuera mi asesor en este juego, ¿qué me aconsejaría? ¿Me conviene aceptar la propuesta de mi amigo?

No quiero avanzar mucho más sin darle oportunidad para que usted pueda dedicarle un rato y pensar qué es lo que más me conviene hacer. Yo sigo acá.

Una forma de pensar el problema

Voy a proponer un razonamiento y la/lo invito a que le dedique unos minutos para analizar y decidir qué piensa sobre él. No se preocupe si su razonamiento está bien o mal, lo *único* que interesa es que invierta un mínimo de tiempo para decidir sobre su veracidad.

Uno podría pensar el problema así:

> *Al tirar las tres monedas, seguro que dos de ellas tienen que caer del mismo lado (o bien dos caras o bien dos cecas). Esto sucede porque no hay una tercera opción. Por lo tanto, al tirar las tres monedas, seguro que dos repetidas tiene que haber. ¿Qué puede pasar con la tercera?:*

que sea igual a las otras dos o que sea distinta. Las posibilidades de que sea igual o distinta son iguales: 50 y 50. O lo que es lo mismo, la probabilidad de que salga igual o distinta es ½.

¿Qué piensa usted? ¿Estará bien esa línea argumental?

Si le parece que lo que escribí antes es correcto, usted me tiene que asesorar que *acepte* la apuesta de mi amigo, ya que yo tengo las mismas posibilidades que él de ganar. Pero además, si yo gano (o sea, si las tres monedas salen del mismo lado), él me tiene que pagar diez pesos, mientras que si gana él, yo le tengo que pagar cinco. O sea, las posibilidades parecen ser las mismas de ganar o de perder, pero cuando yo gano con las monedas, recibo el doble de dinero que el que le tengo que pagar a él cada vez que pierdo. Parece un muy buen negocio para mí.

Sin embargo, estoy casi seguro de que usted detecta o intuye que hay algo que no está bien en ese razonamiento. Hay algo que *hace ruido*. ¿Qué será?

Miremos el problema de otra forma. ¿Cuáles son *todos* los resultados posibles al tirar tres monedas? ¿De cuántas formas pueden salir? Voy a llamar con una letra C a las que salgan *cara* y X a las que salgan ceca. Entonces tenemos estos resultados posibles para las tres monedas:

XXX (tres cecas)
XXC
XCX
XCC
CXX
CXC
CCX
CCC (tres caras)

Como se ve, hay *ocho* posibles resultados. ¿Qué piensa usted ahora? ¿Me convendrá a mí aceptar la propuesta? Fíjese que de las *ocho* posibilidades, las *únicas dos* que me hacen ganar a mí son la primera y la última, cuando salen las tres cecas o las tres caras. A su vez, mi amigo tiene *seis* posibilidades a favor. Es decir, yo tengo *dos sobre ocho* posibilidades de ganar (2/8 = ¼), mientras que él tiene *seis sobre ocho* maneras de llevarse el dinero (6/8 = ¾). En conclusión, la probabilidad de que él gane es en tres de cada cuatro veces que juguemos, mientras que la probabilidad de que gane yo es de *una* de cada *cuatro* veces.

Si jugáramos muchas veces, digamos 20 veces, la probabilidad de que yo gane es de *una cuarta parte* de las veces (o sea, cinco veces), por lo que él me tendría que pagar 50 pesos (10 pesos por cada triunfo mío). En cambio la probabilidad de que gane él es de *tres cuartas partes* de las veces, es decir 15 sobre 20. En esas 15 veces, yo le tendría que pagar 75 pesos (5 pesos por cada una de las 15 veces). Por lo tanto, yo ganaría 50 pesos y él 75.

Si usted es un buen asesor me tendrá que decir: "¡No juegues, no te conviene!".

El razonamiento original es equivocado, porque no contempla todos los posibles resultados, ya que hay seis formas de que salgan dos iguales y una distinta y solamente dos de que salgan las tres iguales. La probabilidad de cada uno gane *no es ½ y ½*, sino ¼ para mí y ¾ para mi amigo.

En la vida cotidiana, en donde estamos expuestos a muchísimos juegos de azar (ruleta, lotería, Loto, punto y banca, blackjack, etc.), como el dinero que uno *podría* ganar es tan descomunal en función de la apuesta, uno tiene la tentación de *dejarse seducir* y jugar. Sin embargo, con un análisis que ligeramente mire por debajo de la superficie, uno debería decidir por única vez y para toda la vida: "No hay manera de ganar, ¡la banca gana siempre!".

Baile poblado de mujeres

Ahora tengo una propuesta para testear su intuición. Suponga que le doy los siguientes datos: en una fiesta con muchísima gente, se producía algo muy curioso: ¡había solamente tres hombres! Más aún: el 99% de las personas que habían concurrido eran mujeres. La idea de los dueños de casa había sido organizar un baile. Con semejante proporción entre los sexos el plan original estaba a punto de fracasar.

La pregunta entonces es la siguiente: para tratar de compensar la situación, ¿cuántas mujeres tendrían que salir del salón para que el porcentaje de mujeres ahora sea del 98%?

Antes de razonar con cuidado la respuesta, le propongo que piense qué es lo que le dice su intuición, es decir, que haga una suerte de *estimación* (no necesariamente los cálculos correctos sino una *conjetura*) sobre el número de mujeres que tendría que salir del salón para que ahora el porcentaje se reduzca a un 98%.

Una forma de pensar el problema

Como el 1% de las personas están representadas —por ejemplo— por los tres hombres, uno puede deducir de acá el *número* *total* de asistentes al baile. Si *tres personas* corresponden al 1%, entonces el 100% serán 300 invitados.

Por lo tanto, en el salón había 297 mujeres y solamente tres hombres.

Ahora bien: queremos que salgan la cantidad de mujeres necesarias para que ahora, las personas del sexo femenino restantes representen un 98%. ¿Cuántas mujeres tienen que salir?

Los hombres seguirán siendo *tres*, pero en lugar de que tres personas representen el 1%, queremos que esas tres personas representen el *dos por ciento*. ¿Cómo se logra eso?

Tal como usted intuye, para que *tres* personas representen el 2% en total tiene que haber 150 personas. Como había 297 mujeres, tienen que salir 150 de ellas. De esa forma, quedarán 147 mujeres. Si les sumamos los tres hombres, en el baile habrá 150 personas en total y, ahora sí, está contestada la pregunta.

Orientación de un dado

Estoy casi seguro de que todos los humanos hemos jugado alguna vez a los dados. Me refiero a dados comunes y corrientes. Bueno... espere: no sé si son tan 'comunes' ni tan 'corrientes'. Es que cuando yo escribo rápido la palabra *dado* querría estar seguro de que usted y yo pensamos en el mismo objeto.

Un dado tiene que cumplir con ciertas 'reglas' que suelen pasar totalmente inadvertidas para quienes simplemente los usamos para jugar. Por supuesto, la mayoría de nosotros no tiene la necesidad de 'fabricar' un dado y, por lo tanto, no hay razones que nos obliguen a prestar atención a cómo se construyen.

Sin embargo, más allá del material que se utilice, me gustaría preguntarle lo siguiente: ¿está seguro de que podría construir un dado si yo le diera un cubo blanco y le dijera que distribuya los seis dígitos del 1 al 6? Es decir, ¿prestó atención alguna vez a la forma en la que están dispuestos esos números?

Fíjese en la Figura 1 de la próxima página:

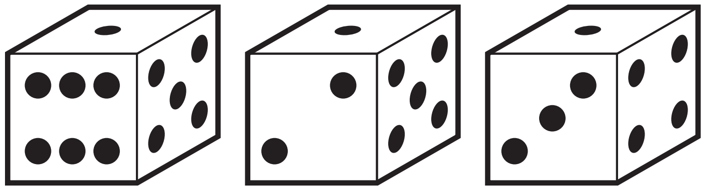


Figura 1

Como usted advierte, si bien uno puede llamarlos 'dados', no son 'dados' convencionales, no son los dados que estamos acostumbrados a ver y a usar en la 'generala' o en el juego del 'diez mil'[53], por poner sólo algunos ejemplos. En particular, un hecho —que creo muy conocido pero me ocupo en remarcar— es que las caras opuestas de un dado cumplen algunas reglas muy sencillas. En cualquier dado que se precie de tal, son caras opuestas: el ***as*** y el seis, el ***tres*** y el ***cuatro,*** y también el ***dos*** y el ***cinco.***

Para quedarme tranquilo, en la Figura 2 hay un dado que cumple con esas condiciones.

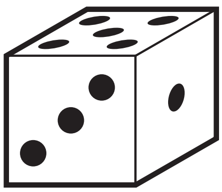


Figura 2

Además del cuidado que hay que tener al distribuir los números en las caras opuestas, al fabricar un dado hay que tomar otra

53. ¿Jugó alguna vez al 'diez mil'? Si no lo hizo nunca, le sugiero que busque las reglas y lo juegue porque es *apasionante*. Por supuesto, hace falta jugar con por lo menos otra persona y si bien las reglas varían (por país), es muy entretenido.

decisión. Sígame en este razonamiento. Imagine que usted tiene el cubo blanco y lo apoya arriba de una mesa. Como de alguna manera hay que empezar a ubicar los dígitos, suponga que ponemos un *seis* en la cara de arriba. Eso automáticamente determina que la cara que está apoyada en la mesa es la que tiene el *uno*.

Ahora, ubique al *cinco* en la cara que tiene enfrente. Esto determina entonces la cara que queda del lado de atrás (la que sería equivalente a la 'espalda'): allí tiene que aparecer el *dos*. Hasta acá está todo bien. Pero como decía anteriormente, ahora hay que tomar una decisión. Falta distribuir el *tres* y el *cuatro* como se ve en la Figura 3. Usted habrá advertido que hay dos formas de hacerlo: o bien uno pone el *tres* en la cara lateral derecha y el *cuatro* en la cara lateral izquierda, o… al revés. Pero lo notable de esto, es que cuando uno entra —por ejemplo— en una juguetería y compra dados, hay algunos que vienen con una 'orientación' y otros, con la opuesta. De hecho, de acuerdo con un aporte que me hizo Manu Ginóbili el otro día, hay una tendencia a poner el *tres* a la izquierda en los países orientales mientras que en nuestra cultura (más europea), se tiende a poner al *tres* a la derecha[54].

54. De hecho, al fabricar un dado, las caras que contienen los números *uno*, *dos* y *tres* tienen un vértice común. Las dos orientaciones posibles aparecen si uno ubica esas caras siguiendo el sentido que usa la aguja de un reloj (de izquierda a derecha) o si lo hace en sentido contrario (de derecha a izquierda).

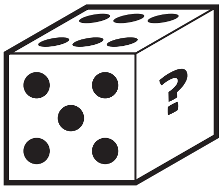


Figura 3

Nada cambia, sólo que la orientación que tenga el dado pareciera depender del lugar en donde uno lo haya comprado. Un dato más que me parece importante: hay solamente *dos* posibles orientaciones que dependen del lugar en donde usted ubique el número *tres* (y por lo tanto, el *cuatro*). Y no hay más alternativas, pero como intuyo lo que usted está pensando, si en lugar de haber empezado poniendo un *seis* arriba hubiera colocado cualquier otro número, igual habría tenido que tomar una decisión sobre cuál número del par que queda reservado a las caras laterales va a la derecha y cuál va a la izquierda. ¿Aparecerán entonces nuevos dados? No, uno recupera los dos tipos que describí antes. Para convencerse, le sugiero que se tome el tiempo usted o bien haciendo un dibujo o bien consiguiéndose un cubo y probando.

El problema

Quiero contar la historia de un problema que encontré hace mucho tiempo en un libro muy antiguo (lo cual no garantiza que sea la versión original tampoco). Como siempre, además del problema, anoté el nombre del autor y me fui. Lo frustrante fue que pasaron algunos meses y cuando quise recuperar la idea advertí que había perdido el papel y, peor aún, no recordaba exactamente las condiciones del problema. Pensé durante un tiempo pero al final, lo abandoné. En diciembre de 2013, mientras revisaba un libro publicado por el matemático inglés Barry R Clarke[55], lo volví a encontrar y ahora lo quiero escribir y publicar rápidamente para que no se me escape otra vez. Verá que es un problema muy sencillo y que parece de muy fácil solución. Sin embargo, me permitirá *hilvanar algunos argumentos* y presentar algunas cosas nuevas (al menos para mí) cuando uno habla de *dados*. Además, el problema es ciertamente entretenido... e ilustrativo.

Primero, fíjese en la Figura 4.

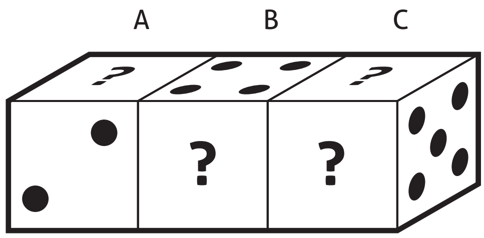


Figura 4

Les voy a poner 'nombre' a los dados: A, B y C. A es el dado de la izquierda, B es el del medio y C es el de la derecha.

El problema consiste en lo siguiente: entre los tres dados hay cuatro caras que son visibles pero a las que les faltan los números. Se trata de encontrar qué números tienen que ir allí. Por supuesto, si no hubiera ninguna restricción, el problema tendría muchísimas soluciones; por eso ahora voy a poner las 'reglas' que los dados tienen que cumplir:

1) los cuatro números que faltan tienen que servir para completar los seis dígitos que tiene un dado. Es decir, entre los tres dados, se conoce el número de la 'tapa' del dado B

55. *Mathematical Puzzles and Curiosities*, de Barry R Clarke, publicado por Dover.

(que es un número 4) y el 'frente' del lado A (que es un 2). Bien, entre las tapas de A y de C, y los 'frentes' de B y de C, deben aparecer los números que faltan: 1, 3, 5 y 6. Fíjese que el número 5 que figura en el dado C no está ni en el frente ni en la tapa. Sólo servirá para ayudarlo a encontrar la solución. Sigo...

2) La suma de las tres caras que están en el frente, o sea, la suma de los números que aparecen en el frente de A, de B y de C, es un número *par*.
3) Por último, la suma de las *cuatro caras que* ***no se ven*** (la cara lateral derecha de A, las caras laterales izquierda y derecha de B y la cara lateral izquierda de C) *también* resulta ser un número par.

¿Tendrá solución el problema? Podría ser que no, y en ese caso, le pediría que explique las razones. Pero podría ser que *sí* tuviera solución, y en ese caso le pido no sólo que la exhiba (a la solución) sino que quiero agregar otra pregunta: ¿cuántas soluciones posibles hay? Eso sí: los tres dados tienen la *misma* orientación.

Ahora, sólo se trata de pensar y entretenerse intelectualmente mientras lo hace.

Respuesta

Para empezar le voy a poner "nombres" a las caras de los dados A, B y C. Es decir, voy a llamar AT, BT y CT a las caras que están 'arriba' en A, B y C respectivamente. Por otro lado, voy a llamar AF, BF y CF a las caras que están al frente en los tres dados. AD, BD y CD a las tres caras laterales derechas de cada dado y Aizq, Bizq y Cizq a las tres caras laterales izquierdas.

Espero no confundirlo con tantos nombres pero como usted no está al lado mío, y no estoy haciendo un programa de televisión, necesito que nos pongamos de acuerdo en la *nomenclatura*, para que cuando yo haga un análisis sobre los dados, entendamos lo mismo.

Ahora sí, creo que estamos listos para pensar juntos el problema.

¿Pudo avanzar usted? ¿Lo pudo resolver? ¿A qué conclusiones llegó? Acá va mi análisis de la situación.

La primera conclusión que yo pude sacar es la siguiente: en algún lugar tiene que ir el número 5 (porque es uno de los números que faltan). Recuerde que el 5 que aparece en el dado C (la cara CD) *no está entre las caras a las que tenemos que asignar un número*. Sin embargo, el hecho de que se 'vea' ese número 5, indica que ya no voy a poder usar el 5 en ninguna de las dos caras de C que tengo que llenar (CF y CT). Por otro lado, el 5 tampoco puede ir en el dado A (¿por qué?). Como la cara de A que sí se ve (AF) es un número 2, entonces, la cara opuesta al número 2 tiene que ser un 5 y, por lo tanto, ya no la voy a poder usar en la tapa de A. Moraleja: como el número *cinco* ***tiene que estar***, y no puede estar ni en el dado A ni en el dado C, entonces debe aparecer en el dado B, pero como el dado B ya tiene una cara ocupada (la de la tapa, la cara BT, que es un número 4) uno deduce que la cara del FRENTE del dado B tiene que ser el número 5.

O sea,

$$\boxed{\textbf{BF = 5}} \quad (*)$$

Ya aparecen entonces los números *dos*, *cuatro* y *cinco*. Nos falta entonces ubicar el *uno*, el *tres* y el *seis*. Como el *uno* y el *seis* ocupan caras opuestas en cualquier dado, no podrán ocupar las dos caras que faltan de C. Es decir, si está el *uno* no está el *seis* y viceversa. Luego, el número 3 aparecerá *seguro* en el dado C. No sabemos aún si será en el frente o en la tapa, pero seguro que está en C. O sea, podemos concluir algo más:

$$\boxed{\textbf{CF = 3, o bien CT = 3}} \quad (^{**})$$

Por otro lado, si el *uno* es la otra cara de C que no ocupa el *tres*, entonces la tapa del A (AT) tiene que ser *seis*. Y al revés, si el *seis* es la otra cara del C que no ocupa el *tres*, entonces la tapa del dado A (AT) tiene que ser *uno*.

Ahora bien: hay cuatro caras internas que no se ven. El problema dice que la suma de esas caras internas que *no se ven* tiene que ser un número par. Como la cara lateral derecha de C (CD) es igual a *cinco*, del otro lado debe haber un *dos*. O sea, Cizq = 2.

Además, como las dos caras laterales de B (que tampoco se ven y que llamé Bizq y BD) tienen que sumar siete[56], ya tengo la suma de tres de las cuatro caras: 2 + 7 = 9. Para que la suma de las cuatro sea un número par —como pide el problema—, entonces la cara lateral derecha de A (AD) tiene que ser un número impar (porque la suma de dos impares es un número par).

Los números impares de un dado son 1, 3 y 5. Pero como la cara del frente de A (AF) = 2, la cara opuesta tiene que ser un *cinco*. Luego, AD debe ser o bien *uno* o bien *tres*. Por último, como vimos en la observación (**), ya sabemos que el *tres* tiene que estar en el dado C, y también sabemos que la tapa de A (AT)

56. ¿Pensó eso alguna vez? Creo que es muy conocido que las caras opuestas son: 1-6, 2-5 y 3-4, pero un dato que pasa normalmente inadvertido es que la suma de los números que figuran en esas caras opuestas siempre da *siete*.

es o bien un *uno* o bien un *seis*. Por lo tanto, se deduce que la cara interna derecha de A es un *tres*.[57]

Antes de avanzar para encontrar la solución, hace falta ponernos de acuerdo en qué orientación tendrá el dado que vamos a usar. Si uno mira un dado de tal forma que la cara del frente sea un *dos*, y la cara derecha sea un *tres*, la cara de arriba (AT) puede ser o bien un *seis* o bien un *uno*. Yo voy a elegir dados que tengan esa configuración: un *seis* en la tapa de arriba, un *dos* en el frente y un *tres* en la cara lateral derecha. Con estos datos, ya conocemos entonces las dos caras que necesitamos del dado A:

$$\boxed{AT = 6; AF = 2}$$

Por último, nos quedan por distribuir el *uno* y el *tres* y ubicarlos en el frente y la tapa del dado C. Usando el mismo tipo de dados (en cuanto a su orientación) que usé para el dado A, como sabemos que el *cinco* está en la cara lateral derecha, entonces la cara del frente de C (CF) no puede ser 3 (porque si no, la tapa de arriba tendría que ser un *seis*). Luego, la única configuración posible es:

$$\boxed{CT = 3; CF = 1}$$

Y eso termina por resolver el problema. La Figura 5 exhibe la solución si uno considera una de las orientaciones posibles.

57. Si AT = 1, entonces no puede ser que AD = 6 porque tienen que ser opuestas y, por la misma razón, si AT = 6, entonces no puede ser que AD = 1. Luego, AD = 3.

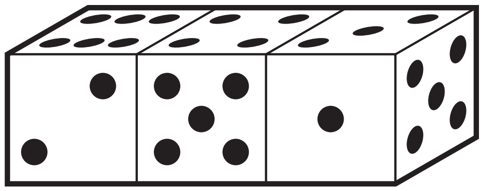


Figura 5

Lo interesante es que si uno tuviera dados del 'otro' tipo, con la 'otra' orientación, entonces el problema no tiene solución[58]. En cualquier caso, en el problema que estoy planteando acá, *todos* los dados tienen la misma orientación.

La matemática también aborda algunos problemas de este tipo, problemas que dependen de la orientación. No me refiero al de los dados, que termina siendo bastante sencillo, pero en todo caso, la idea *básica* es la que figura en las dos posibilidades que uno tiene para fabricar un dado.

¿Sabía usted que los dados tenían esa particularidad? Posiblemente no, nunca necesitó esa información. Siempre le bastó con saber que los números que ocupan las caras opuestas suman *sie-*

---

58. El frente del dado B está forzado a ser un 5 por las mismas razones que exhibí antes. Faltan distribuir otra vez el 1, el 3 y el 6. Por un lado, el 1 y el 6 tienen que estar en dados diferentes, lo que obliga a que el 3 esté seguro en el dado C y el 1 y el 6, repartidos entre A y C.

Si el 3 ocupara el frente de C, entonces por la orientación que tiene ahora el dado, la tapa de C debería ser un 1. Pero entonces, la cara superior del dado A tendría que ser el 6 y la configuración no permite que la cara lateral derecha de A sea un 3 para que las caras internas sumen un número par. Si el 3 ocupara la tapa de C, entonces el frente de C estaría obligado a ser un 6. Pero si así fuere, la suma de las caras del frente no daría un número par.

En definitiva, si el problema estuviera planteado con la otra orientación de los dados no sería posible encontrar una solución.

te. Este problema, en todo caso, pone en evidencia —una vez más— cuántas cosas nos son transparentes en nuestra vida cotidiana. Algunas, totalmente irrelevantes, como el caso de los dados y las distintas orientaciones; pero otras, seguro que no.

Velocidad promedio

Le quiero presentar un problema que podría plantearle su hija o su hijo cuando vuelve del colegio. Es uno de esos problemas que uno —creo— haría con los ojos cerrados y sin prestar demasiada atención. Pero al mismo tiempo, una vez que lo lea, y espero que lo haga, me gustaría proponerle que recorramos juntos el camino hacia la solución. Los lugares que elegí para el planteo y los números son totalmente irrelevantes. Usted verá que se pueden cambiar y que en nada modifica la historia. Acá va.

Supongamos que quiere recorrer el camino que lo lleva por la ruta 2 desde la Capital Federal hasta Mar del Plata. Como usted sabe, estas dos ciudades están separadas por 400 kilómetros. Como va a ir en auto, usted puede regular su velocidad como le plazca, pero se propuso hacer el trayecto a una velocidad promedio de 80 kilómetros por hora.

Sin embargo, cuando llegó a Dolores, como tuvo que detenerse más tiempo del que tenía previsto, advirtió que su velocidad promedio hasta allí fue de 40 kilómetros por hora.

Dicho esto, acá va la pregunta: ¿a qué velocidad promedio tendrá que ir desde Dolores hasta Mar del Plata (los 200 kilómetros que le faltan) para poder cumplir con su objetivo? Es decir, antes de salir usted se planteó como meta hacer los 400 kilómetros llevando una velocidad promedio de 80 kilómetros por hora, pero al haber ido muchísimo más despacio (a la mitad) hasta mitad de camino, la pregunta es: ¿a qué velocidad promedio tendría que ir en la segunda parte si quiere cubrir los 400 kilómetros a 80 kilómetros por hora?

¿Quiere pensar el problema en soledad ahora?

Respuesta

Me dan muchas ganas de pedirle que no lea la respuesta o, al menos, que no la lea tan rápido. ¿Por qué no se da una oportunidad más de pensar? En todo caso, me apuro a decirle lo siguiente: la respuesta NO es viajar a 120 kilómetros por hora en la segunda mitad del trayecto. Si llegó a esa conclusión, le sugiero que lo piense de nuevo.

No. Yo no me equivoqué con lo que escribí hasta acá. Lo notable de este problema es que parece tener una solución inmediata y, sin embargo, lo primero que se nos ocurre como potencial respuesta, es —en general— equivocada. Digo 'en general' porque quizá no fue eso lo que usted contestó.

Pero en todo caso, si no fue 120 kilómetros por hora, ¿qué respuesta encontró? O mejor aún: ¿encontró alguna respuesta?

Antes de escribir la solución, quiero pensar algo junto con usted y después sí, tratamos de encontrar el número que contesta la pregunta. Acompáñeme por acá.

Pongámonos de acuerdo en un par de cosas. La distancia a recorrer es de 400 kilómetros (Capital-Mar del Plata). Su objetivo es cubrir esos 400 kilómetros a una velocidad promedio de 80 kilómetros por hora. Entonces, ¿cuánto tiempo supone usted que le llevará hacer el viaje? Si son 400 kilómetros a 80 kilómetros por hora, la respuesta es que le debería llevar exactamente *cinco* horas. Eso está bien.

Por otro lado, de acuerdo con lo que escribí en el planteo, en los primeros 200 kilómetros usted no pudo llevar la velocidad que quería, sino que cuando hizo las cuentas, descubrió que fue a 40 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo le insumió entonces hacer la mitad del viaje? Si hizo 200 kilómetros a 40 kilómetros por hora, ese tramo le llevó *cinco* horas. ¿Y entonces? ¿Quiere pensar usted? ¿Cómo resolver este problema?

Aparece algo extraño en esto: usted quería hacer el viaje de 400 kilómetros en cinco horas, y por eso quería viajar a 80 kilómetros por hora. Pero resulta que como no pudo ir a esa velocidad, ¡usó ya las cinco horas que tenía previstas para *todo el trayecto* en recorrer nada más que la *mitad*! Por lo tanto, ¡no importa a la velocidad que vaya en la segunda parte, nunca podrá cumplir con su objetivo!

La respuesta entonces es que... ¡no se puede! Y acá es donde me quiero detener. Estoy —casi— seguro de que a usted le pasó lo que nos pasó a todos los que vimos este problema la primera vez. La tentación de decir 120 kilómetros por hora para la segunda mitad para compensar los 40 kilómetros por hora de la primera es demasiado grande. En realidad, lo que quiero es hacerla/lo reflexionar conmigo: no es que usted y/o yo estamos pensando mal el problema. No. El problema es que NO ESTAMOS PENSANDO. Estamos resolviendo OTRO problema (que voy a escribir a continuación). El que yo planteé inicialmente no tiene solución: la respuesta es "no es posible encontrar *ninguna* velocidad que pueda compensar lo que hicimos en los primeros 200 kilómetros". Notable, ¿no? Ahora sí, la situación que *realmente* estábamos resolviendo antes: "Uno quiere viajar de la Capital Federal a Mar del Plata (400 kilómetros) y lo quiere hacer a una velocidad promedio de 80 kilómetros por hora. Es decir, va a invertir *cinco* horas en hacer el trayecto".

Después de dos horas y media (la mitad del tiempo que tenía previsto para hacer todo el viaje) usted descubre que fue a 40 kilómetros por hora. Entonces, si la pregunta fuera: ¿a qué velocidad promedio tiene que recorrer el trayecto que le falta (que ahora NO son 200 kilómetros) para que al llegar a Mar del Plata su velocidad promedio fuera de 80 kilómetros por hora?, entonces SÍ, la respuesta sería que debe hacer las siguientes dos horas y media a 120 kilómetros por hora. ¿Por qué? Porque en las primeras dos horas y media recorrió 100 kilómetros (ya que fue a 40 kilómetros por hora). Si en las siguientes dos horas y media viaja a 120 kilómetros por hora, entonces hace los 300 kilómetros que le faltan. Ahora sí, la velocidad promedio de *todo* el trayecto fue de 80 kilómetros por hora como se propuso inicialmente.

En todo caso, lo curioso es que los dos problemas son distintos y, sin embargo, nosotros decidimos 'confundirlos' y contestar el primero como si el planteo fuera el segundo. Creo que eso sucede porque tenemos —en alguna parte— pereza para pensar, pereza por el esfuerzo que ello implica y, en todo caso, es siempre mucho más sencillo tratar de 'recordar' que de pensar. Uno escucha que debería ir a 80 kilómetros por hora y que viajó a 40 kilómetros en la 'mitad' e intuye que debe ser la 'mitad' del tiempo y no la 'mitad' del trayecto. Un problema tiene solución (el segundo) y el otro no.

Si pudiera extrapolar (y lo voy a hacer aun a riesgo de equivocarme), le sugeriría que cuando uno sospecha que los niños/jóvenes tienen problemas para interpretar un texto que leen (o escuchan) haga también un acto mínimo de introspección, porque a nosotros (los adultos) nos pasa lo mismo.

Sólo que se nota menos porque no nos toman 'prueba' con tanta frecuencia[59].

59. Quiero agregar acá un comentario muy interesante que me hizo Carlos D'Andrea respecto de este problema: "Adrián, yo no creo que la gente te conteste rápidamente 'por pereza' sino porque estamos acostumbrados a ver la proporcionalidad como una primera aproximación a todo: la 'regla de tres' es lo que nos enseñan en la escuela y con eso pareciera que todo se tiene que resolver. Pero incluso las leyes clásicas de la física son todas de proporcionalidad, y también buena parte del análisis de ecuaciones complicadas (polinomiales, diferenciales, etc.) consiste en 'linealizar el problema' y luego, resolver el problema lineal asociado. O sea que hay algo inherente a 'linealizar un problema' que tenemos todos en la cabeza, que tiene que ver con que:

a) es más fácil de resolver;
b) en la mayoría de los casos la solución, o bien *es* la correcta o 'está muy cerca' de la correcta.

Pero no creo que sea *pereza*. Quizá podría ser una combinación entre la 'deformación profesional' (tenemos un exceso de problemas resueltos con métodos de *regla de tres* en la cabeza) y también del hecho de que ese tipo de problemas son fáciles de resolver, y además, sabemos cómo hacerlo".

La matemática y un pequeño aporte a la medicina

La incidencia que puede tener un matemático en la toma de decisiones en la vida real es cada vez más notable. Quiero mostrar aquí algunos ejemplos (de los miles que hay) sobre los riesgos que se corre en la vida cotidiana si no hay un matemático para interpretar los datos:

a) A una mujer de 40 años a la que se le hizo una mamografía le dio positivo. ¿Significa que tiene cáncer de mama?
b) A un atleta le dio positivo un test por supuesto uso de esteroides. ¿Significa que efectivamente los estaba usando?
c) Una prueba de ADN parece indicar que una persona fue el autor de un crimen. ¿Cuál es el grado de certeza de que eso sea cierto?

Como se ve, el grado de sensibilidad de cada uno de estos casos merece una atención particular. Naturalmente, yo no soy un experto ni mucho menos, en este tema "toco de oído" (que, por cierto, no es muy bueno en los últimos tiempos), y no tengo suficientes conocimientos como para poder revelar casos relevantes.

Pero lo que sí tengo es suficiente experiencia para poder alertar a quienes corresponda (o sea, a toda la población) sobre la importancia de saber interpretar datos de la realidad, y que para eso hace falta gente experta (ciertamente no yo).

De todos los ejemplos que conozco (y son muchos), elegí adaptar uno que me parece claro para entender la situación. Es una "versión libre" del que plantea el especialista en inteligencia artificial Eliezer Yudkowsky, investigador (entre otros lugares) en la Universidad de Stanford, Estados Unidos.

El planteo

Los datos que figuran a partir de acá son ficticios. Los inventé para poder exhibir el problema, pero no se corresponden con la realidad (esta aclaración me hace acordar a lo que aparece siempre en las películas: "Cualquier parecido o semejanza con la realidad es pura coincidencia").

Supongamos que su médico de cabecera sospecha que, de acuerdo con los síntomas que detecta, usted podría tener una rara variedad de cáncer. Y quiere someterla/lo a un determinado test para confirmarlo o descartarlo.

El médico le explica que en base a los estudios que se han hecho y que son de dominio público y universal —es decir, en todo el mundo se aceptan como válidos al día del test—, esta enfermedad afecta sólo al 1% de la población.

En resumen: se sabe que sólo una persona de cada cien tiene la enfermedad (la probabilidad de tenerla es 0,01).

Por otro lado, el único test que se conoce para detectar el problema no es infalible. Es decir: si una persona tiene la enfermedad, el resultado va a ser positivo sin ninguna duda.

Pero podría pasar que usted no tenga esta variedad de cáncer y que, sin embargo, el test dé positivo igual. Es lo que se llama un falso positivo.

Más aún: se sabe que el 20% de las veces el resultado es positivo aunque no haya cáncer. O sea, el test 'anuncia' que una persona *da positivo* (por lo que uno supone que debería tener esa variedad de cáncer) pero no hay nada anómalo en el organismo (respecto de esta enfermedad, claro está).

Pregunta: cuando a usted le hacen el test y le da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que efectivamente tenga este cáncer?

Acá, una pausa. ¿Entiende usted el planteo que estoy haciendo? No vale la pena que se pierda justo ahora. Relea lo anterior y convénzase de que siguió lo que dice.

Resumo yo los datos que se tienen sobre esta variedad de cáncer:

a) Lo padece el 1% de la población. Es decir, sólo una de cada cien personas.
b) Si una persona tiene este cáncer, el test lo detecta y el resultado es siempre positivo. En ese sentido, el test es perfecto.
c) Otro dato: entre la población *sana*, el test se equivoca un 20% de las veces y ofrece *falsos positivos*. La persona no está enferma, pero para el *test*, sí lo está.

Obviamente, a una persona sospechada de tener la enfermedad (y a su médico) sólo le importa saber si la tiene o no. Para eso usa el test. Y quiere saber cuán confiable es.

¿Qué quiere decir que dio positivo? ¿Qué probabilidad tiene de estar enfermo (de esa variedad de cáncer)? ¿Quién interpreta esos datos?

Aquí lo dejo sola/o a usted. ¿Qué contestaría?[60]

---

60. Resumo acá los porcentajes: 1) Si una persona tiene cáncer en un 100% de los casos el test le dará positivo; 2) Si una persona tiene cáncer, el

La tentación es decir que si a una persona le dio positivo el test, entonces tiene un 80% de posibilidades de tener ese cáncer. Y eso es lo que contestaría la mayoría de nosotros.

Peor aún: varios estudios hechos en Estados Unidos, Francia e Italia[61] muestran que cuando los propios médicos son los que tuvieron que contestar la pregunta, sólo respondió correctamente el 15% (¡quince por ciento!). Y uno de esos exámenes se hizo (es cierto, en 1978) en uno de los hospitales de Harvard, nada menos. Pero hay otros posteriores que exhiben que el problema persiste aún ahora.

Lo que quiero, entonces, es invitarla/o a pensar conmigo y ver cómo la matemática ayuda a resolver el problema.

Supongamos que usted vive en una ciudad de 10.000 personas (como sólo vamos a hablar de porcentajes, fijar el número en 10.000 no producirá ninguna variante en el resultado final). Esto quiere decir que como sabemos que una de cada 100 personas tiene este cáncer, tiene que haber 100 personas (el 1% de 10.000 es 100) que lo padecen.

Dicho esto, de los restantes 9.900 individuos, si todos se hicieran el test, ¿a cuántos le daría positivo? (Recuerde que el test ofrecía un 20% de falsos positivos.) Luego, el 20% de 9.900 implica que habría otros 1.980 positivos más.

---

porcentaje de que dé negativo es *¡cero!*; 3) Una persona *sana* (de este cáncer al menos) tiene un 20% de posibilidades de que el test le dé positivo igualmente (son los 'falsos positivos'), y 4) a un 80% de las personas que no tengan este cáncer, el test les va a dar negativo.

61. "Behavioural Decision Theory", de E.C. Poulton (EE.UU.), "Chances and Frequencies in Probabilistic Reasoning: Rejoinder to Hoffrage, Gigerenzer, Krauss and Martignon", de Vittorio Girotto (Italia) y Michel Gonzalez (Francia).

En total, contando las 100 personas que dan positivo porque tendrían el cáncer, más las 1.980 que darían positivo sólo por las fallas en el test, tendríamos 2.080 personas que darían positivo.

Usted es una de ellas. La pregunta era: ¿cuál es la probabilidad de que, siendo positivo, tenga el cáncer?

Traducido en estos números quiere decir: ¿cuál es la probabilidad de que usted sea uno de los 100 que entre los 2.080 tienen el cáncer?

La respuesta es:

$$100/2080 = (\text{aprox.})\ 0{,}048076$$

Luego, usted tiene un 4,81% de posibilidades de tener el cáncer (¡menos del 5%!), que ciertamente es un porcentaje importante, pero está bien lejos del 80% que parecía en principio.

Confundir los porcentajes y su incidencia es mucho más común de lo que parece y, para finalizar, la/lo invito a pensar un instante en la siguiente frase: "La probabilidad de que a una persona al que el test le da positivo *tenga cáncer* **no es la misma** que la probabilidad de que a alguien que tenga cáncer le dé positivo el test".

Moraleja

Obviamente, los médicos no tienen por qué ser matemáticos, ni por qué saber interpretar estos datos. Para eso están los matemáticos. Pero los médicos no pueden ignorar que, si van a manejar estadísticas de este tipo, necesitan tener el conocimiento como para hacerlo y sacar conclusiones. La autoridad que socialmente tienen los médicos sobre nuestras vidas los obliga a esforzarse en problemas de este tipo.

De la misma forma, hay ejemplos de atletas (Mary Slaney, velocista norteamericana en los Juegos Olímpicos de 1996) que fueron suspendidos por el supuesto uso de esteroides y cuyos abogados probaron que había sido una mala lectura de la información recogida. Y también hay casos de jueces que encontraron paternidades donde no las había, o acusados y condenados por crímenes que no habían cometido. La lista es muy larga (y el espacio y mis conocimientos, muy cortos).

Con todo, el aporte más importante para el aprovechamiento de métodos (como el test anterior), que si bien no son infalibles son mejores que no tener nada, lo hizo Thomas Bayes (1702-1761), matemático y presbítero inglés, quien con el teorema que demostró (Teorema de Bayes, obvio) dejó un legado para siempre y una alternativa para mejorar la calidad de interpretación de los datos que se obtienen.

Lo notable de este ejemplo es que una vez que uno entendió el problema y leyó la solución, piensa: ¿cómo es posible que no se me haya ocurrido antes? Pero en el momento en que la vida de una o varias personas depende de algo tan sensible, como la interpretación de los datos, es cuando uno necesita la más alta calidad de ciencia.

¿Faltan datos?

Todos los problemas que han ido apareciendo en cada uno de los libros, como los que propongo en los programas de televisión o los que aparecen publicados en *Página/12*, tienen algún ingrediente que me resulta atractivo. En principio, estoy convencido de que si no me atrapa a mí, mal puedo pretender que le interese a quien está leyendo. Por eso cada vez que le ofrezco a alguien *algo* para pensar, a mí ya me despertó alguna curiosidad que quiero compartir.

El siguiente es un caso más. A priori, cuando uno recorre el enunciado tiene la tentación de decir que no se va a poder resolver, que *faltan datos*. Y ésta es una cuestión que se repite sistemáticamente: ¡faltan datos! O en todo caso, los datos que uno detecta en un planteo parecen insuficientes. Y creo que *ése* es el gran desafío.

Sígame por acá y veamos (juntos) si es posible encontrar la solución a este problema.

Supongamos que usted entró en un kiosco y compró tres tipos de golosinas: caramelos, galletitas dulces y chocolates. Juntando todo lo que compró, se llevó 30 cajas por las que pagó 30 pesos. Se sabe además, que compró *por lo menos* una caja de cada producto.

Cada uno de los productos venía envasado en su propio paquete y los precios por unidad estaban distribuidos de la siguiente forma:

a) cada caja de caramelos costaba tres pesos,
b) cada caja de galletitas costaba dos pesos, y finalmente,
c) cada caja de chocolates costaba 50 centavos.

¿Es posible determinar cuál fue la distribución de lo que compró? Es decir, ¿es posible determinar cuántas cajas de cada producto se llevó a su casa?

Me apuro a escribir la respuesta: sí, se puede. Inténtelo usted y verá que se puede, aunque en el camino pueda aparecer alguna dificultad. Pero como yo le garantizo que no hay ninguna trampa ni nada escondido, dedíquele un rato y se sentirá reconfortado cuando deduzca la respuesta. Y si así no fuere, acompáñeme y lo pensamos juntos.

Solución

Sólo para hacer más cómoda la escritura, le asignaré 'letras' a cada una de las cajas: denominaré C a los caramelos, G a las galletitas y L a los chocolates.

Voy a escribir dos igualdades y le pido que por favor, no se pierda con las letras. En principio, se supone que deberían hacer todo mucho más fácil.

La primera igualdad dice:

$$C + G + L = 30 \qquad (1)$$

¿Por qué? Es que la cantidad de cajas de caramelos, más las de galletitas, más las de chocolate, al sumarlas, tienen que dar 30 como establece el enunciado.

Por otro lado, la caja C vale 3 pesos, la caja G vale 2 pesos y la caja L, vale 50 centavos.

Como en total pagó 30 pesos, eso significa que:

$$(3 \times C) + (2 \times G) + (1/2) \times L = 30$$

O lo que es lo mismo:

$$3C + 2G + (1/2)L = 30 \qquad (2)$$

Ahora tenemos las dos igualdades, (1) y (2).

Querría eliminar una de las variables (la C, la G o la L). Voy a tratar de eliminar la L. Para eso, voy a multiplicar por dos la igualdad (2). Resulta ahora:

$$6C + 4G + L = 60 \qquad (3)$$

Si ahora resto la igualdad (3) menos la (1), se tiene:

$$\boxed{\mathbf{5C + 3G = 30}} \qquad (4)$$

Al mirar la igualdad (4) uno tiene la tentación de decir que hay *infinitas* soluciones. Por ejemplo, uno podría pensar que si le doy el valor *cero* a C, entonces se obtendría el valor 10 para G, y listo.

De la misma forma, uno podría poner el valor *cero* a G, y el valor *seis* para C y también logra que se verifique la igualdad (4).

Sin embargo, el problema estipula (si lee el enunciado se podrá convencer de que es cierto) que usted compró *por lo menos una caja* de cada producto. Por lo tanto, *no es posible* darle el valor cero a ninguna de ellas. No está bien poner *cero* ni a C ni a G.

Luego, esas dos soluciones no son posibles.

Por otro lado, fíjese que los números que aparecen involucrados (C, G y L) son *todos números naturales*, o sea, números enteros positivos[62].

Más aún: al *mirar* la igualdad (4), uno descubre que como todos los números involucrados son naturales, y el número de la derecha (30) es múltiplo de 3 y de 5, entonces, tanto C tiene que ser múltiplo de 3 como G tiene que ser múltiplo de 5. Si no, *aparecerían decimales* que sabemos que no son posibles[63].

Ahora bien: estamos muy pero muy cerca de la solución. ¿Cuáles son los posibles valores para C y para G?

Como C tiene que ser múltiplo de 3, los *primeros números posibles para* C son: {3, 6, 9}.

Por otro lado, como G tiene que ser múltiplo de 5, los *primeros números posibles para* G son: {5, 10, 15}.

¿Por qué escribo los 'primeros números posibles'? Es que el valor de G (que tiene que ser múltiplo de 5) no puede ser mayor que 10, porque si no, si fuera 15 por ejemplo, en la igualdad (4) ya aparecería que $3 \times 15 = 45$ cuando en total se gastaron nada más que 30 pesos. O sea, el hecho de que el total de lo invertido haya sido 30 pesos, pone límites sobre el número de cajas tanto de C como de G (caramelos y galletitas).

---

62. No pueden aparecer 'fracciones'. El número de cajas de cada uno de los productos *tiene que ser* un número natural.

63. Este tipo de igualdades o ecuaciones se llaman 'ecuaciones diofánticas', en honor a Diofantos. La idea es que *todos* los números que aparecen involucrados *tienen que ser números naturales*.

¿Qué combinación hace posible la igualdad (4)?
Si usted se fija en lo que escribí antes, se tiene:

C {3, 6, 9}
G {5, 10, 15}

Como hay que multiplicar por 5 los valores de C, ya el número 6 no puede ser porque $5 \times 6 = 30$: no quedaría más dinero para comprar ni galletitas ni chocolates. O sea, el *único* valor posible para C es *tres*.

Por otro lado, como a G hay que multiplicarlo por *tres*, entonces ya no puede ser 10, porque llevaría el costo de las galletitas a 30. Luego, el *único* valor posible para G es *cinco*.

Y con esto creo que está resuelto el problema. Los valores que hemos encontrado son los siguientes:

$$C = 3 \text{ y } G = 5$$

Dicho esto, falta conocer qué pasó con las cajas de chocolate.

Si usted se fija en la igualdad (1) y reemplaza tanto a C como a G por sus respectivos valores (3 y 5), se tiene ahora la siguiente igualdad:

$$3 + 5 + L = 30$$

De acá se puede 'despejar' el valor de L:

$$L = 30 - 3 - 5 = 22$$

Y eso resuelve definitivamente el problema:

$C = 3$
$G = 5$
$L = 22$

Como sabemos que las cajas de C cuestan 3 pesos, las de G cuestan 2 y las de L cuestan 50 centavos (o sea, ½ de peso), entonces, multiplicando el número de cajas por el valor de cada una, se tiene:

$$3 \times 3 + 2 \times 5 + 22 \times (1/2) = 9 + 10 + 11 = 30$$

Moraleja

En principio parecía que había (o hay) infinitas soluciones, pero el hecho de que se supiera que al menos había comprado una caja de cada producto forzaba a que ninguna de las variables pudiera ser cero. Por otro lado, como todos los números eran enteros positivos, pudimos descubrir que C tenía que ser múltiplo de 5 y que G tenía que ser múltiplo de 3.

Y al final, como la cantidad de dinero gastada era fija, la solución para el problema era única.

La combinación de todos estos 'datos' que parecían intangibles o transparentes, hizo posible que encontráramos esa única solución. ¿No le pareció muy interesante?

Probabilidad de que salga una figura

Éste es un problema precioso porque pone a prueba nuestra capacidad para intuir, nuestra percepción. Voy a suponer que usted ha jugado alguna vez en su vida a las cartas (naipes). Para simplificar, voy a apelar a las cartas españolas, pero el problema se puede trasladar a naipes de cualquier tipo.

Como usted sabe, hay cuatro 'palos' posibles: oro, espada, basto y copa. Elijamos las cartas que son nada más que de oro y de espada. Es decir, nos quedamos con 20 cartas (del 1 al 12 —rey—, excluyendo *los ochos y los nueves*, como si estuviéramos por jugar a la escoba de quince o al truco).

Mezclamos las cartas y retiramos tres cualesquiera. ¿Qué cree que pasa? ¿Es más probable que entre las tres cartas haya una 'figura' (rey, caballo o sota) o que no la haya?

Antes de avanzar e incluso de pensar en la solución, le propongo que reflexione sobre lo que usted cree que es más probable: ¿habrá una figura o no? Más aún: cualquiera sea su intuición, ¿habrá mucha diferencia entre una posibilidad y la otra? (que haya una figura o que no la haya).

Ahora sí, como tantas otras veces a lo largo del libro, la/lo dejo con usted misma/mismo.

Solución

Recuerdo aquí cómo se calcula la probabilidad de que se produzca un determinado evento. Se hace la división entre los casos favorables sobre los casos posibles. De esa forma, la probabilidad de que al tirar una moneda salga *cara*, es ½, porque los casos favorables son *uno solo* (que salga cara), y los posibles son *dos* (cara o ceca). Con igual razonamiento, la probabilidad de que salga un *cuatro* al tirar un dado, es 1/6, porque hay *un solo caso favorable* (que salga el *cuatro*), y los casos posibles son *seis*.

Dicho esto, voy a tratar de calcular la probabilidad de que al sacar tres cartas cualesquiera (de las 20 posibles) ***no haya ninguna figura***.

Los casos *posibles* son *todos los grupos de tres cartas diferentes que uno pueda armar* con las 20 cartas.

Por otro lado, los casos *favorables* son aquellos grupos de tres cartas en donde ***no haya ninguna figura***, es decir, son las combinaciones de tres cartas elegidas entre las 14 que no son figuras.

Voy a empezar calculando los casos *posibles*.

Suponga que usted tiene *tres lugares* vacíos en donde va a poner tres cartas cualesquiera. ¿Cuántas alternativas tiene para la primera carta? En total, 20. Una vez que eligió la primera carta, para la segunda le quedan 19 posibilidades. Luego, para las dos primeras cartas hay $20 \times 19 = 380$ formas de elegirlas.

Para la tercera carta, nos quedan 18 alternativas. Es decir, para elegir tres cartas cualesquiera, hay $20 \times 19 \times 18 = 6.840$ posibilidades.

Calculemos entonces los casos *favorables*. Ahora no hay 20 cartas para elegir, sino nada más que 14.

Para la primera carta hay 14 posibilidades, para la segunda 13 (ya que una fue eliminada porque 'va primera'), y para la tercera quedan 12.

En total se tienen entonces:

$$14 \times 13 \times 12 = 2.184$$

Y ya estamos a punto de terminar. La probabilidad de que *no salga ninguna figura* se calcula dividiendo los casos favorables sobre los posibles, o sea,

2.184 / 6.840 = 0,31929... (aproximadamente igual a 0,32)

Esto sería equivalente a decir que casi un 32% de las veces *no* sale una figura entre las tres cartas. La probabilidad de que *sí* salga una figura, entonces, es más del 68% (se obtiene restando 100% − 32% = 68%).

O sea, la probabilidad de que *SÍ salga una figura* es de 0,68070...

Fíjese que es un hecho notable y no tengo claro que uno lo perciba cuando juega a las cartas: si uno elige tres cartas cualesquiera (de dos palos nada más), la probabilidad de que *salga una figura* es casi del 70%[64].

¿No le parece sorprendente a usted también?

Antes de terminar, me imagino que debe estar preguntándose: ¿y en el caso de tener el mazo completo (con las 40 cartas)? ¿Qué pasa allí? Si uno extrae tres cartas al azar, ¿cuál es la probabilidad *ahora* de que salga una figura?... ¿Quiere pensar usted?

---

64. Nota: aquellos que saben un poco más de combinatoria, seguramente tienen la tentación de decir que hace falta dividir por 3! = 6, ya que para hacer el cálculo no importa el *orden* en el que uno tiene las cartas en la mano. Esto es *bien cierto*, por lo que habría que dividir —efectivamente— por seis. Sin embargo, como *también* hay que dividir por 3! = 6 los casos favorables, entonces, se transforma en innecesario hacer esa división.

Sigo yo. Igual que antes, ahora se tienen 40 cartas porque excluimos los *ochos* y los *nueves* y consideramos los cuatro palos: oro, espada, basto y copa, aunque como usted habrá advertido, los *palos* no tienen ninguna incidencia en el análisis que estuvimos haciendo.

Empecemos por calcular la probabilidad de que *no* salga ninguna figura. Para eso, quiero calcular los *casos favorables* y luego dividir ese número por los *casos posibles*.

Los casos *favorables* cambiaron porque ahora hay *12 figuras* entre las 40 cartas (tres por palo). Como quiero que ninguna de las tres que voy a extraer sea una de ellas, necesito que surjan de las 28 que quedan: 40 – 12 = 28.

Por lo tanto, los casos *favorables* (que ninguna de las tres cartas sea una figura) se calculan así:

$$28 \times 27 \times 26 = 19.656$$

Al igual que como hicimos en el caso anterior cuando teníamos 20 cartas, ahora quiero calcular cuántas formas posibles hay de extraer tres cartas entre las 40 del mazo. La cuenta que hay que hacer es ésta:

$$40 \times 39 \times 38 = 59.280$$

Al dividir

$$\text{Favorables/Posibles} = 19.656/59.280 = 0{,}3315789474\ldots$$

Es decir, al extraer tres cartas al azar, en más de un 33,15% de los casos, no saldrá una figura. Esto permite afirmar entonces que la probabilidad de que *SÍ* salga una figura es (aproximadamente):

$$1 - 0{,}3315789474... = 0{,}6684210526...$$

En términos porcentuales, podemos afirmar que, al extraer tres cartas al azar de un mazo de 40 naipes, la probabilidad de que entre las tres haya una figura es de *casi un 67%*.

Esto concluye la idea que quería compartir con usted cuando propuse el problema: intuitivo o no, cuando uno recibe tres cartas elegidas entre 20 o 40 naipes españoles, es mucho más probable que entre las tres haya una figura que que no la haya. Como escribí anteriormente, es un dato que a mí me parece sorprendente.

3. DEPORTES Y JUEGOS

Cuadrangular de fútbol

Siempre que se juega un campeonato mundial (como el más reciente de Brasil), una vez que se establecen los participantes de los ocho grupos, comienzan las conjeturas sobre quiénes serán los dos primeros que se clasifican para los octavos de final, es decir, cuando queden determinados los 16 equipos que pugnarán por el título.

Más allá de los campeonatos mundiales de fútbol, el texto que sigue tiene validez en cualquier caso en donde los equipos o participantes se dividan en grupos de cuatro. Los argumentos sirven para cualquier torneo cuadrangular en donde todos jueguen contra todos, los ganadores obtienen tres puntos, los perdedores no obtienen ninguno y en el caso de empate, ambos equipos se adjudican uno cada uno.

Dicho todo esto, voy a llamar A, B, C y D a los integrantes del grupo. Suponga que se dieron los siguientes resultados:

1) B ganó exactamente dos de los partidos que jugó.
2) C empató exactamente dos de los partidos que jugó.
3) D perdió exactamente dos de los partidos que jugó.

Con estos datos, ¿es posible que el equipo A haya ganado el grupo en soledad?[65] Y si así fuere, ¿a qué equipos tuvo que haberles ganado?

Como usted advierte, es un problema de enunciado sencillo. Todo lo que hace falta es sentarse con un poco de paciencia y pensar en las distintas posibilidades. Para eso, la/lo dejo a usted.

Respuesta

Uno tiene la tentación de decir que bastaría con que el equipo A gane los tres partidos y listo. Lo que implicaría —obviamente— que el equipo A ganó el grupo en soledad.

Eso es cierto, pero violaría las condiciones iniciales del problema. Piense conmigo: B tiene que ganar exactamente dos partidos pero —al mismo tiempo— tiene que perder con el equipo A (que debe ganar sus tres encuentros).

Pero si B gana los partidos contra C y D, entonces esto no le permitiría a C empatar exactamente dos partidos, ya que debe perder con A y con B. Luego, *no le quedan* dos partidos por empatar como está previsto en las condiciones iniciales del problema.

Luego, el equipo A (ni ningún otro) pudo haber ganado los tres partidos.

Ahora analicemos si el equipo A puede *perder* algún partido y que se cumplan las condiciones pedidas. Para que el equipo A conquiste el grupo en forma absoluta (pero respetando las restricciones escritas anteriormente), tiene que haber ganado por lo menos dos partidos. Si no, no le alcanzaría para igualar a B, que sabemos que ganó dos. Pero por otro lado, si perdiera alguno,

65. Al escribir que el equipo A ganó el grupo 'en soledad', quiero decir que fue el único que salió primero.

entonces a lo mejor que podría aspirar es a empatar el primer puesto con B (suponiendo que ganara los otros dos).

O sea, de todos estos datos se deduce que el equipo A:

a) no puede ganar los tres partidos
b) no puede perder ningún partido.

La única alternativa que queda es que A gane dos y empate uno. De acuerdo, pero ¿a quiénes les tiene que ganar y con quién debería empatar? ¿No le dan ganas de pensar a usted?

Sigo yo. La clave está —creo— en el partido A versus B.

Por un lado, sabemos que los dos equipos ganaron por lo menos dos partidos. Si empataran en este partido entre ambos, terminarían ganando el grupo los dos, y eso no es lo que queremos (el equipo A tiene que ganar el grupo en soledad). Y esto es muy importante, porque se deduce que entre ellos no pueden empatar.

Y ni hablar de que B le gane a A, porque ya sabemos que A no puede perder ningún partido. Entonces, todas estas reflexiones sirven para concluir que A *tiene que ganar el partido contra* B.

A partir de este dato, analicemos el resto. Por ahora, sabemos lo siguiente:

1) A le ganó a B, y tuvo que haber ganado o bien a C o bien a D, pero *no a los dos* (ya que no pudo ganar los tres partidos).
2) B perdió con A, pero tuvo que haberle ganado a C y a D.
3) Como se sabe que C empató exactamente dos partidos, al haber perdido con B, tuvo que haber empatado los otros dos: con D, sí, pero *también con* A. Y eso termina respondiendo lo que no sabíamos en el punto (1).
4) Por último, D empató con C, pero como perdió dos partidos exactamente, tuvieron que ser contra A y B.

Ahora, un cuadro con un resumen de lo que tuvo que haber pasado:

	A	B	C	D
A	X	3	1	3
B	0	X	3	3
C	1	0	X	1
D	0	0	1	X

Esto concluye el análisis. La respuesta final entonces es que sí, que se puede: A puede ganar invicto el grupo y ganarlo en soledad aunque haya un equipo (B) que gane dos partidos, otro (C) que empate dos de sus partidos y el último (D) que pierda exactamente dos[66].

Ah, y esto es hacer matemática también.

66. Más aún: sin habérmelo propuesto, demostré que la tabla de posiciones que se genera cuando los equipos verifican *todas* las restricciones impuestas, *es la única posible*. Es decir, al terminar todos los enfrentamientos entre los cuatro equipos del grupo, la *única* tabla de posiciones que pudo darse es la que figura en el problema: no hay otra.

Preguntas sobre la escoba de 15

Jugar a las cartas es un pasatiempo —creo— universal. Como usted sabe, hay diferentes tipos de naipes. Nosotros jugamos, en general, con cartas españolas (tute codillo, tute cabrero, truco, escoba de 15, chinchón, por poner algunos ejemplos), pero también son populares las cartas francesas (póker, gin rummy, baccarat y otros). En el mundo existen más variedades de cartas, la mayoría de las cuales me son totalmente desconocidas.

Sin embargo, para el caso que quiero analizar acá, me interesa hablar de la Escoba de Quince. No voy a escribir las reglas en este espacio, pero me voy a tomar la licencia de suponer que una persona que está leyendo estas líneas sabe cómo se juega, aunque *todo* lo que hace falta es saber que en el juego, el objetivo es ir juntando cartas hasta sumar 15. Para hacerlo más fácil aún, no voy a excluir a los números *ocho* y *nueve* de cada palo. Por lo tanto, en lugar de que la 'sota', el 'caballo' y el 'rey' valgan *ocho, nueve y diez* respectivamente, vamos a permitir que cada palo tenga doce cartas: del 1 al 12 y que cada número se represente a sí mismo. Es decir, la 'sota' vale 10, el 'caballo' vale 11 y el 'rey' vale 12.

Ahora tengo algunas preguntas para hacerle. Supongamos que sobre la mesa quedaron las doce cartas de un mismo palo, digamos de 'basto' para fijar las ideas, pero nada cambiaría con cualquier otro. Por supuesto que ésta es una situación totalmente ficticia: el juego en sí mismo *nunca permitiría* que se llegue hasta allí. Pero no importa: sígame con esta *travesura* intelectual.

Comencemos a agrupar las cartas que quedaron arriba de la mesa como si las fuéramos a 'levantar', *siempre* sumando 15. Por ejemplo, uno podría juntar el *siete* y el *ocho*, o agrupar el 12, el *uno* y el *dos*. Cada una de estas combinaciones de cartas suma 15. Como usted advierte hay muchísimas formas de 'separarlas en grupos' de manera tal que sume 15.

Ahora sí, las preguntas:

a) ¿Hay alguna forma de retirarlas todas (siempre sumando de a 15)?
b) ¿Cuál es el *menor* número que pueden sumar las cartas que queden en la mesa?
c) ¿Es posible retirar cartas —siempre sumando 15— de forma tal que las que queden sumen 16? ¿Y que sumen 18?
d) ¿Cuál es la suma *máxima* de cartas que pueden quedar sobre la mesa sin que uno pueda levantar más?

Como se ve, son todas preguntas pertinentes no al juego propiamente dicho (ya que no se juega con las doce cartas de un palo), pero sí tiene sentido plantearlas como ejercicio intelectual.

Ahora le toca a usted.

Respuesta

Un dato interesante (e imprescindible para encontrar las respuestas a las preguntas planteadas) es averiguar *cuánto suman todas las cartas de un palo* que son las que están arriba de la mesa. En cuanto siga leyendo advertirá la importancia de tener esta información.

Las doce cartas suman:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 +
10 (sota) + 11 (caballo) + 12 (rey) = 78

Luego de haber detectado cuánto suman *todas* las cartas que están en la mesa, creo que usted está en condiciones de contestar la primera pregunta. ¿Quiere pensarlo por sí mismo? Si no, sigo yo.

¿Se podrán *levantar* ***todas*** las cartas de manera tal que no quede ninguna arriba de la mesa?

La respuesta es *no*, porque al ir retirando cartas que sumen 15, si las pudiéramos retirar todas significaría que 78 es múltiplo de 15... y eso no es cierto. Me entiende, ¿no? Cada vez que usted retira un grupo de cartas, es porque suman 15. Si las pudiera retirar a todas, eso querría decir que el número *inicial* (78) tendría que ser múltiplo de 15, pero no es así. Luego, la primera pregunta queda contestada: no se puede.

Quiero mostrar ahora que es posible llevarse cartas de manera que las que sobren en la mesa sumen *tres*.

Para poder hacerlo, es necesario encontrar alguna forma de llevarse cartas que sumen 75 (que es el máximo número múltiplo de 15 que uno puede encontrar con esas cartas). En este caso, uno podría juntar los naipes de esta forma:

(12 y 3); (11 y 4); (10 y 5); (9 y 6); (7 y 8)

Cada par de cartas suma 15. Las únicas dos que quedan en la mesa son el 1 y el 2. En consecuencia, *tres* parece ser la respuesta a la segunda pregunta. ¿Por qué digo 'parece' ser la respuesta y no *es* la respuesta?

Ya sabemos que no es posible levantarlas todas, pero ¿no será posible que quede el *dos*? ¿O incluso el *uno*?

La respuesta es no, porque si sobrara nada más que *uno*, el total que levantamos suma 77, y eso no es posible porque, como vimos anteriormente, 77 no es múltiplo de 15. Y por la misma razón, tampoco es posible levantar cartas de manera tal que sobre el *dos*, ya que los naipes que retiramos sumarían 76, que no es múltiplo de 15.

Luego, queda confirmado que la menor suma que puede quedar es *tres*.

Ahora, siguiente pregunta: ¿habrá alguna forma de 'levantar' naipes en forma 'legítima' (formando grupos que sumen 15) de manera tal que las que queden sumen 16?

La respuesta es no, no se puede. ¿Por qué? Porque como la suma total de las cartas que están arriba de la mesa es 78, si pudieran quedar 16, las que levanté *sumaron* 62 (ya que 62 = 78 – 16). Pero esto no puede suceder porque 62 no es múltiplo de 15.

Otra pregunta: ¿y que las que queden sumen 18? ¿No tiene ganas de pensar sola/solo?

Sigo yo: como en total las cartas suman 78, si las que sobran tienen que sumar 18, entonces las que retire deberían sumar 60. Y en este caso, como 60 *sí* es múltiplo de 15, quizás haya alguna manera de hacerlo. Y efectivamente, fíjese que si uno retira naipes formando estos conjuntos:

{1, 2, 3 y 9}, {4 y 11}, {5 y 10} y {7 y 8},

entonces, cada subgrupo suma 15, y las cartas que sobran son: 6 y 12, cuya suma es 18.

Ahora sólo me queda pensar con usted cómo contestar la cuarta pregunta: ¿cuál será el número *máximo* de puntos que sumarán las cartas que *sí* puedan quedar arriba de la mesa?

¿Cómo abordar este problema?

Las cartas que voy levantando de la mesa tienen que ser en grupos que sumen 15. Luego, como el total es 78, las cartas que sobren tienen que resultar de 'restar' 78 menos algún múltiplo de 15.

Por ejemplo: pueden quedar arriba de la mesa cartas que sumen *tres*, como escribí antes. Esto está bien porque 3 = 78 – 75, y 75 es múltiplo de 15.

Por otro lado, también pueden sobrar 18 = 78 – 60, y quedar sobre la mesa:

(12 y 6)

Las cartas que levanté fueron formando estos grupos:

(11,4) (10,5) (7,8) (1, 2, 3, 9)

Como se ve, con las dos cartas que sobraron (12 y 6) no puedo formar 15, y por lo tanto, *no las puedo levantar*.

Ahora le sugiero que intente usted ver si pueden sumar 33 las cartas que sobren, ya que 33 = 78 – 45 (y 45 es un múltiplo de 15).

Mientras usted piensa, yo escribo la forma de hacerlo: deje {10, 11, 12} arriba de la mesa, ya que suman 33, y las otras cartas las levanta formando estos grupos que suman 15:

{9,6}, {7,8}, {1, 2, 3, 4, 5}

Las cartas que sobraron (10, 11 y 12) no se pueden agrupar de manera tal de formar algún grupo de 15 y, por lo tanto, *no las voy a poder levantar*. Luego, esta distribución de las cartas muestra que sí, que se pueden levantar naipes de manera tal que las que sobren sumen 33.

Pero aquí surge entonces la pregunta que me imagino que usted se debe estar haciendo: ¿no será posible entonces que sobren 48? Digo 48, porque 48 se puede escribir como:

$$48 = 78 - 30$$

Como 30 es múltiplo de 15, está claro que esa restricción la cumplen, pero... ¿se podrá?

Es decir, ¿podrán quedar sobre la mesa cartas que sumen 48 puntos pero que con ninguna combinación posible se pueda sumar 15? *Ésa* es la pregunta que hay que contestar. Veamos.

Vamos a pensar qué tiene (o tuvo) que pasar para que hayan sobrado cartas que sumen 48 y de manera tal que *no pueda seguir levantando*.

Como yo ya tuve que haber levantado 30, es decir, dos veces 15, pensemos qué cartas pueden haber quedado en la mesa. Si hubieran quedado 10, 11 y 12, entre ellas tres suman 33. Luego, las otras cartas que quedaron en la mesa (sea cuales fueren) tienen que sumar 48 − 33 = 15. Luego, ¡las podría levantar! ¿Qué se concluye de esto? Que las cartas 10, 11 y 12 *no pueden haber quedado las tres al mismo tiempo*. Por lo tanto, cuando me llevé las cartas que sumaron 30, tuve que haber involucrado a alguna de las tres (o incluso más de una).

Veamos una por una. Si la que falta es el 12, significa que *lo debía haber usado en alguna de las veces que levanté 15*. Para simplificar, voy a suponer que empiezo llevándome el 12, con el 3 o con el par (1,2). Ahora bien: tienen que haber quedado en la mesa el 11 y el 4, el 10 y el 5, el 9 con el 6 y el 7 con el 8. Todos estos pares suman 15 y no se pueden haber combinado con el 12.

Para que en la segunda vez que levante 15 no quede en pie ninguno de los pares, *¡me tuve que haber llevado uno de cada par!* Luego, lo mínimo que pude haber sumado es si me llevé el 4, 5, 6 y el 7. Estas cuatro cartas suman 4 + 5 + 6 + 7 = 22, que ya supera 15. Luego, ¡esto no pudo pasar! O sea, el 12 sólo no puede faltar[67].

Ahora veamos el caso del 11. Si no quedó en la mesa es porque también lo levanté con alguna(s) otra(s) carta(s). Con el mismo razonamiento que usé recién, *seguro* que quedan en la mesa estos pares: (10,5), (9,6) y (7,8). Luego, la segunda vez que levanté 15, me tuve que haber llevado una carta de cada uno de estos pares y, como mínimo, deben haber sumado: 5 + 6 + 7 = 18, que *también* supera 15. Luego, no pude haber levantado el 11 solo.

Falta analizar el caso del 10. Supongamos que lo levanté alguna de las dos veces que me llevé 15. Quedan dos posibilidades: o bien quedó arriba de la mesa el *tres*, o quedó el *cuatro*, o incluso ¡las dos!

---

67. Aunque parezca arbitrario decir que al 12 lo levanto en la primera tanda (que sume 15), en realidad no lo es, ya que resulta indistinto que lo use en el primer grupo de naipes que sume 15 o en el segundo. ¿Por qué? Si lo dejara para el segundo grupo, fíjese en estos pares: (11,4), (10,5), (9,6) y (8,7). Cuando elija las primeras cartas voy a tener que seleccionar por lo menos uno de los miembros de esos pares porque los tengo que 'desarmar'. Ninguno de ellos puede quedar 'intacto', si no, entre las cartas que dejo arriba de la mesa, habría formas de sumar 15 aún. Por otro lado, ninguno de ellos puede formar parte de la segunda parte de la elección cuando tenga que usar el 12, porque éste sólo se puede combinar o bien con un 3 o bien llevándome el par (1,2). El mismo argumento se puede usar, como se verá más adelante, cuando haga el análisis sobre el 11 y el 10.

Si quedó el tres, en la mesa aparecen estos pares: (12,3), (9,6) y (7,8). Igual que antes, tengo que tomar (la segunda vez que sume 15) alguna carta de cada par, y lo mínimo que me pude haber llevado es: 3 + 6 + 7 = 16 (lo que no puede pasar).

Si la carta que quedó es el cuatro, entonces en la mesa estaban estos pares: (4,11), (9,6) y (7,8). Una vez más, debo llevarme uno de cada par, y lo mínimo que tengo que sacar entonces es 4 + 6 + 7 = 17, que tampoco puede pasar.

Resumen

No pueden quedar en la mesa al mismo tiempo el 10, 11 y 12, pero *tampoco* puede faltar ninguno de los tres. Luego, la conclusión es que *no pueden quedar cartas que sumen 48 ¡sin que se puedan levantar algunas de ellas que sumen 15!*

Eso termina por contestar la pregunta: el máximo número de cartas que pueden quedar encima de la mesa *sin que se puedan levantar 15* resulta ser 33.

Por supuesto, ninguna persona que juega a la escoba de 15 tiene exactamente este tipo de problemas, aunque más no sea porque no intervienen las *doce* cartas de un palo. Sin embargo, hacerse este tipo de planteos intelectuales coopera con la estrategia que uno podría querer utilizar si va llevando la cuenta de las cartas que salieron hasta allí, las que están en la mesa y las que pueden estar en posesión de los rivales.

Más allá del entretenimiento, también es 'hacer matemática'.

¿Córner o saque de arco?

El problema[68] que sigue es ficticio pero en realidad tiene *tanta* similitud con lo que sucede en *todas las canchas, en todos los partidos*, que sospecho que bien vale la pena analizarlo con un poco de lógica. Y por otro lado, usted advertirá —si sigue leyendo— cuánta relación tiene con decisiones que uno tiene que tomar en la vida cotidiana.

Me apuro a decir que no hace falta saber nada de fútbol. O mejor dicho, sí hace falta saber que cuando se está disputando un partido y la pelota sale de la cancha, repone la pelota el equipo que *no* la tiró afuera. Es decir, si el último en tocarla fue del equipo A, entonces repone la pelota el equipo B (y viceversa). Eso es todo.

Ahora bien. Supongamos que estaban jugando River y Boca (por poner el ejemplo de los dos equipos que más hinchas tienen en el país, pero usted siéntase libre de cambiar los nombres y poner los que quiera). En un momento del partido, Riquelme (jugador de Boca) disputa una pelota cerca del área de River junto a dos jugadores del equipo millonario: el arquero Barovero y el

68. Este problema me lo sugirió Juan Pablo Pinasco, doctor en Matemática, egresado de la Facultad de Ciencias Exactas (UBA) y generador de contenidos del programa *Alterados por Pi*, que se emite por Canal Encuentro.

defensor Ponzio. Los tres miran al árbitro que se toma un instante para meditar qué decisión va a tomar: si el último en tocar la pelota fue Riquelme, entonces River repone con un saque desde el arco. En cambio, si la pelota fue tocada o bien por el arquero Barovero o por el defensor Ponzio, deberá marcar que hay córner a favor de Boca.

Los tres jugadores comienzan a hablarle al árbitro tratando de convencerlo, y cada uno de ellos le dice dos frases: una verdadera y una falsa. La/lo invito a que las lea y vea si con las herramientas lógicas que usted dispone (su capacidad de razonar) puede deducir qué tendría que cobrar el árbitro: córner para Boca o saque desde el arco para River.

Éstas fueron las frases:

- Barovero (arquero de River): Yo no la tiré afuera. Ponzio tampoco.
- Ponzio (defensor de River): Barovero no fue. El último en tocarla fue Riquelme.
- Riquelme (¿hace falta que ponga "jugador de Boca"?): Yo no fui. La tiró afuera Barovero.

Le recuerdo que cada uno dice una frase cierta y otra falsa. Con estos datos, ¿se puede deducir qué pasó? ¿Se puede saber si fue córner o saque desde el arco? En definitiva, ¿qué tiene que hacer el árbitro?

Ahora le toca a usted. La/lo dejo en soledad y después vuelvo.

Solución

Quiero analizar junto a usted todas las posibilidades y ver si el problema tiene solución. Empiezo con Barovero, el arquero de River.

Una de las dos frases que él dijo, o bien 'yo no la tiré afuera' o bien 'Ponzio (el defensor de River) tampoco' tiene que ser falsa (no importa cuál de las dos). Luego, alguno de los dos la tiene que haber tirado afuera, y por lo tanto, lo que es seguro analizando solamente lo que dijo Barovero es que el árbitro *tiene* que fallar córner para Boca.

Lo que resta es saber si el resultado es compatible con lo que dijeron los otros dos jugadores: Ponzio y Riquelme.

Veamos lo que dijo Ponzio. Como sabemos que *fue* córner para Boca, entonces Ponzio miente cuando dice que "Riquelme fue el último en tocarla". Luego, tiene que decir la verdad cuando afirma que "Barovero no fue".

Entonces, hasta acá, podemos concluir que:

a) fue córner para Boca, y además
b) fue Ponzio el último en tocar la pelota

Ahora, lo último que falta es verificar que todo este andamiaje lógico se sostiene cuando uno analiza lo que dijo Riquelme (¿quiere pensarlo usted en soledad?).

Siguiendo con la idea entonces de que fue Ponzio quien tiró la pelota afuera, veamos lo que sucede con lo que dijo Riquelme. Por un lado, es cierta la frase del jugador de Boca cuando dijo "Yo no fui" (fue Ponzio), y la frase que es falsa de las dos, es que "Barovero fue quien la tiró afuera".

Como se advierte, *todo cierra*.

Si hiciere falta, dejé para el final algo que a esta altura es redundante: verificar que las otras alternativas no son posibles, o sea, que si uno supone que fueron Barovero o Riquelme, entonces encuentra alguna contradicción en la veracidad o falsedad de lo que dijeron los jugadores. Fíjese.

Las otras dos posibilidades son: que la pelota la haya tirado afuera Barovero o Riquelme.

Si hubiera sido Barovero, las dos frases de Ponzio serían falsas, ya que él dijo que “Barovero no fue” y que “el último en tocarla fue Riquelme”, y eso no puede ser. Luego, se concluye que Barovero no fue.

Por último, de haber sido Riquelme el último que tocó la pelota, entonces serían ciertas las dos frases de Barovero: “Yo no la tiré afuera” y “Ponzio tampoco”.

Luego, la *única* alternativa es que haya sido Ponzio, como ya habíamos concluido antes.

Moraleja: sé que esta clase de problemas no son frecuentes o usuales. No. Pero lo que sí creo es que un análisis de la realidad cotidiana con este tipo de herramientas lógicas casi elementales, permite encontrar conclusiones escondidas en una parva de datos que parecen todos contradictorios. Y por otro lado, aunque no lo parezca, esto *también* es hacer matemática.

Los cuatro cazadores y una semana muy especial

Un grupo de cuatro cazadores, a quienes voy a llamar A, B, C y D, decidieron instalarse en un campo de uno de ellos. Suponían que estaban dadas las condiciones para poder pasar una semana agradable practicando el 'deporte' que los apasionaba. Se trajeron entonces una carpa muy amplia y se propusieron seguir algunas reglas (internas) que establecieron entre ellos.

Éstas son las cuatro condiciones que decidieron cumplir. Como referencia, las voy a llamar (*):

- Los días en los que salía a cazar A, no salía B.
- Los días en los que salía a cazar B, también salía D pero no salía C.
- Los días en los que salía a cazar D, también salían A o B (o incluso los dos).
- Nunca hubo dos días iguales, es decir en donde se repitieran los cazadores que salieron al campo.

Pregunta: En los siete días que estuvieron en el campo, ¿cuántos días salió D a cazar y con quién (o quiénes)?

Respuesta

En principio, voy a construir una tabla de *todas las configuraciones factibles*. Allí voy a proponer todos los posibles planes de salida de los cuatro cazadores, respetando las restricciones que propone el problema.

Por ejemplo, si en una *fila* figura: (1, 0, 0, 1), esto hay que interpretarlo como que en ese día de la semana salieron a cazar A y D (la primera y la última coordenada), mientras que B y C se quedaron en la carpa.

Si escribiera (1, 1, 1, 1), esto significaría que, ese día, los cuatro cazadores salieron de caza; de la misma forma, la *tira* (0, 0, 0, 0) expresa que ese día ninguno salió a cazar.

Dicho esto, escribo ahora *todas* las configuraciones posibles y después *eliminaremos* las que no son posibles.

a) 1 0 0 0
b) 1 0 0 1
c) 1 0 1 0
d) 1 0 1 1
e) 1 1 0 0
f) 1 1 0 1
g) 1 1 1 0
h) 1 1 1 1
i) 0 0 0 0
j) 0 0 0 1
k) 0 0 1 0
l) 0 0 1 1
m) 0 1 0 0
n) 0 1 0 1
o) 0 1 1 0
p) 0 1 1 1

Como en total hay cuatro cazadores (A, B, C y D) que cada día pudieron (o no) haber salido a cazar, entonces hay 24 = 16 configuraciones posibles. ¿Cómo interpretar en estos términos cada una de las restricciones que figuran en (*)?

La condición (1) dice que las *filas* que empiecen con un *uno* en la primera coordenada (o sea, las que asumen que A salió a cazar) tienen que ser así: (1, 0, *, *) ya que si salía a cazar A entonces no salía B. Esto implica que quedan ELIMINADAS las filas *e*, *f*, *g* y *h*, porque las cuatro empiezan con dos *unos*.

La condición (2) dice que las *filas* que resuelvan el problema que contengan un número 1 en la posición de B (o sea, sí B salía a cazar) tienen que ser así: (*, 1, 0, 1), ya que tienen que tener un *uno* en B, un *cero* en C y un *uno* en D. Por lo tanto, esto ELIMINA las filas *m*, *o* y *p*.

Por último, la condición (3) dice que los días en los que hay un *uno* en la última coordenada (los que corresponden a que ese día D saliera a cazar), tienen que ser así: (1, 0, *, 1) o (0, 1, *, 1) o (1, 1, *, 1) ya que los días que salía D también debían salir o bien A o bien B o incluso los dos. Esto significa que quedan ELIMINADAS *j* y *l*.

En definitiva, las *únicas* siete filas que sobreviven son las filas: *a*, *b*, *c*, *d*, *i*, *k* y *n*. Es decir:

A	B	C	D
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1

Esto corresponde *exactamente* a siete días distintos en los que se cumplen todas las condiciones[69]. Y no hay más. No es posible encontrar ninguna otra configuración que respete las restricciones *sin repetir* alguna de estas siete filas.

Por lo tanto, ahora estamos en condiciones de dar la respuesta a la pregunta planteada:

> *El cazador D salió a cazar tres veces. Una vez salió con A solamente, otra vez salió con B solamente y una tercera vez salió acompañado por A y por C.*

Es interesante notar que uno de los días de la semana ninguno de los cazadores dejó la carpa. ¿Habrá llovido?

---

69. Le sugiero que verifique que cada una de esas filas *cumplen* con todas las restricciones que pide el problema.

El juego del 10 mil

Julio de 2013. Manu Ginóbili, después de jugar las finales de la NBA frente a Miami, volvió a Bahía Blanca para disfrutar con su familia. De allí, unos días con unos amigos a Tandil. Sorpresivamente, recibo un mensaje de texto en mi teléfono celular: “Adrián, estamos jugando al *10 mil*, ¿lo conocés? Si no lo conocés, no te preocupes, pero si sabés de qué te hablo, ¿cómo se puede calcular la probabilidad de que uno no obtenga *ningún punto*? Nosotros lo estamos pensando con mis amigos y creo que ya tenemos una idea de lo que hay que hacer, pero me gustaría consultarlo contigo”.

Así fue como empezó esta historia. Eso sí: si usted no escuchó hablar nunca del juego, quiero contar acá cuáles son las reglas.

El diez mil es un juego en donde intervienen cinco dados iguales con seis caras cada uno. Cada cara del dado tiene indicado los seis primeros números naturales: uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis. Los dados se ponen en un cubilete, y al arrojarlos, uno puede sumar puntos únicamente cuando se verifica alguna de estas condiciones:

- aparece un *uno* (*un ‘as*’). Cada ‘as’ vale *cien puntos*;
- aparece un número *cinco*. Cada ‘cinco’ vale *cincuenta puntos*;

- aparece un número cualquiera repetido tres veces. Es decir, aparecen tres dados con el mismo número. En ese caso, si los tres números repetidos son números *dos*, entonces eso vale *doscientos puntos*. Si aparecen tres números *tres*, eso vale *trescientos puntos*; tres números *cuatro* valen *cuatrocientos puntos*; tres números *cinco* valen *quinientos puntos* y tres números *seis* valen *seiscientos puntos*. En el caso particular en el que aparezcan *tres números uno*, el valor es de *mil puntos*.

Hay algunas reglas más, pero no hacen a la esencia del juego.

Dicho todo esto, ¿cuál es la probabilidad de que al arrojar los cinco dados uno *no obtenga ningún punto?* De eso se trata el problema: tratar de *contar* cuántas formas hay de obtener *cero* puntos.

Respuesta

En principio, quiero contar junto a usted la cantidad de *resultados posibles* que se pueden obtener al arrojar cinco dados. Ese número es 65 = 7.776. ¿Por qué?

Es que para cada dado hay seis posibilidades, y el resultado de arrojar cada dado es independiente de lo que suceda con los otros cuatro. Por lo tanto, el número total de posibilidades es $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 7.776$.

Ahora bien, de todas estas posibilidades quiero *extraer* las que no proveen ningún punto. Para eso, le propongo que analicemos juntos *todas* las posibilidades.

En principio, fíjese que como cualquier *as* o cualquier *cinco* servirían para agregar algún puntaje a su cuenta, lo mejor que puedo hacer es *evitar*[70] que salgan. O sea, voy a excluir directamente los casos en los que alguno de los dados pueda salir o bien *uno* o bien *cinco*. A partir de ahora entonces, los casos que voy a considerar son aquellos en los que en los dados solamente pueden salir 2, 3, 4 y 6.

Para *no obtener ningún puntaje* con los cinco dados necesito que *no aparezcan* tres dados con el mismo número. Luego, éstos son los casos a considerar:

- que aparezcan dos dados con el mismo número y tres dados con distinto número;
- que aparezcan dos dados con el mismo número, otros dos dados con otro número repetido y un quinto dado con cualquier número que no fuera ninguno de los dos anteriores.

Si puedo contar exhaustivamente *todos* estos casos, voy a saber cuántos hay en donde no se obtiene ningún puntaje. Veamos.

Caso (a)

Los resultados posibles son:

22346
33246
44236
66234

70. Acepto la sugerencia de Carlos D'Andrea y agrego que al escribir "lo mejor que puedo hacer es evitar que salgan" lo estoy haciendo en forma *poética*, ya que no tengo ese 'poder', al menos por ahora...

Cada una de estas posibilidades indica qué número salió repetido y cuáles fueron los otros tres, pero como usted advierte pudieron haber salido de muchas maneras. ¿De cuántas? Yo podría hacer una *lista* con todos los casos, pero en realidad, si uno tiene que calcular las *permutaciones* de cinco números, el resultado es 5! (el factorial de 5) = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120. Sin embargo, como uno de los números aparece repetido dos veces, entonces, *hay que dividir* por *dos*. Es decir, cada posibilidad aparece 120/2 = 60 veces.

En vista de que en total se tienen cuatro casos, hay 4 × 60 = 240 casos en los que no se obtiene ningún punto.

Caso (b)

Acá se presentan dos números repetidos y los casos posibles a analizar son:

22334
22336
22443
22446
22663
22664
33442
33446
33662
33664
44662
44663

En total son doce posibilidades. ¿Cuántas permutaciones se pueden obtener en cada fila? O sea, ¿de cuántas formas se pueden *permutar* los cinco números que aparecen en cada fila?[71]

---

71. Cuando uno tiene que calcular el número de permutaciones posibles que se obtienen al intercambiar las letras que aparecen —por ejemplo— en la palabra PARTE, usamos el *factorial* del número de letras que aparecen.

En este caso, como en la palabra PARTE hay cinco letras, el número total de permutaciones posibles es 5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120.

Cuando aparecen letras repetidas, como en la palabra CARA, entonces si uno usara otra vez el factorial de *cuatro* (porque hay cuatro letras involucradas), cometería un error porque estaría contando varias veces la misma permutación.

¿Cómo se hace entonces? La forma de hacerlo es dividiendo

$$4!/2! = 24/2 = 12,$$

en donde el 2! corresponde a las repeticiones de la letra A.

Otro ejemplo inductor: si tuviéramos que calcular las permutaciones posibles que se pueden obtener con las letras de la palabra ABRAZARA, habría que dividir:

$$8!/(4! \times 2!) = 40.320/(24 \times 2) = 840,$$

en donde aparece repetido el factorial de cuatro por las cuatro letras 'A' y el factorial de dos, por las dos letras 'R'.

No puedo escribir acá la deducción de la fórmula (que usted puede encontrar en cualquier libro de combinatoria) pero sí dar una idea por si le interesa pensar el problema. En el caso de la palabra CARA, uno trata de *distinguir* las dos letras A y luego *cuenta* cuántas veces repite una permutación porque no puede diferenciar una de otra.

Por ejemplo, si uno escribiera A' y A" para distinguirlas, entonces podría diferenciar CA"RA' de CA'RA", lo que no es posible de hacer en la vida real. Nadie 'distingue' las letras repetidas que aparecen en una palabra.

De la misma forma, podría distinguir A'RCA" de A"RCA'.

Ahora, lo que uno hace es calcular el factorial de 5 (5! = 120), dividido por *el producto del factorial de dos, por el factorial de dos*. O sea, 2! 3 2! = 4.

Por lo tanto, se obtiene 120/4 = 30.

Como tenemos 12 filas y cada fila tiene 30 permutaciones distintas, entonces en total hay 360 posibilidades en donde los dados *no permiten puntuar*.

Resumen: sumando los resultados que obtuvimos en el caso (a) y (b), se tienen: 240 + 360 = 600.

En consecuencia, de los 7.776 posibles resultados que uno tiene al tirar cinco dados, solamente en 600 no se obtiene ningún punto. Luego, la probabilidad se calcula dividiendo los casos favorables sobre los casos posibles, o sea, 600/7.776 = (aproximadamente) 0,0771... lo que indica que el porcentaje de casos en donde uno *no puntúa* con los cinco dados está alrededor del 7,71%.

Escribí estos ejemplos para *invitarla/lo* a pensar que cada permutación aparece *dos veces* y, por eso, del total de permutaciones que uno encuentra, solamente nos interesa la mitad. Si hubiera tres letras repetidas, entonces habría que dividir el total por 3! porque ése es el número de permutaciones posibles entre ellas. Por último, si uno tuviera la palabra ABRAZAR, las permutaciones posibles se calculan así:

$$7!/(3! \times 2!),$$

ya que aparecen tres letras A y dos letras R.

Sorpresa

Mi objetivo con el problema que sigue es tratar de sorprenderlo. No sé si lo voy a lograr, pero lo voy a intentar. Es un problema muy sencillo y a la vez entretenido. Puede que la solución se le ocurra muy rápido y, en ese caso, habré fracasado en el intento, a tal punto que usted pensará: "¿Esta pavada?".

Pero podría ser que no, y que a usted le suceda lo que a la abrumadora mayoría de las personas a quienes se lo propuse: estuvieron un rato *confundidos*, buscando el error. Vale la pena entonces correr el riesgo de que le resulte muy fácil; prefiero que así sea porque, en el peor de los casos, le servirá para entretenerse un rato.

Acá voy. Suponga que hace un mes usted tenía mil pesos en una cuenta bancaria. A lo largo de los últimos 30 días fue haciendo diversos retiros. Para fijar las ideas, digamos que hizo —en total— seis extracciones, todas en efectivo.

Fíjese ahora en las dos listas que figuran a continuación.

Por un lado, en la columna de la izquierda figurará el monto que retiró en cada operación. Por otro, en la segunda lista, aparecerá el saldo que le fue quedando en la cuenta luego de haber retirado la cantidad de dinero que figura en la columna de la izquierda. Recuerde que antes del primer retiro, en la cuenta había mil pesos. Éste es el resumen.

	Extracción	Saldo
Primer retiro	$ 500	$ 500
Segundo retiro	$ 250	$ 250
Tercer retiro	$ 100	$ 150
Cuarto retiro	$ 80	$ 70
Quinto retiro	$ 50	$ 20
Sexto (y último) retiro	$ 20	$ 0

Fíjese qué sucede si usted suma las dos columnas (haga la cuenta por favor): la columna de la izquierda suma $ 1.000 (mil pesos).

Ahora, sume la segunda. Esta vez el resultado es $ 990.

Parece que hay algo que no funciona bien: ¿dónde están los 10 pesos que faltan?

El problema entonces consiste en tratar de entender qué pasó: ¿por qué las dos columnas no suman lo mismo? ¿No debería dar *mil* pesos en los dos casos?

Ahora le toca a usted. Eso sí: me permito sugerirle que no lea la respuesta muy rápido. La única *gracia* que tiene este tipo de problemas es poder pensarlo en soledad o, en todo caso, con alguna persona que ignore la solución como usted. De cualquier forma, puede encontrarla a continuación.

Respuesta

Hace más de seis años, en la contratapa del 17 de abril del año 2007, escribí en *Página/12* un problema parecido. Se llamaba "Tres personas en un bar"[72].

72. http://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-83514-2007-04-17.html

Antes de escribir la solución, quiero ofrecer acá otro ejemplo que —creo— le permitirá descubrir que hay un error de planteo en el problema original y, en verdad, no *faltan diez pesos*. O mejor dicho, le servirá para advertir que ni siquiera tiene sentido sumar los números que figuran en ambas columnas y luego compararlos. Sígame por este camino.

Suponga que en lugar de hacer las seis extracciones como planteé antes, usted hubiera hecho diez retiros de $ 100 cada uno. Al cabo de la décima vez que usted extrae cien pesos, ya no queda nada en la cuenta. Las columnas quedarían así:

	Extracción	Saldo
1)	$ 100	$ 900
2)	$ 100	$ 800
3)	$ 100	$ 700
4)	$ 100	$ 600
5)	$ 100	$ 500
6)	$ 100	$ 400
7)	$ 100	$ 300
8)	$ 100	$ 200
9)	$ 100	$ 100
10)	$ 100	$ 0

Si ahora usted suma las dos columnas, la de la izquierda resulta dar (como era esperable) $ 1.000, mientras que la de la derecha:

900 + 800 + 700 + 600 + 500 + 400 + 300 + 200 + 100 = $ 4.500

¿Y ahora? ¿Cómo puede ser que haya *semejante* diferencia? ¿No deberían dar *igual*?

Piense conmigo: en cualquiera de los dos ejemplos, cuando uno suma los números de la primera columna, obtiene *todo el dinero que retiró*. Como al hacer el último retiro ya no queda más nada, eso significa que en total usted habrá extraído el total que había en la cuenta: mil pesos.

Mientras tanto, la columna de la derecha sólo expresa los *saldos parciales*. Es decir, el dinero que va quedando en la cuenta a medida que usted retira dinero. Y aquí la clave del problema: ¿qué sentido tendría ir *sumando* el dinero que queda en la cuenta luego de cada extracción? ¿Qué habría de medir?

Como usted advierte, sumar los datos de la columna de la derecha no sirve *para medir* nada. En el caso que yo presenté originalmente, los números se acercan por casualidad. Difieren en 10 pesos en forma totalmente accidental y de allí la confusión, pero en realidad, en casi cualquier otro caso los resultados de ambas suman no tienen por qué tener ningún tipo de relación. Lo sorprendente es que el caso expuesto pareciera sugerir que ambas sumas deberían dar igual, cuando en realidad no tienen nada que ver.

Pero uno se tienta por las similitudes, suma ambas columnas porque es lo que le piden y no se cuestiona nada. Va y suma. ¿Cómo puede ser posible que uno no reaccione *casi* inmediatamente diciendo: "la pregunta no tiene sentido"? Sin embargo, uno le adjudica potencial validez y se somete a pensar algo que debería ser *casi* obvio que es equivocado. Y como escribí antes, nos pasa a muchos... a casi todos.

En algún sentido nos dejamos llevar por la pereza. Es mucho más cómodo pensar por qué faltan los diez pesos que poner en duda *toda la estructura intelectual montada alrededor* *del hecho*: “Si me preguntan *por qué faltan los diez pesos*, por algo será”.

A usted, ¿qué le pasó? ¿Hizo las cuentas buscando el error o advirtió que no tenía sentido? ¿Le sirvió para algo el ejemplo?

Piedra, papel o tijera (para tres)

Siempre tuve la curiosidad por entender cómo se trasladan los cuentos, las historias, los chistes, los juegos, no sólo de generación en generación, sino también atravesando las distintas culturas. Naturalmente, uno tiene una respuesta muy fácil a mano: turistas, inmigrantes, viajeros, pergaminos, libros, imprenta, películas, videos, internet, etc. De acuerdo. Pero al mismo tiempo, yo me he sorprendido varias veces en distintos países del mundo contando un cuento... algo así como una historia con un final que me parecía *local*, o de características más *latinas* (por elegir un ejemplo) y sorprenderme con que en el lugar donde yo la estaba contando ya se conocía alguna versión 'adaptada'.

Pero, ¿por qué esta introducción? Es que hay un juego muy particular al que yo he visto jugar desde que era niño (y eso sucedió hace *muchísimo... muchísimo* tiempo) en donde se decidía quién se quedaba con algún objeto o quién tenía que barrer o levantar los platos de la mesa... (y usted agregue acá lo que quiera). ¿Qué juego? Bien. "¡Piedra, papel o tijera!"

Estoy casi seguro de que usted escuchó hablar de él, pero en todo caso escribo acá una versión *abreviada*. Suponga que hay dos personas que tienen que dirimir algo (no importa qué). Uno siempre puede lanzar una moneda al aire, por supuesto, o encontrar algún otro método. Pero también es posible decidirlo de la siguiente forma: las dos personas cierran el puño y hacen un gesto como si estuvieran por golpear arriba de una mesa tres veces consecutivas. La diferencia está en que a la tercera vez puede optar por una de estas tres situaciones:

a) abre la mano y la deja extendida;
b) muestra el índice y el dedo mayor de esa mano extendidos (como si formando una letra 'v', pero horizontal);
c) deja el puño cerrado.

Con el primer gesto, uno trata de representar un *papel*.

Con el segundo, una *tijera*.

Con el último, trata de simbolizar una *piedra*.

Lo interesante del juego es que no hay una forma de ganar *en el 100% de los casos*, sino que las reglas son:

a) La piedra *rompe* la tijera (y por ende, gana), pero *pierde* frente al papel (que la envuelve).
b) La tijera *corta* al papel (y le gana), pero *pierde* frente a la piedra que rompe la tijera.
c) El papel *pierde* frente a la tijera (que lo corta), pero *gana* frente a la piedra (a la que envuelve, como ya quedó dicho).

En el caso de que los dos participantes exhiban *lo mismo*, entonces, se declara un empate *transitorio* y vuelven a jugar hasta que los dos muestren dos objetos distintos.

Es un juego bien elemental y que se viene jugando desde hace siglos... y no crea que pongo la palabra 'siglos' en forma inadvertida, sino que la/lo invito a que —si tiene mucho tiempo sin ocupar— bucee en internet, y verá que hay registros de que se jugaba a "Piedra, papel o tijera" por lo menos desde el siglo XVII.

No interesa ahora, y tampoco que el juego sirve para dilucidar situaciones que viven niños en Sudamérica, así como en Italia, España o Inglaterra, pero también en Estados Unidos y Japón.

Y acá paro con el tema de "Piedra, papel o tijera", por lo menos en el caso que involucra a dos personas. Mi pregunta tiene que ver con tratar de elaborar una estrategia que permita decidir qué hacer en el caso de *tres* personas. ¿Cómo *ampliar* las reglas de un juego que involucra a dos personas cuando se agrega un participante más? ¿Qué hacer? ¿Cómo elaborar una estrategia para decidir algo entre tres personas, usando el mismo juego de "Piedra, papel o tijera" en forma justa?

Esta parte ahora se la dejo a usted. Yo sigo a continuación.

Una forma de resolver el problema

Una idea puede ser la siguiente: en principio, juegan normalmente dos de las tres personas involucradas. Si alguno de los dos resulta ganador, se terminó el juego: ganó ella (o él).

Como usted advirtió anteriormente, podría producirse un empate (si los dos que están jugando mostraran el mismo objeto). En ese caso, se declara ganadora a la persona que *no participó* del juego, y estaba mirando desde afuera.

La pregunta que surge naturalmente es la siguiente: ¿tienen todos las mismas chances de ganar? Porque es muy fácil de entender la solución que yo propuse, pero, ¿cómo hacer para corroborar que ninguno de los tres tiene alguna *ventaja* o *desventaja*?

Para eso, es bueno, observar la siguiente tabla (o *matriz* de 3×3):

	Piedra (jugador 2)	Papel (jugador 2)	Tijera (jugador 2)
Piedra (jugador 1)	Gana jugador 3	Gana jugador 2	Gana jugador 1
Papel (jugador 1)	Gana jugador 1	Gana jugador 3	Gana jugador 2
Tijera (jugador 1)	Gana jugador 2	Gana jugador 1	Gana jugador 3

Si usted cuenta los casos favorables para cada jugador, advertirá que *todos* tienen tres posibilidades de ganar (sobre los nueve resultados posibles). Eso significa que la *probabilidad* de éxito es la misma para todos.

Y eso contesta la pregunta. No sé si será útil dilucidar situaciones de la vida cotidiana jugando a “Piedra, papel o tijera”, pero no deja de ser curioso que uno pueda ampliar el juego a tres participantes en lugar de dos[73].

73. Eso sí: psicológicamente, ¿aceptará una persona ‘ganar’ o ‘perder’ sin poder participar? Pero ésa ya es otra historia.

Ta-Te-Tí (de atrás para adelante)

No debe haber un juego/entretenimiento más clásico que el Ta-Te-Tí[74]. Al mismo tiempo, es fácil descubrir que quien empieza el juego tiene una 'enorme' ventaja (basta con jugar en la casilla del medio para por lo menos conseguir un empate), y eso transforma el juego entonces en algo muy aburrido. ¿Para qué jugar si uno sabe que hay una estrategia para no perder en el caso del que juega primero y llegar a empatar si uno juega 'bien' cuando empieza segundo?

De todas formas, algunos juegos son verdaderamente ingenuos (como el del Ta-Te-Tí), pero en otros, elaborar estrategias que permitan ganar empezando primero (o segundo, dependiendo del juego) se transforma en algo muy complicado. Si no, tome como ejemplo el ajedrez. Una cosa es jugar con las piezas 'blancas' (que son las que empiezan la partida) y otra muy distinta es jugar con 'negras'. Tener la iniciativa es algo ciertamente no menor.

Pero hay situaciones que empiezan como juegos y después adquieren otro tipo de relevancia. De hecho, así empezó una

74. El objetivo del juego es tratar de ubicar tres cruces (o tres 'círculos') formando una línea vertical u horizontal o diagonal en una grilla de 3 × 3. El primero que llega a ubicar sus 'fichas' en esas condiciones, gana la partida.

rama tan importante de la matemática como la propia Teoría de Juegos, que ahora se usa en economía, ciencias políticas, psicología, lógica y hasta biología. El objetivo que me propongo con el problema que figura aquí, consiste en hacer un camino 'inverso'. Es decir: mirar un tablero en donde se esté desarrollando un juego (podría ser de ajedrez, damas, Ta-Te-Tí, lo que se le ocurra) y tratar de establecer qué fue lo que pasó para que llegaran hasta allí. O sea, en todo lo que sigue yo voy a asumir *siempre* que los dos jugadores son 'expertos', personas que *siempre* tienen la capacidad de elaborar y/o elegir la mejor estrategia para tratar de 'ganar'.

Como del ajedrez sólo se mover las piezas y conozco únicamente que los elementos más rudimentarios, le voy a sugerir que vea el siguiente tablero de Ta-Te-Tí (Figura 1), en donde cada jugador ha realizado nada más que tres jugadas. Uno juega poniendo 'cruces' y el otro (u otra), poniendo 'círculos'.

Habitualmente, quienes han jugado al Ta-Te-Tí, saben que quien empieza tiene una ventaja muy clara: eligiendo la casilla del centro, no hay manera de *perder*. Lo *peor* que le puede pasar (a quien comienza jugando) es que llegue a un empate, y eso sucederá siempre y cuando el otro participante juegue *bien*. Mire ahora el tablero de la Figura 1 con detenimiento y fíjese si usted es capaz de 'reproducir' lo que fue pasando con los dos participantes. La primera conclusión es que ninguno de los dos jugó en el centro del tablero[75], pero tengo dos preguntas para hacer:

75. Le sugiero que si tiene tiempo, se entretenga un rato viendo cómo se modificaría su estrategia para jugar al Ta-Te-Tí, si no se permitiera jugar en el centro del tablero al empezar el partido. Inténtelo y verá las diferencias en el juego. Cambia... ¡y mucho!

a) ¿quién empezó el juego: el que juega con cruces o con círculos?
b) ¿cuál fue esa primera movida?

El problema es sencillo y no requiere de ningún conocimiento previo (salvo las reglas del Ta-Te-Tí que, asumo, usted conoce). La/lo invito a que 'rebobine' y reproduzca lo que fue sucediendo en el juego. O sea, primero, decidir quién de los dos *tuvo* que haber empezado el juego y, después, cuál *tuvo* que haber sido la primera movida y (desde allí) las restantes.

El tablero en el momento que se suspendió la partida estaba así:

O	X	X
		O
	O	X

Figura 1

Solución

Para empezar, quiero ponerle un 'nombre' a cada casilla para poder referirme a ellas libremente. Fíjese lo que hago en la Figura 2. Cada casilla lleva dos dígitos: el primero indica la fila y el segundo, la columna. Queda así:

11	12	13
21	22	23
31	32	33

Figura 2

Ahora sí, mi idea es que nos vayamos convenciendo juntos de qué es lo que tuvo que haber pasado para que llegaran a esa posición. En principio, tratemos de decidir quién de los dos tuvo empezó. Como los dos participantes hicieron tres movidas, analicemos qué pasaría si ahora le tocara jugar a O. En ese caso, O ocuparía la casilla 21 y terminaría ganando la partida. ¿Por qué? Bien, porque si O juega allí, entonces X, en su próxima movida, tendría que cubrir *dos* lugares con los que perdería si no lo hace: si 'tapa' la casilla 31, perdería igual porque O jugaría en la casilla del centro.

O	X	X
O		O
	O	X

Figura 3

Por otro lado, si X decide obturar las posibilidades de O jugando su X en la casilla del centro, entonces O jugaría en la casilla 31 y gana la partida. Es decir, si le tocara jugar a O, X perdería inexorablemente. Como estamos suponiendo que los dos jugadores son suficientemente avezados como para no cometer errores de este tipo, es que concluimos que no puede ser que le toque el turno a O: debe ser el turno de X y, si es así, X tiene que haber empezado la partida.

Ahora bien: ya sabemos entonces que X empezó, pero ¿dónde?

Mirando nuevamente el tablero de la Figura 1, las jugadas de X fueron en los lugares 12, 13 y 33. Quiero invitarla/lo a pensar qué debería haber hecho O si X empezaba en alguna de las dos puntas (la 13 o la 33). Es decir: ¿qué movida le conviene hacer a quien juega segundo, si el que comienza elige jugar en una de las puntas?

Por supuesto, lo más interesante de este análisis es que lo haga usted. Si lo hago yo, no tiene ninguna gracia. En todo caso, le propongo que lo piense y después corroboremos juntos si hemos pensado igual y/o parecido. De todas formas, acá van mis reflexiones. Con los tableros que figuran a continuación, quiero que se convenza conmigo de que si la primera movida de X fue en una de las dos puntas (voy a elegir la casilla 13, pero la 33 es exactamente igual por razones de simetría), entonces O *¡tendría que jugar en la casilla del centro porque, si no, está condenado a perder!*

Acompáñeme por acá. Éstas son todas las posibilidades:

X5		X1
	X3	O2
O4		

Tablero 1

X3	O4	X1
X5		O2

Tablero 2

X5		X1
		O4
	O2	X3

Tablero 3

X5		X1
		O4
O2		X3

Tablero 4

X5		X1
O2	X3	
O4		

Tablero 5

O2		X1
		O4
X5		X3

Tablero 6

	O2	X1
	X3	
O4		X5

Tablero 7

Permítame explicar lo que son los números después de cada letra: la primera jugada de X fue la que figura con X1. La segunda le correspondió a O y fue entonces O2. La tercera fue de X y la llamé X3. La cuarta jugada fue O4 y la última X5. ¿Por qué la última? Porque supuse que X1 fue en una de las puntas (el casillero 13). Si O juega *en cualquier otra posición que no sea en el medio*, pierde inexorablemente. Por lo tanto, como uno sabe que los dos jugadores son 'expertos' y no cometerían un error tan burdo, entonces, forzosamente, si X1 hubiera empezado a jugar en la punta 13, O debería haber jugado en el medio. Como no hay ninguna movida de O ocupando la casilla del centro en el tablero original (Figura 1), eso significa que la primera movida de X ¡no fue en una de las dos puntas! Ni en 13 ni en 33.

¿Cuál es la conclusión? X1 se ubicó en la casilla 12.

Una continuación *natural* es que la siguiente jugada de O (O2) haya sido en la casilla 32. Luego X jugó su movida 3 (X3) en la casilla 13, ante lo cual O se vio forzado a jugar en 11 (O4). Luego, X (X5) hizo su quinta movida en 33, y a O no le quedó otra alternativa que hacer su última jugada (hasta ahí) en 23 (O6). En definitiva, el tablero debería completarse así:

O4	X1	X3
		O6
	O2	X5

Figura 4

Y esto concluye el análisis. Es decir, si uno supone que las dos personas que están jugando lo hacen usando al máximo su capacidad reflexiva y que no cometen errores, entonces lo que *tuvo* que haber pasado para que llegaran a la posición de la Figura 1 es que X haya empezado en la casilla 12. A partir de ahí, un orden posible de las movidas es el que aparece en la Figura 4.

Desde acá, si los dos juegan 'bien', la partida no tiene ganador.

Mi objetivo al haber planteado este problema es entrenar nuestra capacidad reflexiva, para situarnos en el lugar de 'el otro' mientras uno está o bien compitiendo, o bien 'tratando de entender a la persona que tiene enfrente'. ¿No sería útil imaginar qué es lo que está llevando a la otra persona con la que uno está interactuando a proceder de la forma en la que lo hace?

El problema de Luis Scola

Así como Manu Ginóbili es quien me aporta tantas veces problemas para pensar o testea los que yo le mando, otro basquetbolista de elite y actual capitán del seleccionado argentino, Luis Scola, posee también sus particulares gustos por la matemática.

Luis tiene un profundo interés por las estadísticas, por bucear en las grandes bases de datos, las formas de utilizarlas para mejorar su producción personal como jugador, leyendo los números de su actuación partido por partido, tratando de descubrir los mensajes escondidos en esos datos para ver qué tiene que practicar más, en qué lugar de la cancha falla más, o al revés, en qué posiciones del campo falla menos o tiene mayores porcentajes de aciertos. La NBA hoy tiene cámaras en todos los estadios, más precisamente seis ubicadas *no* para filmar para la televisión: sacan... y lea bien lo que voy a escribir, ¡veinticinco fotos por segundo!, para medir *todo* lo que usted se pueda imaginar, desde cuántas veces pica un jugador la pelota hasta la distancia que hay entre cada jugador y su oponente, la altura de su salto, la trayectoria 'casi' exacta de sus tiros, su impacto en ataque pero también en defensa, cómo incide en él el cansancio, cómo son sus picos[76]

76. Por 'pico' entiendo momentos de producción *máxima* o bien *mínima*.

en función del tiempo que lleva jugado así como su capacidad para reaccionar frente a un resultado adverso... La cantidad de material registrado hubiera sido imposible de alcanzar sólo un par de años atrás.

Es obvio que Scola, al igual que todos sus compañeros del seleccionado argentino y los de la NBA, sabe cuáles son sus 'zonas de confort', en qué lugares de la cancha se siente más cómodo, jugando con qué compañeros, contra qué rivales, y sus posiciones más favorables. Pero los datos ofrecen señales que no siempre son detectadas, patrones que resultaban inadvertidos, y los números no hacen 'lobby', no tienen 'agendas encubiertas': simplemente 'son'.

En todo caso, Scola es ejemplo fantástico de lo que la matemática puede hacer para mejorar a un atleta de alta competencia.

Además, Luis ya no es un niño ni una promesa. Fue campeón olímpico (medalla de oro en Atenas), campeón de Europa, mejor jugador de Europa, medalla de bronce en los Juegos Olímpicos de Beijing, campeón en España y será recordado como uno de los mejores jugadores argentinos de la historia.

Tengo una pregunta para usted: ¿por qué alguien como él, que ya ha conseguido tantos 'éxitos', que ha firmado contratos multimillonarios que le permitirán llevar una vida sin sobresaltos, seguirá insistiendo en ver cómo mejorar su juego? Scola está a punto de cumplir 34 años, por lo que es obvio que ya jugó más años de los que le quedan por delante como profesional. Aun así, está interesado en forma consistente y sistemática en tratar de detectar qué le falta, qué áreas de su juego necesita perfeccionar, a qué le tiene que dedicar más tiempo en sus entrenamientos personales... y eso es lo que destaca, lo distingue y lo pone en una categoría diferente.

Escribí todo esto, porque quiero exhibir algo que no es necesariamente visible en la vida de los atletas. En definitiva, uno los juzga y/o los ve en el momento de la competencia, en el momento de los partidos. Pero si uno hace las cuentas, descubre inmediatamente que esos momentos son tan pocos comparados con el tiempo de preparación y de entrenamiento, que no hace falta ser muy sagaz para advertir que lo que sucede en *esa parte del día* es lo que tiene un aporte decisivo en el momento del juego. En resumen, más allá de sus destrezas personales, Scola es mejor porque hace todo lo posible para serlo. No es mejor que los otros, algo que está fuera de su control. Scola, en todo caso, pugna por ofrecer(se) su mejor versión de Scola, no quedarse con 'nada' dentro del tanque. Su intención es empujar las fronteras de sus propias restricciones.

Lo que sigue es una historia más de la vida cotidiana. Créame que ni agregué ni quité nada. Lo que usted va a leer es una réplica textual de lo que sucedió. Eso sí: una vez que lo haya leído, tómese un ratito y reflexione sobre lo que dice. Vea si usted es capaz de producir una solución al problema. Vale la pena.

Acá va: lunes 17 de marzo de 2014. Luis Scola me escribe un mensaje que leo en mi teléfono celular:

Adrián, suponé que una persona se quiere comprar una remera que vale 97 pesos. No tiene nada, ni un peso. Entonces, le pide prestado dinero a su mamá. Ella le da 50. Luego va hacia donde está el padre y él le presta otros 50. Con los 100 que tiene ahora, va y compra la remera.

Como te das cuenta, le sobran 3 pesos. Uno se lo devuelve a la madre y ahora le debe 49 pesos a ella. Otro se lo devuelve al padre y ahora, le debe también a él 49 pesos. Uno le queda para él. ¿Dónde está el peso que falta?

Es que 49 + 49 + 1 = 99. ¿Qué pasó?

Yo estaba en la calle, caminando, y casi me atropella un auto mientras leía el texto y pretendía desentrañar el mensaje cruzando sin advertir que la luz estaba en rojo.

Usted, que está leyendo este texto con tranquilidad, ¿qué tiene para decir? ¿Quiere tomarse un tiempo para pensar? Así como está planteado el problema, parecería que ha desaparecido un peso o hay algo que no funciona.

Pero lo notable es que, puesto en esos términos, da la sensación de que ha habido una suerte de pase de magia o alguien está usando la matemática para sacar alguna ventaja. Fíjese si usted es capaz de *descubrir* dónde se encuentra el error. Es simple, entretenido, y la/lo va a hacer sentir bien si lo detecta.

Ahora sigo yo. La primera pregunta que yo haría es la siguiente: ¿por qué habría alguien de querer sumar esos números? ¿Para qué serviría? Es decir, ¿tiene sentido hacer esa cuenta?

De hecho, quiero convencerla/lo de que no tiene sentido esa suma, pero no quiero hacer una afirmación sin explicarme mejor.

El padre le prestó 50 pesos, pero recibió uno de vuelta. Por lo tanto, le prestó *solamente* 49 pesos.

La madre le prestó 50 pesos, pero recibió uno de vuelta. Por lo tanto, ella *también* le prestó 49 pesos.

En total, sumados ambos préstamos, le dieron 98 pesos. Usted *no necesitaba* 98 *pesos* sino 97 para poder comprar la camiseta. Luego, con esos 98 pesos usted fue y compró lo que quería. Pagó 97 y le sobró un peso. ¡Y ésa es la única cuenta que tiene sentido hacer! ¿Por qué habríamos de sumarle ese peso a los 98 para llegar a 99? Ese peso está incluido en los 98 que le dieron entre el padre y la madre. En todo caso, ¡está mal sumar un peso porque ese peso de más *no existe*!

Proponer esa suma es lo que 'confunde' e invita a pensar que o bien desapareció un peso o bien hubo algún pase de magia...

y en realidad, no hay nada de eso: es sólo una distracción que promueve el error.

Es un problema que resulta sencillo… una vez que uno conoce la solución. Pero cuando uno se enfrenta con problemas de este tipo, no son tan fáciles de resolver: uno es *inducido* a pensar mal, como si alguien *nos empujara* a elegir el camino equivocado.

Le envié a Scola mi solución y le dije que escribiría un artículo con lo que sucedió. Me prometió que tiene más: por lo tanto, en forma *inesperada para mí*, apareció una fuente más de problemas para libros y/o artículos para *Página/12* o para alguno de los programas de televisión. Eso sí: cuando usted se sorprenda como casi todos respecto a qué es lo que sucedió para que la Argentina tuviera súbitamente un grupo de jugadores que ganaran una medalla de oro en básquet... sí, en básquet, piense que detrás de lo que se ve, hay algunas otras cosas ‘intangibles’, singulares, que transforman a este grupo de jugadores en algo más que una generación dorada de atletas... constituyen una generación dorada de personas, con intereses y curiosidades atípicos y con un grado de formación y educación que ciertamente no es habitual.

Scola es sólo uno de ellos.

Un primo del Sudoku

¿Cuántas veces le pasó que usted ve una grilla al estilo Sudoku o un tablero con letras y/o números que uno tiene que completar e inmediatamente decidió pasar de largo? Posiblemente muchas o quizá *todas* las veces. Entonces, este artículo puede ser para usted.

No se preocupe: no pretendo que cambie sus hábitos, pero quisiera invitarla/lo a contestar una pregunta: ¿no le da curiosidad saber qué es lo que pueden tener este tipo de problemas que aparecen publicados en diarios y revistas en todo el mundo? *Algo* deben tener. ¿Qué es? ¿Con qué se entretiene *ese* grupo de personas?

Bien. Esto que sigue pretende mostrar cuál es la lógica que subyace detrás de todos ellos. Por supuesto, no tengo la expectativa ni la esperanza de poder englobar a *todos* los problemas de este tipo, pero sí quisiera mostrar en qué consisten, qué es lo que hay que hacer para resolverlos más allá de leer las instrucciones que suelen ser —en general— muy sencillas. Es decir: ¿qué es lo que uno tiene que hacer? ¿Cómo se empieza y por dónde?

Fíjese en el siguiente cuadrado de 5 × 5. Contiene 25 casillas. La mayoría están vacías, con ocho excepciones: todas las de la primera fila y tres de la tercera. Si observa con un poco más de cuidado, en la primera fila aparecen cinco letras distintas: P, R, I, M y O. Y en la tercera, aparecen solamente tres de ellas: I, M y O.

P	R	I	M	O
	I	M	O	

Le pido un favor: si llegó hasta acá, no abandone ahora. Deme una oportunidad más. Si logra llegar hasta el final, se habrá otorgado a usted misma/mismo la chance de *aprender* algo nuevo. No será esencial en su vida, ni la cambiará de manera visible, pero se agregará un condimento más: será capaz de entender de qué hablan los que hacen Sudokus o problemas equivalentes. Y como verá dentro de un instante, no había (ni hay) nada estrambótico ni alejado de sus posibilidades. Además, nadie ve lo que usted está haciendo, por lo que puede avanzar con sus debilidades (y las mías) sin ser juzgado.

Una cosa más: créame que no sólo se trata de problemas muy entretenidos, sino que —a diferencia de las palabras cruzadas, por ejemplo— no hace falta saber NADA, no se requiere NINGÚN conocimiento previo. Todo lo que uno necesita es saber... *pensar*.

Ahora sigo con el problema. En principio, en cualquier grilla como la que figura en este artículo hay cinco filas, cinco columnas y dos diagonales[77]. Si usted estuviera en la sección de entre-

77. La que va desde el extremo superior derecho hasta el inferior izquier-

tenimientos de un diario y/o revista, aparecerían las siguientes instrucciones:

"Complete las casillas que faltan usando las cinco letras (P, R, I, M y O) pero cumpliendo estas restricciones:

a) Cada una de las cinco letras tiene que aparecer UNA SOLA vez en cada fila. O sea, no hay letras repetidas en ninguna fila.
b) Cada una de las cinco letras tiene que aparecer UNA SOLA vez en cada columna (no hay letras repetidas en ninguna columna).
c) Cada una de las cinco letras tiene que aparecer UNA SOLA vez en las dos diagonales (la que va del extremo superior derecho al inferior izquierdo y la que va del extremo superior izquierdo al extremo inferior derecho) (no hay letras repetidas en ninguna de las dos diagonales)".

Puesto en estos términos, parecería que uno tiene que *probar* y/o *adivinar*. Pero no es así. Si me acompaña verá cómo se puede DEDUCIR (con mayúscula) la única solución que tiene el problema. Avanzará haciendo conjeturas y descubriendo qué letra *tiene* que ir en cada lugar. Le permitirá entender la *potencia* que usted posee y que no siempre usa: su capacidad para elaborar una estrategia (o sea, *hacer* matemática).

Ahora voy a empezar a hilvanar algunos razonamientos. Fíjese en la segunda columna, la casilla que figura debajo de la

do, y la que va desde el extremo superior izquierdo, hasta el inferior derecho. En realidad, hay *otras* diagonales menores, pero para este ejemplo resultan innecesarias.

letra I. ¿Qué letra puede ir allí? Como en la segunda columna ya figuran las letras R e I, estas dos están descartadas. Quedan P, M y O. Pero si se fija, esta casilla forma parte también de la diagonal que va de derecha a izquierda, de arriba hacia abajo y que empieza en la letra O. Si usted recorre esa diagonal, verá que las letras O y M ya están usadas también y, por lo tanto, la ÚNICA alternativa es que en esa casilla vaya la letra P. ¿Me siguió hasta acá? No avance si se perdió en el camino porque lo ÚNICO que interesa es que usted haya podido descubrir (junto conmigo) que en esa casilla TIENE que ir la letra P.

Eso ya significa un gran avance: en la segunda columna ya tenemos ubicadas tres letras, R, I y P. Faltan la M y la O. Tengo una pregunta entonces: ¿qué letra cree que debería ir en la casilla que está en la segunda fila y la segunda columna, la que está debajo de la R? (tómese tiempo para pensar y verá que lo va a deducir usted en soledad).

Efectivamente, la letra que *debe* ir allí es la O, porque esa casilla forma parte no sólo de la segunda fila y la segunda columna, sino que también es parte de la diagonal que va de izquierda a derecha (y de arriba hacia abajo). Por lo tanto, como la M ya está en esa diagonal, la *única* letra que puede ir allí es la O.

Con este paso, ya tenemos ubicadas cuatro letras en la segunda columna (de arriba hacia abajo): R, O, I y P. Falta una sola: la M. Luego, ubicamos la M en la quinta fila, segunda columna y ya tenemos la columna completa.

De la misma forma, fíjese lo que *debe* suceder en la tercera fila. Allí ya hay ubicadas tres letras: I, M y O. Luego, quedan únicamente por poner la P y la R, que pueden ocupar la primera y la última casilla de esa fila. Pero si observa lo que sucede en la primera columna, ya hemos usado la letra P (en la primera fila). Luego, como la P no puede ir allí, entonces, la única letra que puede ir en la tercera fila (primera columna) es la R. En esa fila entonces queda *una sola* letra por ubicar, ya que usamos la R, I, M y O. Falta la P, que va en la última columna de esa tercera fila.

Ahora tenemos la grilla así:

P	R	I	M	O
	O			
R	I	M	O	P
	P			
	M			

Si me siguió hasta acá, habrá notado que no hubo necesidad de apelar a nada que no fuera conjeturar qué letras *podrían ir* en cada casilla y descartar las que violarían las restricciones.

Con esta nueva grilla, ahora el camino debería ser más sencillo. ¿No le da curiosidad ver si lo puede completar usted sin mí? Inténtelo. Yo sigo acá.

Fíjese ahora en la primera columna, la última fila. Esa casilla forma parte no sólo de la primera columna y la quinta fila, sino también de la *diagonal* que va desde la casilla superior derecha a la inferior izquierda. Esa diagonal tiene —por ahora— tres letras ubicadas: P, M y O. Faltan la R y la I. Pero ya usamos la R en la primera columna. Luego, la única que puede ocupar esa casilla es la I. Para completar esa misma diagonal, ahora hemos usado cuatro letras: I, P, M y O. Falta solamente la R. La ponemos en la segunda fila, cuarta columna (debajo de la M).

Ahora advierta lo que pasa en la otra diagonal, la que va de izquierda a derecha. Esa diagonal tiene ya tres letras: P, O y M. Faltan la R y la I. Esas letras deberían ubicarse en las dos casillas que restan. Pero en la casilla que está en la cuarta fila y cuarta columna no puede ir una R porque la acabamos de usar en la segunda fila. Luego, en la cuarta fila y cuarta columna *debe* ir una I y, por lo tanto, a la cuarta columna sólo le falta una letra (ya usamos M, R, O e I): la P.

P	R	I	M	O
	O		R	
R	I	M	O	P
	P		I	
I	M		P	

Ahora, lo que resta es mucho más sencillo. A la diagonal que va de izquierda a derecha (de arriba hacia abajo), solo le falta la R (que va en la casilla que está en la quinta fila y quinta columna); en la casilla que está en la quinta fila y tercera columna hay que poner una O (porque es la única que queda). A la primera columna le faltan dos letras: la M y la O, pero en la casilla de la primera columna y segunda fila *no puede ir la* O porque ya aparece en la segunda fila. Luego, *debe* ir la M, y en la cuarta fila de la primera columna, hay que usar la O.

Para terminar, en la casilla de la tercera columna y cuarta fila, *debe* ir una letra R (porque faltan la R y la P, pero la P ya está en la segunda columna) por lo que hay que ubicar la P en la segunda fila de la tercera columna. Lo único que resta es completar la quinta columna, pero con la ventaja de saber que *la segunda, tercera y cuarta fila* tienen ya cuatro de las cinco letras ubicadas. De esa forma, terminar la grilla es inmediato, queda así:

P	R	I	M	O
M	O	P	R	I
R	I	M	O	P
O	P	R	I	M
I	M	O	P	R

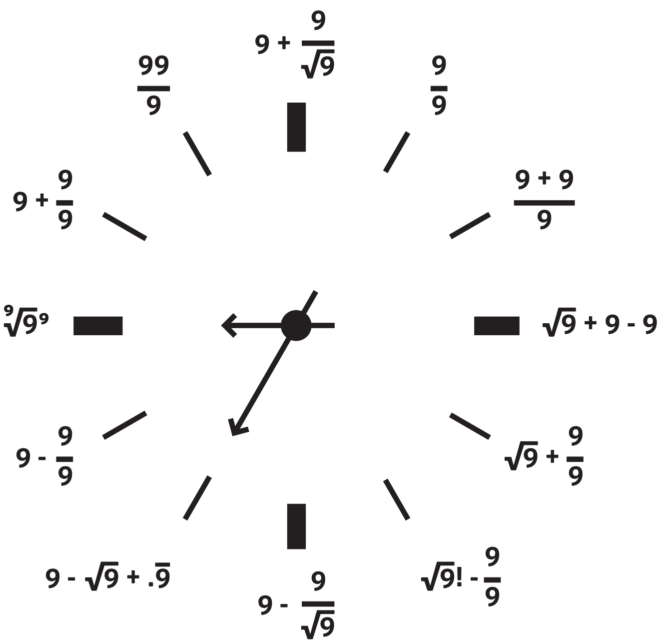
Moraleja

Las ideas que usé (usamos) para completar esta grilla son las que se usan para resolver cualquiera de los Sudoku[78]. Por supuesto, hay algunos que son un poco más complicados y los razonamientos que hay que hacer son un poco más elaborados, pero ***no difieren en nada*** de lo que hicimos acá.

Para el final tengo una pregunta para usted. Si me siguió hasta acá, ¿no cree que está en condiciones de resolver cualquier problema de este tipo? Le anticipo la respuesta: ¡no tenga la menor duda! Usted tiene las herramientas necesarias. Lo único que hace falta es tener la voluntad para usarlas.

78. Los Sudoku presentan una grilla de 9 × 9 en lugar de 5 × 5, y a diferencia de cinco letras como había acá, aparecen los dígitos del 1 al 9. Hay algunas otras restricciones respecto a los cuadrados de 3 × 3 y no siempre se usan las diagonales, pero *esencialmente* es el mismo juego.

Un nuevo reloj



Mi madre falleció en octubre del año 2013. Llegó a la Argentina desde Polonia con su madre, una hermana y un hermano. Justamente, el hermano (Saúl) me regaló dos primas (Silvia y Mirta, mellizas) y la hermana (Miriam), dos primos (Lili y Josi).

A propósito de esta saga de libros para difundir la matemática, todos ellos están siempre a la búsqueda de formas de ayudarme, recogiendo material a través de sus hijos, o buceando en internet o en sus propias curiosidades.

Justamente Silvia advirtió que en todos los libros recientes había publicado algún reloj cuyos números tenían alguna ligazón con propiedades de la aritmética. Para que a este libro no le faltara un toque de ese tipo, me envió la foto que figura en este artículo.

En honor a ella, y a toda su familia, voy a llamar a esta parte del texto "el reloj de Silvia, Mirta y Lucas".

Ahora resolvamos juntos las igualdades que representan a cada número que va del 1 al 12. Primero, le sugiero que lo intente en soledad. En todo caso, si hay alguno que le ofrece demasiadas dificultades, coteje con las explicaciones que figuran a continuación. Acá van.

Para ponerme de acuerdo con usted, quiero reflexionar sobre algunos símbolos que aparecen en el reloj.

Como habrá visto, hay varias 'raíces cuadradas' y una 'raíz novena'. Para calcular la raíz cuadrada de un número, se utiliza el símbolo $\sqrt{\ }$. ¿Qué significa calcular la raíz cuadrada de un número x? O lo que es lo mismo, ¿qué quiere decir que la raíz cuadrada de x sea un número y?: que si uno *eleva al número **y** al cuadrado, obtiene el número **x***.

Por ejemplo, la raíz cuadrada (positiva) del número *nueve* es 3, porque al elevar 3 al cuadrado ($3^2 = 9$) se obtiene el número 9. La raíz cuadrada de 64 es el número 8, porque $8^2 = 8 \times 8 = 64$.

Por otro lado, si uno encuentra que y es la "raíz novena" del número x, esto significa que en lugar de elevar el número y al cuadrado como hacíamos antes, hay que elevarlo 'a la novena', o sea, multiplicarlo por sí mismo *¡nueve veces!*

Por ejemplo, *la raíz novena de* 40.353.607 *es igual a* 7, porque si uno eleva el número 7 a la novena potencia (o sea, lo multiplica por sí mismo 9 veces) se 'recupera' el número 40.353.607.

Cuando uno ubica un 'pequeño' segmento 'arriba' de un número expresado en su desarrollo decimal, uno está indicando que el número que aparece 'debajo' de ese segmento se repite indefinidamente.

Por ejemplo, si uno pone $0.\overline{3}$ es para indicar el número 0,333333333...

Si hago lo mismo con el número $0.\overline{9}$ es para indicar el número 0,99999999... que en realidad es IGUAL al número *uno*.

Finalmente, si uno agrega un símbolo de admiración al lado de un número natural *n*, lo que está indicando es que hay que multiplicar todos los números en forma descendente que van desde *n* hasta el número *uno*. Este símbolo se conoce con el nombre de 'factorial' de un número, en este caso, del número *n*.

Por ejemplo, el factorial del número 5, que se escribe $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

De la misma forma, el factorial de 10, que se escribe $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.628.800$.

Ahora sí, creo que estamos en condiciones de 'deducir' *todos* los números que aparecen en la figura.

a) 9/9 = 1
b) (9+9)/9 = 18/9 = 2
c) (raíz cuadrada de 9) + 9 – 9 = (3 + 9) – 9 = 12 – 9 = 3
d) (raíz cuadrada de 9) + (9/9) = 3 + 1 = 4
e) el factorial de (la raíz cuadrada de 9) – 9/9 = (factorial de 3) – 1 = 3! – 1 = (3 × 2 × 1) – 1 = 6 – 1 = 5
f) 9 – (9/(raíz cuadrada de 9)) = 9 – (9/3) = 9 – 3 = 6
g) 9 – (raíz cuadrada de 9) + ($0,\overline{9}$) = 9 – 3 + 0,999999... = 9 – 3 + 1 = 7

h) $9 - 9/9 = 9 - 1 = 8$
i) (raíz novena de 9^9) = 9
j) $9 + 9/9 = 9 + 1 = 10$
k) $99/9 = 11$
l) 9 + 9/(raíz cuadrada de 9) = $9 + 9/3 = 9 + 3 = 12$

El niño que repartía figuritas

Santiago era un niño generoso, tanto que un día salió de su casa con un número de figuritas que había venido coleccionando desde hacía tiempo. Cuando regresó, no tenía ninguna.

La madre se mostró ciertamente preocupada y le preguntó: “¿Qué hiciste con las figuritas?” “Nada, mamá”, balbuceó Santiago. “A medida que fui caminando hasta el club, me fui encontrando con seis amigos. A cada uno de ellos le di la mitad más una de las figuritas que iba teniendo en cada caso. Al final, me quedé sin ninguna.”

Pregunta: ¿es posible determinar con cuántas figuritas salió Santi de su casa?

Solución

Este problema es lindo para pensar ‘de atrás hacia adelante’. Es decir, empezar por el momento en el que Santiago entrega las últimas figuritas.

Voy a llamar A al número de figuritas que tenía Santiago cuando se encontró con el último amigo, el sexto.

¿Qué pasó en ese momento? Le entregó la mitad de las que tenía (A/2) y le agregó *una más*, pero entonces se quedó sin nada.

Esto quiere decir que la mitad de las que tenía más una tuvo que haber sido igual al número que tenía en la mano cuando se tropezó con su sexto amigo. Dicho de otra forma, tuvo que haberse verificado esta igualdad:

$$(A/2) + 1 = A$$

Luego, busco un denominador común para poder hacer esa cuenta:

$$A/2 + 2/2 = A,$$

o lo que es lo mismo que decir que

$$(A + 2) = 2A,$$

y de acá se deduce que

$$\boxed{A = 2}$$

O sea, en el momento en que Santiago se encuentra con su sexto amigo, tiene 2 figuritas. Es bueno saberlo, porque ahora podemos seguir yendo 'hacia atrás' y plantearnos cuántas figuritas tenía al encontrarse con el quinto amigo. Recién hemos descubierto que después de haber visitado al quinto amigo se quedó con dos figuritas. Ahora la cuenta es la misma que antes: si llamo B al número de figuritas que tenía al encontrarse con el quinto amigo, entonces a él le dio la mitad de B más una figurita, y se quedó con 2.

O sea:

$$B - (B/2 + 1) = 2$$

Es decir que

$$B/2 - 1 = 2$$

Lo que implica que

$$\boxed{B = 6}$$

Ahora ya sabemos que al encontrarse con el quinto amigo tenía 6 figuritas. Con la misma idea, calculemos lo que le pasó al encontrarse con el cuarto amigo. Allí tenía C figuritas. Cuando le entregó (C/2 + 1) se quedó con 6.

O sea, se tiene que haber verificado esta igualdad:

$$C - (C/2 + 1) = 6$$

Luego,

$$C/2 - 1 = 6$$

De acá se deduce que

$$C = 14$$

Si usted sigue haciendo la cuenta de la misma forma, descubrirá que los números que se obtienen son: 2, 6, 14, y luego 30, 62 y al final, 126.

Es decir que cuando Santiago salió de su casa, tenía 126 figuritas. ¿Cómo comprobarlo?

Bien, haciendo las cuentas que permitan corroborar si lo que hicimos anteriormente es correcto.

$126 – \{(126/2) + 1\} = 126 – (64) = 62$
$62 – \{(62/2) + 1\} = 62 – 32 = 30$
$30 – \{(30/2) + 1\} = 30 – 16 = 14$
$14 – \{(14/2) + 1\} = 14 – 8 = 6$
$6 – \{(6/2) + 1\} = 6 – 4 = 2$
$2 – \{(2/2) + 1\} = 2 – 2 = 0$

Ésa es la idea[79]. El resto se lo dejo a usted, pero más allá de las cuentas que lo corroboran, muchas veces es necesario ‘empezar desde atrás’ y ‘desandar el camino’.

79. Aquí quiero agregar una observación *preciosa* de Carlos D’Andrea. Carlos me escribió el 24 de junio del año 2014: “Adrián, uno podría plantear —y resolver— un sistema lineal de seis ecuaciones con seis incógnitas. Las ecuaciones son: $(1/2)a – 1 = b$; $(1/2)b – 1 = c$; $(1/2)c – 1 = d$; $(1/2)d – 1 = e$; $(1/2)e – 1 = f$, y finalmente $(1/2)f – 1 = 0$. Este sistema tiene como solución única: (126, 62, 30, 14, 6, 2). Más aún: si en lugar de seis amigos hubiera ‘n’ amigos, entonces con estas mismas ideas se puede deducir que Santiago tenía al principio $(2^{(n+1)} – 2)$ figuritas”.

El mago que *siempre* encontraba el número siete

Le pido que ponga 20 pelotitas dentro de una bolsa o una caja.

Mientras tanto, yo tengo acá conmigo (aunque usted no lo vea) un sobre con un número escrito.

Ahora, haga lo siguiente: retire de la caja un número cualquiera de pelotitas entre 1 y 10.

Deben haber quedado un cierto número de pelotitas allí adentro. Cuéntelas. Tiene que haberle dado algún número entre 10 y 19.

Suponga que le quedaron 17. No es relevante en este momento. Ahora, le pido que haga lo siguiente: como el número 17 tiene dos dígitos (1 y 7), réstelos del número 17. En este caso, lo que tiene que hacer es restar 17 menos 7, y al resultado (10), restarle el otro dígito (uno). Obtendrá en este caso el número 9.

Pero esto fue un ejemplo. Ahora usted, sin que yo lo vea, retire un número cualquiera de pelotitas entre 1 y 10. Igual que antes, cuente las que le quedaron. Como hicimos antes, reste los dos dígitos del número de pelotitas que le quedaron.

Eso le permitirá llegar hasta un cierto número. A *este* resultado, réstele *dos*.

Yo, mientras tanto, abro el sobre que tengo acá conmigo (que usted no ve) y me fijo el número que está escrito.

Resulta que el número que yo descubro es el número *siete*.

¿Tendrá algo que ver con el número que le dio a usted?... ¿Seguro? Fíjese de nuevo. Si su cuenta no le dio *siete* es porque hicimos algo mal. ¿Quiere intentar otra vez?

Resumo: de una caja que contiene 20 pelotitas, usted retire cualquier número entre 1 y 10. Habrán quedado un cierto número de pelotitas en la caja (que tiene que estar entre 10 y 19, ya que usted retiró entre 1 y 10).

A ese número, réstele sus dos dígitos, y al número que resulte, réstele *dos*. Cuando yo abra el sobre que tengo acá conmigo, deberían coincidir los dos números: su resultado con el número que yo tengo escrito en un papel dentro del sobre. Lo curioso es que yo tengo el número *siete*. ¿Usted?

A esta altura, si yo estuviera en su lugar, trataría de saber qué fue lo que pasó, o mejor dicho, qué es lo que pasa. ¿Cómo puede ser que yo tenga anotado acá al número *siete*?

Más aún: ¿cómo es posible que sin saber yo qué número de pelotitas habría de elegir usted, yo ya puse el número *siete*? ¿Qué más se podría inferir entonces?

¿Será verdad que *siempre da* ***siete***?

Lo notable es que ¡sí, siempre da *siete*!

La pregunta que sigue ahora es... ¿Por qué?

Bien, de eso viven los magos (entre otras cosas): de lograr sorprender con propiedades que ofrece la matemática. La/lo invito a que le dedique un ratito a tratar de *descubrir* por qué esto sucede siempre. Mientras tanto, yo sigo acá.

Solución

Fíjese que el número de pelotitas que le quedaron (como vimos antes) tiene que estar entre 10 y 19. Observe lo que sucede con cada una de las posibilidades.

Si le quedaron 10, tiene que restarle a 10 el dígito 1 y el dígito 0. Cuando usted haga eso obtendrá 9.

Si le quedaron 11, tiene que restarle a 11 el dígito 1 y el dígito 1. Cuando usted haga eso, obtendrá el número 9.

Si le quedaron 12, tiene que restarle a 12 el dígito 1 y el dígito 2. Cuando usted haga eso, obtendrá el número 9.

Si le quedaron 13, tiene que restarle a 13 el dígito 1 y el dígito 3. Cuando usted haga eso, obtendrá el número 9.

No sé si seguir pero, como usted advierte, uno de los dígitos que usted tendrá que restar es el número *uno*, y el otro es el último número de los dos que forman *su número*. Al hacer esto último (por ejemplo, si le quedó 13 tiene que restar 3), le quedarán 10, y luego, al restar 1 le quedarán 9. Es decir, haga lo que haga, primero restará el dígito que hace falta para llegar hasta 10, y después tiene que restar uno más. Con eso, yo lo llevo a que, en principio, su resultado sea *nueve*.

Como después la/lo invito a que le reste *dos*, la/lo he llevado a que le diera el número *siete* que yo tengo guardado en el sobre.

Es decir, haga lo que haga, más allá del número de pelotitas que retire, yo lo llevo a que le dé *siete*.

Por supuesto, uno participa de un juego de estas características en forma ingenua, sin estar pensando en todas estas posibilidades. Uno juega, y listo... se deja llevar. Lo que sucede es que quien prepara estos juegos tiene la habilidad y destreza que provee la aritmética para descubrir que esta propiedad vale *siempre*, independientemente del número de pelotitas que uno elija.

Como uno no está advertido, se siente sorprendido y empieza a creer en que *efectivamente* ***puede que haya magia***.

Y de hecho la hay, sólo que se llama *matemagia*.

4. ESTRATEGIA Y LÓGICA

Competencia entre cuatro mujeres

Una empresa ofrecía puestos de trabajo a cuatro mujeres: Alicia (A), Brenda (B), Carmen (C) y Diana (D). Las tareas (y el sueldo) que habría de asignarles dependerían de cómo aparecieran ubicadas en una competencia especialmente diseñada para distinguir unas de otras. Es decir, el objetivo de la compañía era que, una vez finalizada la prueba, se pudiera establecer un orden (de primera a cuarta) para decidir cómo y dónde posicionar a cada una.

Luego de que se conocieran los resultados, una persona le fue preguntando a cada una cómo le había ido, y obtuvo estas respuestas:

(a) A dijo: C salió 1° y B fue 2°
(b) B dijo: C fue 2° y D fue 3°
(c) C dijo: D fue 4° y A fue 2°
Por último, D no quiso contestar nada.

Como se ve, cada una (salvo D) dio una respuesta que consiste en dos afirmaciones. Se sabe además que de las afirmaciones de cada joven, SOLAMENTE UNA es cierta.

Con estos datos, ¿se puede decidir cuál fue el orden final de la competencia?

Tómese tiempo para pensar y analizar las diferentes posibilidades. Es un ejercicio de lógica precioso y todo lo que hace falta es imaginar diferentes escenarios y detectar si son posibles o no.

Respuesta

¿Cómo hacer para escribir *todos* los posibles órdenes en el que pudo haber terminado la competencia? Claramente, cada una de las cuatro jóvenes pudo haber terminado en cualquiera de los cuatro lugares. Por ejemplo, si escribo: ABCD, habría que interpretar que A salió primera; B, segunda; C, tercera, y D, cuarta. Luego, en cada lugar hay cuatro posibilidades, pero como no se pueden repetir (es decir, si la participante A salió segunda, no pudo haber salido simultáneamente en ninguna otra posición), si uno quiere *contar* todos los posibles órdenes, puede pensarlos de la siguiente forma:

Hay cuatro posibilidades para el primer lugar; una vez establecido quién sale primera, hay tres posibilidades para el segundo lugar, o sea, hay $4 x 3 = 12$ maneras de que sean ocupados los primeros dos lugares. Para cada una de estas doce posibilidades, hay dos jóvenes que van a quedar disponibles para el tercer lugar, o sea, $12 \times 2 = 24$. Es decir, hay 24 maneras de distribuir las jóvenes en los primeros tres lugares. Y no hay más. ¿Por qué? Porque una vez que se sabe quiénes ocuparon los primeros tres lugares, ya queda determinada quién salió cuarta.

Moraleja: hay 24 posibles resultados finales. Los voy a escribir así:

ABCD
ABDC
ACBD

ACDB
ADBC
ADCB
BACD
BADC
BCAD
BCDA
BDAC
BDCA
CABD
CADB
CBAD
CBDA
CDAB
CDBA
DABC
DACB
DBAC
DBCA
DCAB
DCBA

Y no hay más. Ésas son las 24 posibilidades. Ahora analicemos los dichos de las cuatro participantes.

Primer paso

La participante D no dijo nada. Luego, sólo me voy a concentrar en lo que dijeron las jóvenes A, B y C.

Como solamente una de las afirmaciones es cierta en cada caso, *no puede suceder* que se verifiquen las *dos afirmaciones* que pronunció cada una. Por ejemplo, la participante A dijo que C salió 1° y B salió 2°. Voy a eliminar las filas en donde ambas afirmaciones suceden simultáneamente. Si usted se fija, descubrirá que esto ocurre en las filas (15) y (16).

Sigo ahora con lo que dijo B: C salió 2° y D salió 3°. Voy a eliminar las filas en donde estas afirmaciones son simultáneamente ciertas: las filas (4) y (10).

Lo mismo con lo que dijo C: D salió 4° y A salió 2°. Como esto no puede suceder al mismo tiempo, puedo excluir las filas (7) y (13).

En síntesis, hasta acá, eliminamos seis filas: (4), (7), (10), (13), (15) y (16).

"Sobreviven" las que figuran a continuación:

ABCD
ABDC
ACBD
ACDB
ADBC
ADCB
BACD
BADC
BCAD
BCDA
BDAC
BDCA
CABD
CADB
CBAD
CBDA
CDAB

CDBA
DABC
DACB
DBAC
DBCA
DCAB
DCBA

Segundo paso

De acuerdo con (b): C fue 2° o D fue 3°.

Si C fue segunda, entonces B no puede ser segunda también. Por lo tanto, según (a) tiene que haber salido primera C. Esto es imposible: C no pudo haber sido segunda y primera al mismo tiempo. Moraleja: C no pudo ser segunda y, de acuerdo con (b), esto implica que D tuvo que haber sido tercera.

Pero al mismo tiempo, si D fue tercera, entonces usando el caso (c), D no pudo haber sido cuarta. Luego, A tuvo que ser segunda. O sea que las únicas formas posibles son aquellas filas de cuatro que tengan a A como segunda y a D como tercera, es decir que sean así:

_ A D _

Luego sólo 'sobreviven' las filas (8) y (14), o sea BADC y CADB.

Tercer paso

Por último, si uno observa las dos alternativas que quedaron (BADC y CADB), la cuaterna BADC no cumple lo que dijo la competidora A, o sea, no se cumple (a): ni C salió primera ni B salió segunda.

En cambio, si el orden final fue CADB, ahora *sí* se cumplen todas las premisas:

Del caso (a), es cierto que C fue primera
Del caso (b), es cierto que D fue tercera
Del caso (c), es cierto que A fue segunda.

Y listo. Éste es el orden final entonces:

C fue primera
A fue segunda
D fue tercera, y
B fue cuarta.

Otras soluciones

Carlos Sarraute y Juan Sabia, después de haber leído mi solución, me enviaron las propias. Son mucho más breves y además, mucho más 'elegantes'. Por eso es que quiero incluirlas acá.

En todo caso, estoy seguro de que cuantas más soluciones posibles haya, mejor, ya que habrá más ángulos para pensar. Acá va.

Solución de Carlos Sarraute

Carlos escribió un pequeño *cuadro* que resume las frases de cada una de las participantes. Lo que aparece en la fila (a) es lo que dijo A, en la (b) lo que dijo B y en la (c) lo que dijo C. Recuerde que cada fila consiste de *solamente una* respuesta correcta. En el cuadro aparece 'arriba' la posición de cada una de las participantes.

	1	2	3	4
(a)	C	B		
(b)		C	D	
(c)		A		D

Analicemos lo que dijo A, o sea, lo que figura en la fila (a). O bien C salió primera o bien B salió segunda. Supongamos que B salió segunda. En ese caso, en la fila (b), la afirmación correcta es que D salió tercera porque ya sabíamos que B fue segunda. Pero entonces se produce una contradicción porque ninguna de las dos afirmaciones de C (que figuran en (c)) puede ser cierta: ni A pudo haber salido segunda, porque fue B, ni D pudo haber salido cuarta, porque salió tercera. De esto se deduce que en (a), la respuesta correcta *no es* que B fue segunda, sino que C fue primera. Veamos a qué nos conduce esto.

Como ahora sabemos que C fue primera, entonces en (b) la afirmación correcta es que D salió tercera. Luego, en la fila (c), que D salió cuarta es falso y, por lo tanto, tiene que ser cierto que A salió segunda. En definitiva, se resume todo diciendo que: C fue primera, A salió segunda, D salió tercera y por último (como no queda otra alternativa), B tuvo que haber salido cuarta. El resultado final de la competencia fue C, A, D y B.

Solución de Juan Sabia

"Adrián, miremos el problema de esta forma. ¿Qué pudo haber pasado con B? Una de dos: o bien salió segunda o no. No hay más posibilidades. Acompañame y te voy a demostrar que independientemente de que B haya salido segunda o no, se puede deducir que D salió tercera. ¿Por qué? Supongamos primero **que B salió segunda**. Entonces, por (b), como C no pudo haber salido segunda, D tuvo que ser tercera. Por otro lado, supongamos que **B no haya salido segunda**. Entonces por (a), C tuvo que haber salido primera, y ahora por (b), como C no pudo ser segunda, se deduce que D fue tercera. Como ves, haya pasado lo que haya pasado con B, **D tuvo que salir tercera**. Con este dato, ahora es **directo** deducir las posiciones de todas las otras. Fijate: por (c) como es falso que D fuera cuarta, entonces **A tuvo que ser segunda**. Por (a), como B no pudo ser segunda, entonces **C tuvo que salir primera**. Y finalmente, como no queda otra alternativa, **B tuvo que salir cuarta**. Y eso completa las posiciones: C, A, D y B."

Teclas intercambiadas[80]

Un estudiante trajo una calculadora con un problema. Me dijo que había *dos teclas* (que no sabía cuáles eran) que estaban intercambiadas. Es decir, cuando uno aprieta una de esas dos teclas, la calculadora hace la cuenta con el número que corresponde a la otra. Y viceversa.

Le propuse que hiciéramos algunas cuentas, nos fijáramos en los resultados y viéramos si podíamos decidir cuáles eran las dos teclas intercambiadas.

Alcanzó con que hiciéramos estas tres sumas:

(a) $6 + 8 = 14$
(b) $2 + 5 + 6 = 15$
(c) $1 + 2 + 3 + 8 = 12$

Le propongo ahora que le dedique un rato para tratar de dilucidar, con estos datos, cuáles son esas teclas.

80. Todo el crédito es para Pablo Coll (y sus colaboradores) porque el material lo propuso él para el programa *Alterados por Pi*, en la séptima edición que se emitió por primera vez en Canal Encuentro de la Argentina, durante el año 2014.

Solución

Fíjese en la parte (b). La suma debería dar 13 y no 15 (ya que 2 + 5 + 6 = 13). Esto indica que una de las teclas involucradas (2, 5 o 6) está intercambiada con otra. Si estuvieran intercambiadas entre ellas (por ejemplo si el 2 'actuara' como 5 y viceversa) entonces yo no podría descubrir el error. Pero como la suma no es la correcta, entonces tiene que haber una sola tecla que está equivocada. Más aún: sea cual fuere la tecla, lo que está haciendo es 'sumando 2' más de lo que debiera. Es decir, o bien el 2 está actuando como un 4, o bien el 5 funciona como 7 o bien el 6 actúa como 8.

Por otro lado, de la igualdad (c) uno descubre que *una* de las cuatro teclas (1, 2, 3 u 8) está intercambiada[81] con otra, pero en este caso, la tecla correcta aportaría *dos* unidades menos que la que está activada. Pero el número 1 no puede estar intercambiada con ninguna otra tecla porque 'dos unidades menos daría un número negativo', de la misma forma que el 2 tampoco puede ser la tecla equivocada porque si tuviera que actuar como 'cero', entonces la suma (2 + 5 +6) debería dar 11 y no 15.

Luego, las únicas dos alternativas son: que el 3 esté intercambiado con un 1 o que al apretar el 8 éste funcione como 6.

Si el 1 y el 3 estuvieran intercambiados, la igualdad (c) no serviría para detectarlo, ya que se compensarían y, por lo tanto, la suma debería dar correctamente 14 y no 12 como el resultado que figura. Luego, la única alternativa es que al apretar el 8 éste funcione como 6.

Finalmente, fíjese que de la igualdad (b), deducíamos tres po-

81. No pueden estar las *dos* teclas intercambiadas en la igualdad (c) porque si no, no podríamos descubrir el error.

sibilidades: que el 2 fuera un 4, el 5 fuera un 7 o que el 6 fuera un 8. De la igualdad (c), deducimos que la única posibilidad es que el 8 actúe como un 6. Luego, concluimos que el 6 y el 8 son las teclas intercambiadas, y como forma de confirmarlo, fíjese en la igualdad (a): allí se ve que la suma es correcta porque se compensan los errores que provee cada una.

¿No es bonita la solución?

Un breve agregado para CORROBORAR que lo que escribí acá está bien. Para *Científicos industria argentina*, utilicé la siguiente versión:

De la segunda ecuación, se deduce que o bien 2 o 5 o 6 suman DOS MÁS que lo que indican sus números. O sea, o bien el 2 está intercambiado con el 4, el 5 con el 7 o el 6 con el 8. Analicemos cada caso por separado. Dejemos para el final el caso en el que las teclas intercambiadas son el 6 y el 8, ya que en la primera ecuación se cancelan. Si el 2 estuviera intercambiado con el 4, entonces en la tercera ecuación, como el 4 no aparece, pero el 2 sí, ESTA SUMA (1 + 2 + 3 + 8) debería dar 16 (ya que el 2 sería interpretado como un 4). Pero como la suma resultó ser 12, entonces el 2 y el 4 no pueden ser las teclas en cuestión. La otra alternativa sería que el par de teclas INTERCAMBIADAS fueran el 5 y el 7. Pero NINGUNA de estas dos teclas FIGURAN en la tercera ecuación (c). Luego, hay que EXCLUIR al 5 y al 7. En consecuencia, LA ÚNICA ALTERNATIVA es que sean el 6 y el 8. Y ésa es *justamente* la respuesta.

Juego con siete bolsas y veinte pelotas

Tengo una pregunta para hacerle. Suponga que usted tiene *siete bolsas* (o cajas, es irrelevante) y por otro lado, tiene 20 pelotas iguales, de manera tal que uno las pueda guardar dentro de las bolsas.

¿Cree que será posible elaborar una estrategia para guardar las pelotas en las bolsas, de manera que *cada una* de las siete bolsas tenga un número diferente de pelotas?

¿Se podrá o no? ¿Usted qué cree?

Idea

Acompáñeme en este razonamiento. ¿Cuál es el número ***mínimo*** de pelotas que puedo distribuir en las bolsas? Es decir, ¿cuál es el *mínimo* número de pelotas que tengo que tener a mi disposición si en cada bolsa debe haber un número distinto?

En una bolsa podría no poner ninguna, o sea, habría *cero* pelotas.

En otra bolsa podría poner *una sola* pelota.

En otra bolsa, podría poner *dos* pelotas.

En otra bolsa, podría ahora poner *tres* pelotas.

En otra podría poner *cuatro*, en otra *cinco* y en la última *seis* ya que no tengo más que siete bolsas.

Ahora, hagamos juntos la cuenta de cuántas pelotas tendríamos en total si sumáramos las que fui poniendo en cada bolsa:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Como usted advierte, aun poniendo el *mínimo* de pelotas posibles, llegaríamos a 21. ¿Qué quiere decir esto?

Si en total tenemos 20 pelotas y el número que necesitaría distribuir *como mínimo* para que en todas las bolsas haya un número distinto es 21, entonces ¡no me va a quedar otra alternativa que *repetir* la cantidad de pelotas en alguna de las bolsas! Por lo tanto, *tiene que haber al menos dos bolsas que tengan el mismo número de pelotas*.

De esa forma, con un argumento tan sencillo (sumando), uno deduce la respuesta: ¡no es posible!

Barra de chocolate

Estoy seguro de que muchas veces usted tuvo que 'compartir' algo, sea con un hermano, un cónyuge, una compañera de trabajo, una socia... en fin, las múltiples variantes que pueda encontrar.

Naturalmente, uno querría tener las mejores chances de no quedar con 'la peor parte' (por ponerlo de alguna manera). Suponga que se trata de repartir una barra de chocolate, digamos de 5 × 7 'bloquecitos'. El chocolate está marcado con franjas horizontales y verticales, de manera tal que sea fácil de cortar. Usted (a quien voy a llamar A) y alguna otra persona (que llamo B) se van a dividir esos bloques y los van a ir cortando sucesiva y alternadamente por las líneas que marcan la barra original. Es decir, van cortando una vez cada uno. Supongamos que empieza A y divide la barra entera con un corte recto (horizontal o vertical) siguiendo las líneas demarcatorias. Luego B hace lo mismo, en una de las dos partes que quedaron. De esta forma se van alternando hasta que solamente quedan 35 bloquecitos. Allí es donde usted advierte que surge una mínima dificultad, pero es la que hay que tratar de salvar. El hecho de que 35 sea un número impar, obliga a tener que tomar una decisión: o bien usted o bien la otra persona se tendrán que quedar con un bloque menos, 17 y no 18. ¿Qué hacer entonces?

Se podría consensuar esta solución: el que corta último, se queda con un bloque más.

Dicho esto, tengo una pregunta para usted: ¿quién cree que 'gana'? ¿A o B? ¿Dependerá de quien empiece o dependerá de cómo corten la barra?

Ahora es su turno.

Solución

Piense conmigo: al empezar la división hay *un solo trozo (grande)* de chocolate. Después de que A haga el primer corte (no importa dónde), quedarán dos bloques. Ahora le toca a B, quien cortará alguna de las dos partes. Luego de este corte de B, el chocolate quedará dividido en *tres* bloques (todavía muy grandes). Después, le tocará nuevamente a A y ahora quedarán *cuatro* bloques (independientemente de dónde hayan sido todos los cortes anteriores).

Creo que a esta altura usted comienza a sospechar lo que sucede: cada vez que corta A, queda un número *par* de bloques. Cuando termina de cortar B, hay un número *impar* de bloques, y esto sucede *independientemente de dónde haya cortado cada uno*.

Como *en total* hay 35 bloques, que es un número impar, eso significa que para haber llegado a ese número el último en cortar *¡tuvo que haber sido B!*

Es decir, hagan lo que hagan, sigan la estrategia que sigan, corten por donde corten, ganará siempre el que corta *segundo* (a quien en este caso llamé B).

Moraleja

Este problema es evidentemente muy sencillo, pero al exhibir situaciones de este tipo quiero invitarla/lo a pensar que muchas veces en la vida cotidiana hay que tomar decisiones que involucran *compartir* o *distribuir*. No siempre hay una *estrategia ganadora*, pero quizá quien se quede con la parte *mayor* sea quien elija o bien primero o bien segundo. Por naturaleza, uno cae en la tentación de ser siempre el primero en *decidir o elegir*, como si esa posición nos pusiera en una situación de privilegio. Este ejemplo muestra que eso no es necesariamente cierto: aquí conviene ser el segundo y no el primero. Y aunque parezca muy ingenuo, tomar decisiones de este tipo o pensar estrategias para hacerlo también es... *hacer matemática*.

Frases verdaderas y falsas en un pergamino

La idea que tengo al proponer este problema es motivar su capacidad lógica. No hace falta usar *ninguna otra cosa que no sea su capacidad para reflexionar*.

Por eso, el desafío resulta tan interesante. Es curioso, porque para deducir la respuesta no es necesario tener *ningún* conocimiento previo. Todo lo que hace falta es *poder hilvanar* razonamientos.

Acá va.

Le voy a agregar un poco de 'historia' para hacer una presentación un poco más pomposa. Suponga que en algún lugar perdido en una zona desértica, usted encuentra un pergamino. Lo desenrolla y se encuentra con cuatro frases.

Están numeradas. Después de sortear algunas dificultades porque aparecen algo 'borroneadas', usted alcanza a descubrir que las cuatro frases son las siguientes:

1) Todas las frases de este pergamino son verdaderas.
2) Todas las frases de este pergamino son falsas.
3) Exactamente una frase de este pergamino es verdadera.
4) Exactamente una frase de este pergamino es falsa.

Luego de leerlas, es natural proponerse pensar: ¿cuáles de estas frases son verdaderas y cuáles son falsas? ¿Se podrá determinar con los datos que uno tiene? Ahora le toca a usted.

Idea para encontrar la respuesta

En principio, lo primero que quiero proponerle es que dedique un rato, aunque sea breve, para pensar las distintas posibilidades. Es decir, fíjese qué se le ocurre hacer primero y después —en todo caso— avanzamos juntos.

Dicho esto, le propongo mirar las frases 3 y 4. La frase que lleva el número *tres* dice que *exactamente una* de las frases es verdadera, y la frase que lleva el número *cuatro* dice que *exactamente una* de las frases es falsa. ¿Qué se puede concluir de esto? ¿Podrán ser las frases 3 y 4 verdaderas simultáneamente?

No. ¿Por qué? Si las frases 3 y 4 fueran ciertas al mismo tiempo, eso querría decir que exactamente una de las frases es cierta y exactamente una de las frases es falsa. Bien, pero en total hay cuatro frases. Si una es cierta y una es falsa... ¿qué debería pasar con las otras dos? Quedarían indeterminadas en su valor de verdad (o sea, no se sabría si son verdaderas o falsas) y eso no es posible. Luego, la conclusión es que las frases 3 y 4 *no pueden ser ciertas al mismo tiempo*. Una de las dos (o las dos) tienen que ser falsas.

El hecho de que *al menos una de las frases* ***tiene*** *que ser falsa* implica que la frase 1 no puede ser cierta (ya que afirma que *todas* son ciertas). Luego, la frase 1 es falsa también.

Ahora sígame en este razonamiento que creo que es el más *sutil e interesante de todos*. Lea nuevamente la frase 2. Dice que *todas las frases son falsas*. Si esta frase fuera verdadera, eso querría decir que —en particular— la frase 2 es ella misma falsa. Pero si la frase 2 es falsa, entonces *no es cierto que* ***todas*** las frases sean falsas. O sea, *alguna* de las frases tiene que ser verdadera. Luego, la frase dos *no puede ser cierta:* ***tiene*** que ser falsa.

Hasta acá hemos concluido entonces que:

a) las frases 1 y 2 son falsas;
b) no pueden ser ciertas las frases 3 y 4 simultáneamente.

Pero como las frases 1 y 2 son falsas, entonces la frase 4 es falsa también (ya que ella afirma que hay *exactamente una* que es falsa). Luego, las frases 1, 2 y 4 son falsas.

Y ahora, estamos a punto de llegar a la conclusión final: ¿qué pasa con la frase 3?

Si la frase 3 fuera falsa, entonces *todas las frases serían falsas*, en cuyo caso la frase 2 sería cierta (y sabemos que es falsa). Luego, ¡la frase 3 ***tiene*** que ser verdadera!

Y eso acaba de resolver el problema. Luego de este análisis, sabemos que de las cuatro frases, hay *una sola que es verdadera*: la tercera. Las restantes son todas falsas.

Como usted advierte, *no hizo falta tener ningún tipo de conocimiento previo*. Sólo se trató de hacer un análisis exhaustivo de *todas las posibilidades*, y con eso fue suficiente para deducir la respuesta.

La vida está llena de problemas de este tipo en los que uno debe plantearse diferentes escenarios y luego determinar cuáles son posibles y cuáles no. La matemática llega en auxilio para dar un soporte lógico/técnico que muchas veces permite decidir qué es lo que está bien y qué es lo que está mal.

Cajas y bolitas

Esta situación es totalmente ideal. No hay forma de que ni usted, ni yo, ni nadie se tropiece con una situación como la que voy a plantear. Sin embargo, el atractivo que tiene es que ofrece una oportunidad para pensar. O mejor dicho, es una oportunidad de *entrenarse* para pensar, algo así como las prácticas que tienen que atravesar los profesionales de diferentes disciplinas cuando quieren mejorar.

En algún sentido, es como si uno se enfrentara con una situación que lo prepara para algo inesperado, en donde pareciera que no hay suficientes datos pero los hay. Suficiente prolegómeno. Acá va.

Arriba de una mesa hay tres pequeñas cajitas con etiquetas que las identifican: A, B y C.

Por otro lado, hay tres bolitas de tres colores diferentes: Roja (R), Marrón (M) y Violeta (V). Dentro de cada cajita hay una única bolita. Voy a proponerle que elabore una estrategia para determinar de qué color es cada bolita dentro de cada caja. El único dato que le dan es el siguiente: solamente UNA de estas tres frases es cierta:

a) La caja A contiene la bolita de color Rojo (R).
b) La caja B no contiene la bolita de color Rojo (R). (*)
c) La caja C no contiene a la bolita Violeta (V).

Usted no sabe cuál de estas tres fases es la correcta. ¿Puede, sin embargo, determinar el color de cada una de las bolitas que está en cada caja?[82]

Respuesta

Hay muchas formas de pensar este problema. Quiero presentar acá dos posibles maneras de abordarlo, pero confíe más en lo que se le ocurrió a usted que en las que pueda proponer yo, aunque más no sea porque son *suyas*.

Acá van.

Primera solución

¿Cuáles son las *seis* posibles distribuciones de las bolitas en las cajas? A continuación va una lista con ellas.

1. R	V	M
2. R	M	V
3. M	R	V
4. M	V	R
5. V	M	R
6. V	R	M

82. Por supuesto que uno siempre puede abrir cada caja y fijarse qué color de bolita hay adentro, pero la idea es poder decidir *sin* abrirlas.

Ésas son todas las posibilidades, no hay más. Ahora, analicemos una por una y veamos qué sucede cuando las confrontamos con las tres frases que aparecen en (*). Si el problema está bien planteado, o sea, si es posible decidir cuál es la distribución de las bolitas usando el hecho que *solamente una* de las tres frases es *verdadera*, entonces, inspeccionemos juntos cada integrante de la lista que escribí más arriba.

Fila 1:

R, V, M. Fíjese que dice que la bolita Roja (R) está en la caja A, lo cual hace verdadera la frase (a). Como la bolita V está en la caja B, entonces esto hace verdadera la frase (b) también. Y no hace falta seguir, porque si ésa es la distribución de las bolitas, las dos primeras frases son verdaderas, lo que contradice la hipótesis del problema que estipulaba que *solamente una* de las tres frases que figuran en (*) es verdadera. Moraleja: "La fila 1 no puede ser la que describa la distribución de las bolitas".

Fila 2:

R, M, V. En este caso, como R está en la caja A, la frase (a) es verdadera. Pero como M está en la caja B, entonces la frase (b) también es verdadera (ya que M no es la bolita roja); por lo tanto, paro acá. Moraleja: "La fila 2 no es la correcta".

Fila 3:

M, R, V. Compruébelo junto conmigo: esta distribución hace *falsas* las tres frases: (a), (b) y (c). ¿Por qué? Como la primera caja contiene a M, entonces es falso lo que dice (a). Como la segunda caja *contiene* a R, entonces la frase (b) es falsa. Y como la bolita V está en la tercera caja, esto contradice la frase (c). Luego, las tres frases son falsas. Moraleja: "La fila 3 tampoco es la correcta".

Fila 4:

M, V, R. En este caso, las frases (b) y (c) son verdaderas. ¿Por qué? La frase (b) dice que B no contiene a R, lo que es cierto, y la frase (c) dice que C no contiene a V, lo cual también es cierto. Luego, dos de las tres frases son verdaderas. Moraleja: "La fila 4 no es la correcta distribución de las bolitas en las cajas".

Fila 5:

V, M, R. En este caso, también las frases (b) y (c) son verdaderas, ya que (b) dice que B no contiene a R, lo cual es cierto porque acá M está en la caja B, y por otro lado como R está en la caja C, esto transforma en verdadera a la frase (c), que dice que C no contiene a V. Moraleja: "La fila 5 tampoco ofrece la correcta distribución de las bolitas".

Por último, analicemos la fila 6: V, R, M. Aquí la frase (a) es falsa, porque dice que A contiene a R y esto no sucede. Por otro lado, la frase (b) *también* es falsa, porque la caja B contiene a R cuando de acuerdo con (b) *no debería*. Y lo único que queda por ver, es la *veracidad o no* de la frase (c). En este caso, como (c) dice que la caja C *no contiene a* V, y esto es verdadero, entonces se concluye que (c) es verdadera.

Resumen: de las seis posibles distribuciones, la última, la que ofrece la fila 6, es la que se puede descubrir sabiendo que *solamente una de las tres frases que figuran en (*) es verdadera*. Por lo tanto, ésa es la distribución de las bolitas:

Caja A: bolita V
Caja B: bolita R
Caja C: bolita M

Segunda solución

Ahora voy a tomar las tres frases que figuran en (*) y voy suponer qué pasaría si cada una de ellas fuera verdadera y las otras dos falsas.

Primer caso: la frase (a) es la verdadera.

En este caso, tanto (b) como (c) tienen que ser falsas.

Pero si (a) es verdadera, entonces A = R[83]

Como al mismo tiempo (b) tiene que ser falsa, entonces esto obligaría a que B = R, lo cual constituye una contradicción: no puede ser que A y B contengan a R al mismo tiempo.

Esto permite deducir entonces que la frase (a) ES falsa. Es decir, la caja A *no contiene a la bolita R*. Puede contener a V o a M, pero no a R.

Recordemos esto:

$$\boxed{\mathbf{A = V \text{ o } A = M}} \quad (**)$$

Segundo caso: la frase (b) es la verdadera.

Eso quiere decir que la caja B *no* contiene a R. Por lo tanto, pueden pasar *una* de estas dos cosas: B = M o B = V.

Pero como (c) tiene que ser falsa, entonces C *tiene* que contener a la bolita V. O sea, C = V.

Pero entonces, como a B le quedaban dos alternativas, o bien B = M o bien B = V, y ahora sabríamos que C = V, entonces B *tiene* que contener a M. Es decir, tendríamos:

$$B = M \text{ y } C = V$$

83. A = R indica que la caja A contiene a la bolita roja (R).

Si así fuera, la *única* alternativa que quedaría es que A = R... ¡pero esto no puede pasar, porque sabemos (por (**)) que A *no puede ser R*!

¿Cuál es la conclusión? La frase (b) no puede ser la verdadera.

Al llegar a este punto, hemos deducido que (a) es falsa y que (b) es falsa. La *única* alternativa (que vamos a analizar en el siguiente caso) es que (c) sea verdadera.

Tercer caso: la frase (c) es la verdadera.

Si (c) es verdadera, entonces C no contiene a V. Esto significa que

C = R o bien C = M (***)

Por otro lado, como (b) tiene que ser falsa, entonces B *tiene* que contener a R. Es decir B = R. Luego, juntando este dato con lo que surge de (***), se deduce que

B = R y C = M

En consecuencia, la única posibilidad que resta es que A = V... ¡ésta es justamente la solución!

A = V, B = R, C = M

Esta distribución de las tres bolitas es la *única* que cumple con la condición de que una de las tres frases de (*) sea verdadera (la frase (c)) y las otras dos ((a) y (b)) sean falsas.

Como escribí anteriormente, ninguna de estas dos formas de abordar el problema es *la mejor, ni la más elegante, ni siquiera la más económica (en longitud)*. Quizás a usted se le ocurrió algo mucho más breve y expeditivo. Ojalá que ese haya sido el caso porque la satisfacción que yo siento cuando descubro cómo resolver un problema nunca surge de leer lo que hizo otro. No quiere decir que muchísimas veces no me haya quedado otra alternativa, pero prefiero aprender a coexistir con la frustración durante un tiempo y pagar ese precio si al final logro que se me ocurra a mí.

Ese *instante* en donde *es uno* quien encuentra el camino que lleva a la solución, ese *momento* en donde uno pasa de 'no entender' a 'sí entender', es impagable, y es por eso que no me canso de escribirlo y de compartirlo para invitar a quien tiene un problema de cualquier tipo a que no *se dé por vencido en el intento*... Hágalo hasta donde pueda. La recompensa intelectual y lo que aporta a la autoestima merecen su dedicación y esfuerzo.

La combinación que abría la caja de seguridad

Una anécdota. El otro día tenía que comprar una caja de seguridad pequeña para guardar algunos documentos. Fui a un negocio en el centro y en la vidriera vi una que me parecía adecuada. Como el precio me parecía razonable, entré y la compré. Estaba apurado, así que les pedí que me dieran una diferente de la que estaba expuesta en la vidriera y, sin abrir la caja de cartón en la que venía empacada, la pagué y me la llevé a mi casa.

Cuando llegué, abrí el paquete y me descorazonó advertir que la caja de seguridad estaba trabada y, por supuesto, yo no sabía la combinación. Me fastidié conmigo mismo por no haber tomado la precaución de verificar que todo estuviera en orden, pero de todas formas me pareció muy llamativo que la caja viniera con una combinación salida desde la fábrica. Busqué el prospecto y leí lo siguiente que quiero compartir con usted:

"Esta caja viene cerrada de fábrica y como usted advierte si mira el frente, verá que hay lugar para cuatro dígitos.

Justamente, la combinación consiste de *cuatro dígitos distintos: A, B, C y D*. Nos interesa entonces proponerle al futuro dueño que siga estas instrucciones que creemos que son creativas para que deduzca cuál es la clave que permite abrirla.

La combinación la vamos a llamar ABCD.

a) Los cuatro dígitos A, B, C y D son *todos distintos*.
b) A, B, C y D son *dígitos* cualesquiera entre 0 y 9.
c) Si usted suma el primero y el tercero (o sea, A y C) el resultado que obtiene es el número 10. O sea: A + C = 10.
d) El segundo dígito, B, se obtiene restando *cuatro* al primer dígito (o sea, a A). Es decir: B = A – 4.
e) El tercer dígito, C, es un número primo[84].
f) El último dígito, D, se obtiene restando *tres* al primer dígito. Es decir D = A – 3.

Si sigue estas instrucciones, usted estará en condiciones de detectar cuál es la combinación que abre la caja".

Como no me quedaba más remedio porque el negocio en donde la había comprado me quedaba muy lejos y además seguramente ya estaría cerrado, me propuse ver si podía encontrar la combinación ABCD que me permitiera abrirla. Y lo logré. ¿Quiere intentar usted?

En un instante advertirá que la solución *pasa* por encontrar cuáles son los dígitos candidatos para ocupar el lugar A.

Usando la condición (d), forzosamente A tiene que ser mayor o igual que 4. Es que B *no puede ser un número negativo*. Para que eso no suceda, las posibilidades para A son:

---

84. Le recuerdo que un número primo (positivo) es un número *entero* ***distinto de uno*** que solamente sea divisible por él mismo y justamente por el número *uno*. Por ejemplo, el número 2 es primo, porque sólo es divisible por 1 y por 2. El 3 es primero también, porque es divisible por 1 y por 3. En cambio el 4 no es primo, porque además de ser divisible por 1 y por 4, también es divisible por 2. Me interesa enfatizar que el número *uno* ¡no es primo!

{4, 5, 6, 7, 8 o 9}

Luego, si elijo un valor de A entre esos *seis* posibles, se obtienen las siguientes cuaternas:

1. (4, 0, 6, 1)
2. (5, 1, 5, 2)
3. (6, 2, 4, 3)
4. (7, 3, 3, 4)
5. (8, 4, 2, 5)
6. (9, 5, 1, 6)

La segunda y la cuarta no pueden ser solución porque tienen dos dígitos repetidos.

La primera y la tercera tienen como tercer dígito a los números 6 y 4 que no son primos.

La sexta y última tiene como tercer dígito al número 1 que tampoco es primo.

Moraleja: la *única* que sirve es la quinta:

(8, 4, 2, 5)

que es la solución del problema.

Test para aspirar a un puesto gerencial

Ahora quiero plantear un problema que requiere un poco de concentración. La idea es tratar de decidir si con los datos que yo le voy a entregar, usted está en condiciones de resolverlo. Como nunca me interesó ni me interesa 'poner el pie' o 'tender ningún tipo de trampa', me apuro en dar *esa* respuesta: sí, el problema *tiene solución* y los *datos* que aparecen a continuación *son suficientes*.

Éste es el planteo. Suponga que una empresa está tratando de contratar gente con diferentes capacidades para sus áreas gerenciales y necesita establecer un orden entre los postulantes. Para decidirlo, escriben un test con solamente dos preguntas. Luego de revisar las respuestas de todos los candidatos, se obtuvieron los siguientes cuatro datos:

1) El 70% de los postulantes contestó correctamente la pregunta 1.
2) El 60% de los aspirantes contestó correctamente la pregunta 2.
3) Todos los que participaron en el test contestaron *al menos* ***una*** pregunta correctamente.
4) Hubo exactamente *nueve* aspirantes que contestaron las dos preguntas correctamente.

Dicho todo esto, ¿se puede determinar cuántas personas participaron del test?

Antes de leer la solución, le propongo que le dedique un tiempo a pensar las distintas posibilidades. Dese a usted mismo la oportunidad de analizar qué pasó. No se *rinda* rápido.

Respuesta

Sígame con este argumento: como el 70% de los postulantes contestó correctamente la pregunta 1, el restante 30% no lo pudo hacer. Pero como *todos* contestaron bien al menos *una* de las preguntas, eso significa que este 30% **tiene** que haber contestado correctamente la pregunta 2.

Por otro lado, también se sabe que el 60% contestó correctamente la pregunta 2, pero como ya sabemos que hay un 30% que *solamente* contestó bien la pregunta 2, entonces se deduce que hay un 30% de los postulantes que tuvo que haber contestado bien la pregunta 2 pero *también* la 1. O sea, un 30% contestó las dos preguntas bien.

Pero si se fija en lo que dice la afirmación (4), verá que *solamente nueve* de los aspirantes contestó correctamente las dos preguntas. Es decir, que si juntamos ahora las dos partes de la información se deduce lo siguiente: el 30% del total de aspirantes es igual a *nueve* personas.

A partir de acá, todo debería ser más sencillo: ¿no tiene ganas de intentar ahora en soledad? Si el 30% de los postulantes es igual a *nueve*, el 10% de los candidatos (dividiendo por *tres*) es igual a *tres*. Pero si el 10% = 3, entonces el 100% = 30. ¿Me siguió en esto último?

La respuesta al problema es que la cantidad de postulantes fue treinta.

No sé si parecía posible con los datos originales, pero muchas veces suele pasar que uno se tropieza con una dificultad en donde sospecha que los datos que tiene son insuficientes, y es siempre mucho más cómodo *abandonar* allí y no darse una oportunidad de pensar que quizá no, quizá se pueden hacer conexiones o elaborar razonamientos que uno no tiene en cuenta de entrada[85].

Ésa fue la idea de este problema, que aunque probablemente sea sencillo, creo que es iluminador.

---

85. Un aporte excelente de Carlos D'Andrea sobre cómo resolver el problema. Para Carlos, uno puede plantear el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Llame x = número de personas que contestó solamente la pregunta 1. Llame y = número de personas que contestó solamente la pregunta 2. Llame z = número de personas que contestó 1 y 2 simultáneamente. Se tienen entonces estas tres ecuaciones: 1) $z = 9$; 2) $(x + z)/(x + y + z) = 0{,}7$; 3) $(y + z)/(x + y + z) = 0{,}6$. Si uno resuelve el sistema quedan los siguientes valores: x = 12, y = 9, z = 9. ¿No es preciosa esta forma de encontrar la solución? A mí me pareció espectacular.

Dos sabios en la torre[86]

Quiero presentar acá un problema que pareciera no tener solución; al menos, ésa es la primera impresión. A medida que uno le dedica un rato a pensar, empieza a sospechar que podría haber alguna hendija por dónde meterse y explorar. Puede que pase bastante tiempo, pero eso es (o debería ser) irrelevante. El objetivo no es otro que *entrenar* nuestra capacidad lógica para elaborar estrategias. Créame que la satisfacción que produce compararse a uno mismo desde el momento en el que toma el primer contacto con la situación hasta que advierte qué es lo que hay que hacer para resolverlo es incomparable. De hecho, es una buena forma de conocer nuestras propias capacidades que permanecen dormidas, latentes, escondidas... elija el adjetivo que prefiera. Por eso, más que la solución propiamente dicha, lo que vale la pena es el trayecto, la ruta y el descubrimiento que implica cada paso. Acá va.

La historia es obviamente ficticia y está narrada en internet y en textos antiguos con todo el 'sabor' que supuestamente tenían

86. Este problema precioso se lo debo a Pablo Coll, doctor en matemática y guionista/proveedor de contenidos de *Alterados por Pi*, el programa que se emite por Canal Encuentro dedicado a la difusión de la matemática. El crédito le corresponde todo a él.

los cuentos de varios siglos atrás. Voy a tratar de conservar el texto *original:*

> *Dos sabios de un pueblo fueron encarcelados por un rey malvado. Éste, para comprobar la inteligencia de los sabios, los encerró en celdas separadas de una torre: una miraba hacia el Este y la otra hacia el Oeste, de modo que no pudieran comunicarse entre sí. Entre ambos, podían ver todas las ciudades que componían el reino, pero ninguna ciudad era visible a la vez por los dos. El rey les dijo que las ciudades del reino eran* ***cinco*** *u* ***ocho****, y que ambos serían liberados de inmediato tras que alguno de ellos le comunicase al carcelero, que cada mañana les llevaba la comida, cuántas ciudades integraban el reino. Además, el rey les dijo que tenían una semana o acabarían en la horca. Pero a la tercera mañana, los dos sabios fueron liberados luego que uno de ellos averiguara, a través de un procedimiento lógico, de cuántas ciudades se componía el reino. ¿Qué proceso lógico los llevó a resolver su problema? ¿Cuántas ciudades componen el reino?*

Es decir, el problema consiste en deducir —usando solamente recursos lógicos— cómo hizo uno de los sabios para descubrir, a la tercera mañana de estar encerrados, la cantidad de ciudades que componían el reino. De antemano, los sabios conocían que había dos posibilidades: o bien cinco o bien ocho. Ahora le toca a usted.

Solución

No sé cuánto tiempo le dedicó usted a pensar el problema. Sería una lástima que lea siquiera la primera parte de la solución sin ofrecerse una oportunidad. Es sólo una sugerencia.

Comenzaré con una pregunta y verá entonces cómo empieza a vislumbrarse un camino por donde andar. Supongamos que usted fuera uno de los sabios, y que ni bien llega a su lugar en *su* torre, viera que hay *ocho* ciudades. Como el rey les dijo a los dos que había cinco u ocho ciudades, si ve *ocho*, es porque las está viendo a todas. Claramente, usted podría contestar la pregunta del rey de inmediato. Cuando el carcelero llegue a la mañana siguiente, usted estaría en condiciones de dar la respuesta.

En consecuencia, como sabe que a la primera mañana ninguno de los dos contestó, *ninguno de los dos vio ocho ciudades*. Pero más aún (como me imagino que usted debe estar pensando): no sólo ninguno vio ocho ciudades, sino que ninguno pudo haber visto ni siete ni seis. Si no, ya sabría que en total hay ocho (ya que no podría haber cinco). Luego, en función de que ninguno contestó la primera mañana, podemos eliminar algunas combinaciones: (8,0), (0,8), (7,1), (1,7), (2,6) y (6,2). Pongo entre paréntesis las ciudades que ve cada uno. Por ejemplo (1,7) significa que el que mira hacia el Oeste ve una ciudad y el que mira hacia el Este ve siete.

Ahora estamos en condiciones de escribir *todas* las posibilidades que quedan:

(3,5), (4,4), (5,3) si fueran 8 ciudades y

(0,5), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (5,0), si fueran 5 ciudades.

Avancemos. Supongamos que uno *no viera ninguna ciudad*. Eso significa que el otro está viendo cinco (ya hemos eliminado luego del primer día las posibilidades (8,0) y (0,8)). Luego, el que no ve ninguna ciudad podría contestar que en total hay cinco ciudades y se termina el problema. Pero como nadie dijo nada luego del segundo día, podemos eliminar los pares (5,0) y (0,5).

¿Y si alguno de los sabios viera *una* o *dos* ciudades? Como ya eliminamos (1,7), (7,1), (2,6) y (6,2), si alguno de ellos viera *una* o *dos* ciudades, el otro debería estar viendo o bien cuatro o bien tres ciudades (porque estaríamos en alguno de estos casos: (2,3) o (3,2) o bien (4,1) o (1,4)) y sabría que en total hay cinco ciudades. Luego, si ninguno dijo nada después del segundo día, es porque podemos eliminar también estas posibilidades:

(0,5), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (5,0)

En resumen, luego del segundo día, si ninguno dijo nada, queda claro que hay en total *ocho* ciudades. Ya no importa saber cómo es la distribución, pero en todo caso las tres alternativas son las siguientes:

(3,5), (4,4), (5,3)

Y con esto queda resuelto el problema.

¿No es notable que habiendo partido de algo que parecía *imposible* llegáramos hasta acá? Como ninguno de los sabios pudo contestar ni al primero ni al segundo día, eso fuerza la situación hasta llevarla a que *no puede haber cinco ciudades, sino ocho*. Y eso era todo lo que había que deducir.

No sé qué le pasó a usted, pero créame que a mí me fascina la capacidad que tenemos los humanos de encontrar un hecho *escondido*, *oculto* y que parecía inalcanzable, usando simplemente la herramienta más poderosa que tenemos: el cerebro.

Matadores y pacifistas

Lawrence Potter es un matemático inglés que trabajó varios años en Centroamérica, en Rumania y en Ruanda, enseñando no precisamente en las mejores condiciones, pero con un entusiasmo extraordinario. Escribió varios libros de divulgación a pesar de ser aún muy joven (30 años en 2013), pero seguramente el más famoso es *Mathematics Minus Fear* (Matemáticas Menos Miedo). De ese libro extraje una historia que me parece atractiva para poder compartir acá. Dice así.

En un pueblo muy muy pequeño hay 101 personas denominadas 'matadores' (M) y otras 101 personas denominadas 'pacifistas' (P). Cuando un P se encuentra con otro P en la calle, no pasa nada. Siguen caminando como si no se hubieran visto. Si un M se encuentra con un P, el M 'mata' al P. Y finalmente, si se encuentran dos M, mueren ambos, se matan mutuamente.
Todas las personas del pueblo (las 202) van caminando por las calles sin parar. Los encuentros se suceden únicamente de a dos, de a pares. Es decir, suponemos que idealmente cada vez que una persona se encuentra con otra, nunca hay otras alrededor. Los encuentros son —además— totalmente aleatorios.
Una mañana, con las reglas establecidas anteriormente, ***todos*** *(los 202 habitantes) del pueblo salen a caminar. Y no dejarán de caminar*

independientemente de lo que suceda con los que vayan perdiendo la vida en el camino.
Justo en ese momento en donde todos salen a la calle y empiezan a recorrer el pueblo, a usted (sí, a usted) le piden que se incorpore a la caminata junto con ellos y cumpla las mismas reglas como si nada sucediera a su alrededor. Eso sí: le dan la chance de que elija ser o bien un M o bien un P. ¿Qué es lo que más le convendría ser: un 'matador' (M) o un 'pacifista' (P)? ¿Cuál de las dos chances le da una mayor probabilidad de sobrevida?

Más allá de que siempre me provoca cierto 'escozor' escribir sobre 'matadores', muertes, etc., espero que quede claro que se trata de un juego que sólo involucra usar un poco de lógica. Dicho esto, ubíquese en el lugar (desafortunado, claro está) y piense a cuál de los dos grupos le convendría más pertenecer: ¿P o M?

Por otro lado, ¿se podrá elaborar alguna estrategia que permita incrementar las chances de sobrevida?

Ahora le toca a usted.

Solución

Como las personas tienen que seguir caminando indefinidamente, las muertes van a continuar hasta que no se pueda seguir más. Por ejemplo, si los sobrevivientes fueran todos pacifistas, allí mismo terminarían las matanzas. Ahora bien, ¿qué posibilidades hay de que eso suceda?

En principio, cuando dos P se encuentran, no sucede nada significativo. Siguen adelante como si fueran transparentes. Pero inexorablemente, como la caminata de cada persona es totalmente aleatoria, en algún momento *todo* pacifista se terminará encontrando con algún M. Sin embargo, usted podría pensar: "No, eso no tendría por qué ser cierto. Podría suceder que todos los M se destruyeran entre sí, y que yo, si fuera un P, podría tener la suerte de no encontrarme nunca con ninguno de los M". Pero, ¿será posible esto?

Fíjese. Los M, además de matar a los P, se matan entre ellos. O sea que cuando muere un M, también tuvo que haber muerto otro M. Es decir, los M mueren de a dos. Los P no. Ellos van muriendo de a uno, pero los M mueren de a dos.

Y acá es donde la matemática tiene algo para decir: como en principio hay 101 personas identificadas como M, y todos ellos van a ir muriendo de a pares, llegará un momento en que quedará *un solo M vivo*. ¿Por qué? Como 101 es un número impar, restando de a dos, en algún momento se llegará a la situación en donde quedará un solo M que todavía no murió (y eso sucedió porque cada vez que se encontró con gente en la calle tuvieron que haber sido todos P).

Como usted se da cuenta, los P van a ir muriendo todos también, aunque más no sea porque en algún momento de sus caminatas inexorablemente se encontrarán con un M y morirán en el instante. Es decir que si usted se incorpora al contingente de personas que habitan el pueblo, si es un P, morirá inexorablemente: su probabilidad de sobrevida ¡es nula!

¿Qué posibilidades de sobrevida hay si usted eligiera ser un M en el momento de empezar a caminar?

Si usted fuera un M iría matando a todos los P con los que se encuentra en el camino. Si tuvo la suerte de *nunca* encontrarse con ningún M, entonces quedará vivo hasta el final, pero allí sí, *inexorablemente* se tropezará en algún momento con el *otro M* que tuvo que haber quedado vivo (porque los M se mueren de a dos). Y allí sí, morirán los dos: él y también usted.

Moraleja: no importa lo que usted elija ser al principio: sea un P o un M, sus posibilidades de sobrevida no existen.

El viaje del caballo

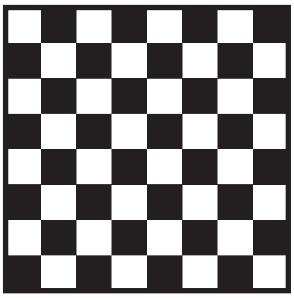
El siguiente problema involucra un tablero de ajedrez y un caballo. Pero espere: no hace falta saber 'casi nada' de ajedrez, no se deje intimidar. Es una propuesta muy bonita para tratar de elaborar una estrategia y, en función de lo que usted piense, dar una respuesta positiva o negativa. Dese una chance antes de decir "esto no es para mí". Lo único que hace falta es saber cómo se 'mueve' un caballo en el ajedrez. Si nunca prestó atención, un caballo puede hacer los siguientes movimientos:

a) dos casillas hacia adelante y una hacia la derecha
b) dos casillas hacia adelante y una hacia la izquierda
c) dos casillas hacia atrás y una hacia la derecha
d) dos casillas hacia atrás y una hacia la izquierda

Por supuesto, se trata de que el caballo no se 'salga' del tablero, o sea, si en alguno de esos movimientos 'potenciales' el caballo se 'cae', entonces, ese movimiento no está permitido. Sé que es una obviedad, pero me interesa puntualizarlo. Hay más: faltan otros cuatro movimientos.

a) una casilla hacia adelante y *dos* hacia la derecha
b) una casilla hacia adelante y *dos* hacia la izquierda
c) una casilla hacia atrás y *dos* hacia la derecha
d) una casilla hacia atrás y *dos* hacia la izquierda

Como se ve, es todo muy *simétrico*. Por último, antes de plantear el problema, quiero dibujar a continuación un tablero de ajedrez. Se trata de una grilla de 8 × 8 casillas (o sea, 64 cuadrados).



La idea ahora es tratar de contestar esta pregunta: suponga que usted tiene un caballo puesto en este tablero en el extremo inferior izquierdo. ¿Se puede llevar el caballo desde este lugar hasta el extremo superior derecho pasando por *cada casilla del tablero exactamente una sola vez*?

Antes de avanzar: se trata de llegar con movimientos típicos de un caballo de ajedrez —como los que describí anteriormente— desde la casilla que ocupa el extremo inferior izquierdo hasta la que está en el extremo superior derecho, pasando POR TODAS las casillas UNA SOLA VEZ.

Como se ve, no es un problema complicado. El enunciado es muy sencillo de entender (creo). Lo único que espero de usted es que no *renuncie* a pensar el problema muy rápido, dese una chance. Todo lo que hay que hacer es dedicarle un rato y tropezarse con las preguntas que le irán surgiendo a medida que lo vaya pensando.

¿Se podrá? Digo, ¿se podrá elaborar un camino para que el caballo pueda llegar de una punta a la otra del tablero pasando por *todos* los casilleros una sola vez?

Quiero dejar de escribir para que usted avance en soledad. Nos reencontramos luego.

Respuesta

Antes de avanzar, quiero proponerle que se fije una vez más en el tablero. Olvídese del caballo por ahora, mire el color de las casillas. La inferior izquierda es de color negro. La superior derecha *también* es de color negro. ¿Por qué quiero hacerla/lo pensar en esto? Porque no quiero escribir la solución tan rápido, sino que prefiero elaborar algo junto a usted. Si no tiene ganas y/o paciencia, lea el último párrafo de este artículo y allí está todo explicado en forma resumida, pero créame que vale la pena que me acepte la propuesta.

Algunas preguntas:

a) cuando el caballo hace un movimiento, de una casilla hacia otra, ¿qué pasa con el color de las casillas inicial y final?;
b) ¿sucede siempre? Es decir, sin importar si la casilla de inicio es blanca o negra, ¿sucede siempre lo que usted descubrió recién?

Con este dato que ahora tenemos[87], fíjese en el color de la casilla inicial del problema y en el del casillero final. Como usted advierte, son ambas de color negro. Recuerde este dato.

Otras reflexiones más. Si la idea es tratar de ver si es posible elaborar un camino desde la casilla inferior izquierda hasta la superior derecha pasando *solamente una vez* por cada casilla, ¿cuántas movidas tiene permitido hacer el caballo? Es decir, como en total el tablero tiene 64 casillas, y el caballo ya está parado en una de ellas (la inferior izquierda), cada movimiento que haga tiene que llevarlo a un casillero distinto. En vista de que no puede repetir casilleros, ¿cuántos movimientos terminará dando el caballo? Le propongo que piense usted la respuesta.

Como usted descubre, el caballo tendrá que hacer entonces *exactamente* 63 movidas. Cada movida debería llevarlo a una casilla distinta.

Ahora bien: cuando el caballo hace la primera movida (la movida *uno*) pasa de una casilla de color negro a una de color blanco (no importa cuál sea la movida). Y cuando haga la movida *dos*, pasará de una blanca a una negra otra vez. Y cuando haga la movida *tres*, pasará a una blanca. Y cuando haga la *cuatro*, pasará a una negra. Y así siguiendo: cada vez que hace una movida *par*, termina en una casilla de color *negro*, y cuando hace una movida *impar*, termina en una casilla de color *blanco*. Este dato *también* es importante.

¿Cómo hacer ahora para usar todo lo que averiguamos? ¿Recuerda cuántas movidas tenía que hacer el caballo si quería

87. El color de la casilla siempre cambia: si el caballo empieza en una casilla de color blanca, cualquiera sea el movimiento —permitido— que haga, termina en una negra. Y al revés: si empieza en una negra, termina en una blanca.

cumplir con el objetivo? Eran 63. O sea, un número *impar* de movidas. Pero como acabamos de ver recién, cada vez que hace una movida *impar*, termina en una casilla de color *blanco*. ¿Y de qué color es la casilla que está en el extremo derecho? De color negro. Por lo tanto, ¿cuál es la conclusión?

La conclusión es que el camino que uno quisiera diseñar para que el caballo pueda unir el extremo inferior izquierdo con el superior derecho *¡no puede existir!* Inexorablemente tendrá que utilizar un número *par* de movimientos para llegar a una casilla de color negro. Pero, si hace 62, no llegará a cubrir todo el tablero, y si hace 64 movimientos estará forzado a repetir alguna casilla.

La moraleja entonces es que el camino que uno quería elaborar no existe.

La matemática involucrada es muy sencilla. Todo lo que hay que hacer es observar lo que sucede con los movimientos de orden par o impar, y fijarse el color de la casilla en la que termina esa movida. Lo extraordinario es que, con este análisis, uno está seguro de que no es que usted y/o yo no pudimos encontrar el camino y alguna otra persona *sí*. No. ¡El camino no existe! O mejor dicho, ¡no puede existir!

Y de eso se trata muchas veces. En lugar de estar penando y golpeándose la cabeza pensando en que es uno el que no puede encontrar la solución a un problema, un análisis de este tipo permite concluir que no depende ni de usted ni de mí: nadie va a poder. Bonito, ¿no? Ah, y antes de que me olvide: esto *también* es hacer matemática. O debería *mejorar* la frase: esto no es *también* hacer matemática, esto *¡decididamente* ***ES*** *hacer matemática!*

¿Culpables o inocentes?

¿Cuántas ganas tiene de 'hacer' de detective... o de juez? Le voy a presentar un problema para que pueda pensarlo sin apuros. No es complicado ni requiere de ningún conocimiento especial. Se trata de usar nada más que un ejercicio de lógica pura. Acá va.

Supongamos que hay cuatro acusados de haber intervenido en un asalto. Los voy a llamar A, B, C y D.

La policía y el fiscal le presentan los siguientes datos que fueron acumulando a lo largo de una semana. Por ahora, están todos detenidos, pero usted es —digamos— el juez de la causa y está obligado a tomar una decisión. Mucho más tiempo no los puede retener privados de su libertad y tiene que tomar una decisión.

Se trata de averiguar si con la lista de las conclusiones a las que arribaron los investigadores, usted está en condiciones de determinar cuáles son culpables y cuáles inocentes.

Le pusieron sobre su escritorio estas cuatro afirmaciones:

1) Si A es culpable, entonces B tuvo que haber sido cómplice (y por lo tanto, culpable también).
2) Si B es culpable, entonces sucedió una sola de estas dos cosas: o bien C fue uno de los cómplices (y por tanto culpable) o si no, A es inocente.

3) Si D es inocente, entonces A es culpable y C es inocente.
4) Si D es culpable, entonces A también.

Ahora le toca usted: ¿quiénes son inocentes y quiénes son culpables?

Como ve, todo lo que hay que hacer es pensar si con los datos que figuran acá, es posible tomar alguna decisión.

Respuesta

Fíjese en lo siguiente: por lo que dice una parte de la tercera afirmación, si D es inocente entonces A tiene que ser culpable.

Por otro lado, de acuerdo con la cuarta afirmación, si D fuera culpable, entonces A también lo es.

Es decir, independientemente de que D sea culpable o inocente, A resulta ser culpable.

Ésta es la primera conclusión: **¡A es culpable!**

Pero mirando la primera afirmación, allí dice que si A es culpable, entonces B tuvo que haber sido cómplice de A. Por lo tanto, B también es culpable (porque ya dedujimos que A lo era).

Segunda conclusión: **¡B es culpable!**

Pero ahora usando la segunda afirmación, se sabe que si B es culpable entonces tuvo que haber pasado una de dos cosas: o bien C fue culpable o bien A es inocente. Pero nosotros ya probamos que A no fue inocente, por lo que resulta entonces que C tuvo que haber sido culpable.

Y ésa es entonces la tercera conclusión: **¡C es culpable!**

Nos falta saber qué paso con D.

Fíjese que por la tercera afirmación, si D fuera inocente, entonces A sería culpable y además, C sería inocente. Pero nosotros ya sabemos que C *no* es inocente (es culpable). Luego, D *no puede ser inocente*. Y eso termina el análisis con la cuarta conclusión: ¡**D es culpable también!**

La moraleja entonces es que ¡los cuatro son culpables: A, B, C y D!

Una conclusión más: lo que usted acaba de leer y/o pensar, es también *hacer* matemática.

Teoría de Grafos – El camino

Quiero empezar planteando un problema ingenuo. Sin embargo, le sugiero que no crea que porque escribo 'ingenuo' se transforma automáticamente en *trivial*. No. La solución no es inmediata pero lo que puedo asegurar es que *cualquier persona* puede abordarlo, pensarlo y encontrar la respuesta. No hace falta *saber* nada particular. No hace falta ser *especialista* en nada y, en todo caso, demuestra como muchas veces nos embarcamos en establecer fronteras artificiales que en la vida real no existen. Me explico: uno aprende en el colegio/escuela a resolver problemas de matemática, de física, de química, de biología, de geología, etc., pero los problemas en la vida cotidiana no vienen con una 'etiqueta' que los separa o distingue. Entonces, cuando llega el momento de enfrentar una situación cualquiera en donde se requiere *pensar*, no sirve —en general— tratar de 'recordar' lo que uno estudió, sino de 'crear' y buscar alternativas de solución desde cualquier ángulo posible.

Por eso es que todas las empresas (y los gobiernos) debieran abordar los problemas con gente que llegue entrenada en distintas disciplinas: poner lo que hay que resolver sobre la mesa y discutir entre todos. La idea consiste en superar los obstáculos independientemente de las herramientas que hagan falta. Si me permite una reflexión al respecto, diría que valoro mucho más la capacidad creativa que la cultura enciclopedista, que suele apuntar a 'amontonar' información, aprender e incorporar datos en forma indiscriminada.

La vida viene preparada de otra manera: uno primero tiene problemas y después busca las soluciones, no al revés, como suele suceder en la mayoría de las currículas escolares, en donde uno aprende soluciones a problemas que no tiene, estudia teorías para contestar preguntas que no se hizo y, por supuesto, se las olvida ni bien pudo salir de la presión social que representa 'tener que aprobar' y/o pasar de año y/o de grado o de lo que fuere.

Pero me desvié. Quiero volver a este problema precioso que fue presentado hace un par de años por el matemático español Adolfo Quirós[88]. Es obvio entonces que todo el crédito le corresponde a él, así como la belleza de la solución que voy a proponer. Me apuro en decir (otra vez) que, como usted descubrirá luego, no se necesita ningún conocimiento específico. Todo lo que hace falta es *pensar*.

Suponga que tiene el siguiente mapa con 11 ciudades diferentes. Algunas están unidas por carreteras. Otras no. Las numeré de manera tal de hacer el texto más sencillo. La carretera entre un par de ciudades está indicada por un segmento que las une.

El objetivo es empezar en una ciudad cualquiera (usted elige) y tratar de pasar por todas 'una sola vez' y volver a la ciudad de partida.

No es necesario emplear 'todos' los caminos. Pueden quedar algunas carreteras sin utilizar, pero cada ciudad debe ser visitada

88. El problema que planteó Quirós fue el primero de una colección de 40 desafíos matemáticos que presentó el diario *El País* de España, conmemorando el centenario de la Real Sociedad Matemática Española.

exactamente una vez antes de volver al punto de partida. Éste es el dibujo:

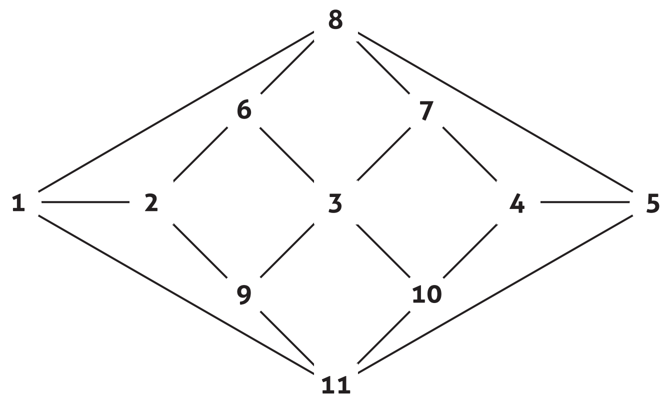


Figura 1

¿Se puede? ¿Existe algún camino que usted pueda trazar y que cumpla con las condiciones anteriormente expuestas? Si es así, escriba el 'orden' en el que hay que recorrer las ciudades.

Si usted concluye que no es posible encontrar el camino, no alcanza con que diga 'no existe porque yo no lo encontré'. Eso dejaría abierta la posibilidad de que viniera otra persona y sí pueda hallar lo que usted no pudo. Sin embargo, en matemática, cuando uno dice que "tal problema no tiene solución", lo que está diciendo es que no importa el tiempo que pase, ni quién venga, esa solución no va a poder ser encontrada. Para eso, es necesario 'demostrar' que la tal solución no existe.

Ahora, como siempre, le toca a usted.

Respuesta

Para convencerse de que no existe (ni existirá) una solución al problema, le propongo que hagamos lo siguiente. Voy a poner un círculo alrededor de algunos números (ciudades) y a otros los voy a enmarcar en un cuadrado. ¿Cómo decidir a cuáles ponerles un círculo y a cuáles un cuadrado? Si dos números están conectados por un camino, entonces uno debe tener un círculo y el otro un cuadrado, o sea, tienen que tener dos figuras geométricas distintas alrededor. Por ejemplo, como le puse un círculo al 1, entonces el 2 (que está conectado con el 1) debe tener un cuadrado. Pero como el 2 tiene un cuadrado y está conectado tanto con el 6 como con el 9, entonces ambos tienen que tener un círculo. De la misma forma el 3 y el 8 deben tener un círculo, porque están conectados con el 6 que tiene un cuadrado. Y así siguiendo. Más aún: le sugiero que tome la Figura 1 que, en donde aparece el planteo del problema, y haga usted la distribución de los círculos y los cuadrados. Verá que obtiene el mismo resultado: tendrán círculos los números 1, 6, 7, 9, 10 y 5, mientras que quedarán con cuadrados el 2, 3, 4, 8 y 11. O al revés: quedarán con cuadrados alrededor el 1, 6, 7, 9, 10 y 5 mientras que el 2, 3, 4, 8 y 11 tendrán un círculo. De acuerdo con lo que yo hice en la Figura 2, hay seis números que tienen círculos y cinco que tienen un cuadrado.

Dicho esto, quiero que pensemos juntos algo más que será muy importante: cada vez que caminamos de una ciudad a otra (o bien, de un número a otro), pasamos de un número que tiene un círculo a otro que tiene un cuadrado. O al revés. Es decir, vamos alternando números que tienen un círculo con números que tienen un cuadrado.

Ahora llegó el momento interesante en donde concluiremos que el camino que queremos construir no puede existir. ¿Por qué? Como el total de ciudades es 11, usted tendrá que dar 11 pasos para recorrerlas todas y volver a la de partida. Es importante que me siga con este último argumento. Como empieza 'parado' en algún número, tendrá que dar en total 11 pasos hasta volver al punto inicial (que le permitirá pasar una vez por cada ciudad que no es la de partida, pero deberá volver al lugar inicial). Por eso son 11 pasos. Voy a llamar (CIR) a los números que tienen un círculo y (CUA) a los contenidos en un cuadrado. Digamos que empieza parado en un número que tiene un círculo (CIR), cuando da el primer paso llega a un número (CUA). Al dar el segundo paso llega a un número con un círculo (CIR), y al seguir caminando va alternando (CIR) con (CUA). Como escribí recién, uno tiene que dar en total *once* pasos.

Fíjese que cada vez que dio un número *par* de pasos llega a un (CIR). Cuando dio un número *impar* de pasos, llega a un número (CUA). Y eso debería ser suficiente para convencerla/lo de que el camino no va a existir. ¿Quiere pensarlo usted en soledad?

Es que como tenemos que dar *once* pasos, que es un número *impar* y empezamos en un (CIR), llegaríamos a uno que es (CUA), y eso demuestra que el camino que queremos construir no va a existir, porque el objetivo es llegar a la misma ciudad de partida pasando una sola vez por cada ciudad/número. Por lo tanto, no importa qué camino pretendamos construir, será imposible encontrarlo.

Como se ve, la solución es verdaderamente sencilla. Todo lo que uno tiene que hacer es descubrir que el número de pasos que tiene que dar es impar, y que si sale de un número con un 'círculo', en un número impar de pasos (que son los 11 que tenemos que dar) llegará a uno con un 'cuadrado' alrededor. Por lo tanto, no podrá nunca llegar a la ciudad en la que empezó. Y eso concluye la demostración[89].

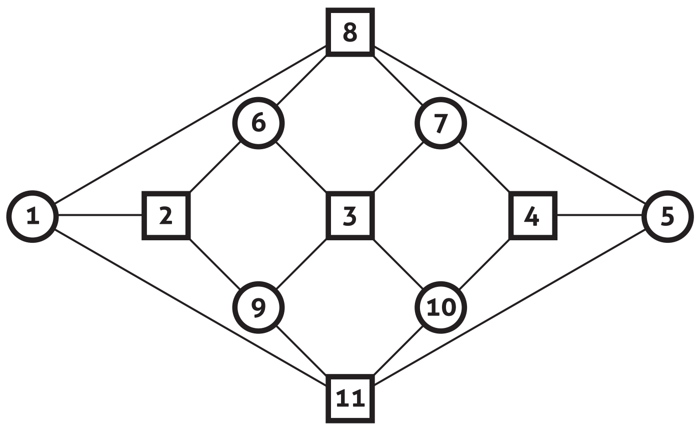


Figura 2

Este tipo de problemas forman parte de una preciosa rama de la matemática que se conoce con el nombre de "Teoría de Grafos". No es éste el lugar para que yo escriba sobre el tema (ni tampoco tengo la experiencia ni el conocimiento para hacerlo), pero la literatura es vasta y los resultados son espectaculares. Además, tiene una utilidad tremenda en biología, física, ingeniería, en ciencias sociales, en informática (muy especialmente), entre otras.

---

89. Aquellos que sepan un poco más de matemática y en particular sobre Teoría de Grafos, saben que no es posible encontrar un circuito hamiltoniano en un grafo bipartito con un número impar de vértices. Pero eso es totalmente innecesario para concluir que el problema no tiene solución como quedó exhibido aquí.

Muchas veces, decidir si un camino existe (o no) es un problema *altamente no trivial*. De hecho, el 18 de mayo de 2006, apareció en la contratapa de *Página/12* un problema 'abierto' (o sea, sin solución aún) que es el más famoso del mundo al respecto: el que se conoce con el nombre de "El Viajante de Comercio". Cualquier persona que logre resolver el problema del Viajante de Comercio pasará a ser millonario instantáneamente, ya que hay por lo menos una recompensa de un millón de dólares para quien lo resuelva. Pero más importante aún (creo): se transformará en una de las personas más famosas de este siglo (en términos de reconocimiento científico, sin ninguna duda).

Y para terminar, el primer artículo de esta serie que publiqué en *Página/12*[90] fue justamente el problema que, se considera, originó la Teoría de Grafos. Fue resuelto por uno de los matemáticos más importantes de la historia, Leonhard Euler (1707-1783). Si le interesa pensar problemas de este tipo, allí puede encontrar otro que también es muy famoso.

90. El 6 de noviembre de 2005, en la contratapa de *Página/12* (http://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-58861-2005-11-06.html).

Estoy un 99% seguro... ¿seguro?

Ésta es una historia contada (y escrita) por el mejor difusor de la matemática que hay en el mundo hoy: Keith Devlin[91]. Es totalmente menor pero me gustó que alguien pusiera en evidencia algo que utilizamos con mucha frecuencia y no necesariamente conociendo lo que decimos.

Imagine que usted sale de su casa con su hijo y cuando llegan a la esquina se produce el siguiente diálogo: "¿Apagaste el horno?", pregunta usted. Su hijo duda un instante... pero al final contesta: "Estoy 99% seguro de que sí".

Acá me quiero detener un instante. ¿Qué quiere decir que una persona tenga un 99% de certeza? ¿Cómo medirla? ¿Qué hacer para confrontarlo con la verdad? Veamos...

Usted podría hacer lo siguiente: se procura una caja (digamos de zapatos, como para fijar las ideas) y adentro pone 100 bolitas. De las cien, 99 son rojas y una es negra. Cuando tiene todo pre-

91. Keith Devlin es un extraordinario matemático inglés y ahora profesor en Stanford University, en Palo Alto, California. Para mi gusto, es el mejor *comunicador de matemática que hay en este momento*. Sugiero que cualquier persona interesada en matemática recreativa consulte su obra, que por cierto es muy vasta. Devlin nació en marzo de 1947 y es hoy uno de los referentes más importantes del mundo en esta especialidad.

parado, le propone a su hijo este juego: "Mirá, meté la mano en la caja (sin mirar). Si sacás una bolita roja, te doy diez pesos. Si sale negra, vos me das diez pesos a mí".

Su hijo lo mira con cara incrédula. Usted no se amilana y sigue: "Pero tengo otra opción para ofrecerte para que te ganes los diez pesos sin necesidad de arriesgarlo con las bolitas rojas de la caja: entramos de nuevo en casa y nos fijamos si el horno está encendido. Si está apagado, te doy los diez pesos. En cambio, si está encendido, serás vos el que me tiene que dar los diez pesos a mí". Y ahora, la pregunta: "¿Qué preferís hacer? ¿Meter la mano en la caja o entrar en la cocina y mirar?".

Como usted advierte, ahora sí hemos puesto una suerte de 'medidor' o 'estimador'. Es decir, estamos poniendo un poco más de precisión a la frase "estoy un 99% seguro de algo".

Pensémoslo así: si lo que afirmó su hijo fuera una estimación correcta, entonces, no debería haber ninguna diferencia entre meter la mano en la caja o entrar en la casa. Las dos situaciones son comparables. Ambas tienen (de acuerdo con lo que él dijo) una probabilidad de que el horno esté apagado de 99/100, o sea de un 99%.

Sin embargo, creo que hay algo que nos sucede a todos: por alguna razón difícil de explicar uno tiene la sospecha de que el hijo preferiría meter la mano en la caja y no tener que entrar en la cocina y verificar que el horno esté apagado.

De hecho, hay *una sola bolita negra: es muy razonable (y esperable) que su hijo* ***no*** *la elija cuando meta la mano.*

Pero ahora tengo una pregunta para usted: ¿en qué caso le convendría a su hijo entrar en la casa? O sea, ¿habrá alguna circunstancia que usted pueda imaginar en donde al joven le convenga entrar en la casa *antes* que jugarse el dinero a elegir la bolita? Piénselo por un instante.

Respuesta: únicamente cuando él esté *absolutamente seguro* de que apagó el horno. Entonces sí, ¿para qué arriesgar con las bolitas aunque la probabilidad de sacar una negra sea bajísima? Si él está convencidísimo de que apagó el horno, entrar en la cocina es obtener el dinero sin más trámite. Más aún: ésa es la *única* circunstancia en la que *seguro* le conviene entrar.

Ahora le propongo que cambiemos un poco las condiciones del problema. Supongamos que en lugar de 99 bolitas rojas y una negra, usted pone 90 bolitas rojas y 10 negras.

Si le ofreciera el mismo juego a su hijo y él prefiere meter la mano en la caja, eso significa que él no está *tan* seguro de que apagó el horno. Más aún: si el número que él eligió antes, el de 99%, fuera cierto, le convendría volver a la casa decididamente. Pero si prefiere elegir entre las bolitas, significa que 'a lo sumo' su nivel de confianza respecto al horno es de un 90%... '¡o menos!'.

Como antes, para que le convenga entrar en la casa, su nivel de confianza de que apagó el horno tiene que ser igual o mayor que un 90%. En cualquier otro caso, le conviene arriesgar con las bolitas.

Y aquí paro. Creo que está claro que uno puede ir aumentando el número de bolitas negras (disminuyendo las rojas) y le va ofreciendo a su hijo ambas alternativas. Mientras él prefiera elegir bolitas, usted sabrá que su nivel de confianza está 'acotado' por el número de bolitas negras que queden dentro de la caja.

Sin embargo, hay una ***única*** circunstancia en donde a él le conviene ***siempre*** arriesgar con las bolitas. ¿Cuál es? ¿Qué caso tendría que darse como para que él prefiera *siempre* meter la mano en la caja?

Sí, como usted está pensando ahora: el *único* caso es cuando él esté segurísimo de que no apagó el horno. Él sabe que si entra en la casa, pierde. En cambio con las bolitas, por más baja que sea la probabilidad porque el número de bolitas rojas es muy bajo también, al menos tendrá alguna chance. Si él recuerda *no* haber apagado el horno, entrar en la casa implica una derrota inexorable.

Por eso, supongamos que *tiene* alguna duda. La forma de *medir* esa duda es aceptando que el padre reduzca el número de bolitas rojas. Llegará un momento en que el número de bolitas rojas es tan pequeño que la probabilidad de sacar una roja será muy baja. Su hijo tendrá que decidir que *ahí sí, en ese punto, le conviene entrar*.

El momento *exacto* en donde se produce ese cambio es en donde se establece el *nivel de confianza*.

Si en ese instante en la caja hay (por poner un ejemplo) 30 bolitas rojas, entonces uno puede afirmar que él está 30% por ciento seguro de que apagó el horno.

No se me escapa que todo esto es un juego y, de hecho, muy menor. Sin embargo, es una forma de *cuantificar* y *hablar con un poco más de cuidado y precisión*.

Estrategia para sumar las fichas de un dominó

Suponga que usted tiene un juego completo de dominó. Son en total 28 fichas. Voy a excluir la que tiene dos blancos (o ceros). Por lo tanto, cada ficha tiene —por lo menos— algún número que va entre 1 y 6.

Le propongo que me siga con esta idea: suponga que usted toma una ficha cualquiera, como la que se ve acá:

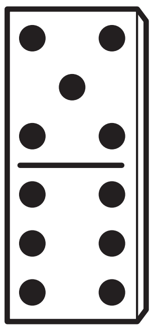


Figura 1

A esta ficha la voy a pensar como la fracción 5/6 (porque tiene un cinco arriba, como si fuera el numerador, y un seis abajo, como si fuera el denominador).

De esta forma, puedo pensar todas las fichas poniendo como numerador la que sea menor (o igual) de las dos. No hay peligro de dividir por cero, porque únicamente debería hacerlo cuando uno tiene la ficha blanca, ésa fue la razón por la que la excluí.

Otro ejemplo para asegurarme de que usted y yo estamos en la misma sintonía. ¿Qué número le asociaría a estas fichas?

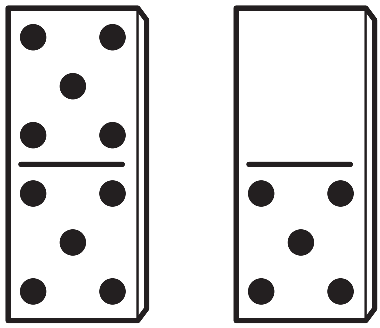


Figura 2

Respuesta: sí, como me imagino que usted pensó, a la primera le corresponde el número uno (ya que 5/5 = 1) y a la otra, le corresponde el número cero, porque 0/5 = 0.

Ahora bien: imagine las 27 fichas como si fueran fracciones, tal como acabo de hacer acá: ¿habrá alguna forma de poder sumarlas todas y averiguar cuánto da?

Por supuesto, uno puede hacer la cuenta y va a encontrar el resultado. Es decir, tendría estos veintisiete números:

0/1, 1/1,
0/2, ½, 2/2
0/3, 1/3, 2/3, 3/3
0/4, ¼, 2/4, ¾, 4/4
0/5, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 5/5,
0/6, 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6, 6/6

No sería muy difícil sumarlas. Sería tedioso, pero no difícil. Aunque mi propuesta es otra. Mi idea es proponerle que piense alguna forma más creativa, para ver si es posible sumarlas todas sin tener que apelar a la fuerza bruta.

¿Tiene ganas de pensar un rato? La/lo dejo en su propia compañía.

Una idea

La que sigue es una idea que me contó el doctor Pablo Coll, licenciado en matemática y doctor en computación, egresado de Exactas (UBA) y además editor de contenidos del programa *Alterados por Pi*, que se emite por Canal Encuentro. Por lo tanto, el crédito le corresponde todo a él.

Tomemos otro juego de dominó. Ahora tenemos 56 fichas, 28 de cada juego. Excluimos las dos blancas y nos quedamos con 54. Fíjese que uno podría aparearlas de forma que a cada ficha de un juego le corresponde una ficha del otro tal que la suma entre las dos sea el número uno. ¿Cómo hacer?

A la ficha de un juego que tiene el 3/5, le corresponde la que tiene 2/5 del otro lado, de manera tal que cuando uno las suma (3/5 + 2/5 = 1).

A la ficha 1/6 le corresponde la de 5/6 del otro juego. La suma (1/6 + 5/6) = 1.

¿Y cuál le corresponderá a la ficha 4/4? Esta ficha ya 'vale' uno. Le corresponde la ficha 0/4, de manera tal que cuando las sume (4/4 + 0/4 = 1).

De esta forma, se agrupan en parejas las fichas de los dos juegos (excluyendo las dos blancas). ¿Cuántas parejas hay? En total, veintisiete ya que hay 27 piezas en cada juego. Al haberlas apareado de manera tal que cada par sume uno, la suma de todos los pares resulta ser el número 27.

Pero como estoy sumando dos veces las fichas de cada juego, la suma total de las fichas de un solo juego es igual a la mitad de 27, o sea 13,5.

Y ésa es exactamente la respuesta que estaba buscando: 13,5.

Moraleja

No se me escapa (como tantas otras veces) que es muy poco probable, por no decir casi imposible, que tenga que recurrir a sumar las fichas de un dominó de esta forma. Entiendo. Pero, al mismo tiempo, se me ocurre preguntarle lo siguiente: ¿no es una solución preciosa? Y quiero subir la apuesta: ¿cómo sabe uno que en la vida, alguna vez, no necesitará elaborar una estrategia que tenga algún parentesco con lo que acabo de escribir?

La geometría y el pensamiento lateral

El siguiente problema tiene la particularidad de que se puede contestar sin necesidad de escribir nada. Todo lo necesario 'está a la vista'. Pero hará falta aprovechar del *pensamiento lateral*, o sea, utilizar argumentos que no son los *convencionales* o, en todo caso, los *primeros que a uno se le ocurren*.

De todas formas, mientras escribo esto estoy pensando: ¿estará bien lo que estoy diciendo? ¿Y si a usted lo *primero* que se le ocurre es *exactamente* lo que hay que pensar para deducir la solución? ¿Quién dice que *mi* manera de pensar sea la *suya*? ¿O viceversa?

Bien, en todo caso, le propongo lo siguiente: yo planteo el problema y la/lo dejo en soledad para que usted decida cómo lo piensa. Si se le ocurre la solución en forma inmediata, mi suposición era equivocada. Si no es así, y si requiere de usted algo *no tan inmediato*, entonces me sentiré un poco más acompañado.

Basta de preámbulos. Acá va.

Concéntrese en la Figura 1. Como ve, por un lado hay un cuadrado. Dentro de ese cuadrado he dibujado dos triángulos. Si se detiene un instante en ellos, verá que cada uno tiene un lado que coincide con uno de los lados del cuadrado. Uno de los triángulos está *apoyado* en la pared izquierda del cuadrado y el otro triángulo está *apoyado* en la base inferior del cuadrado.

Por lo tanto, cada triángulo tiene dos vértices que coinciden con dos vértices del cuadrado; el tercer vértice de cada uno de los dos triángulos está ubicado en un punto cualquiera del otro lado del cuadrado.

Como usted advierte, los dos triángulos se cortan (en la Figura 1 es la parte gris oscuro). La otra región que aparece distinguida en la Figura 1 es el área que *no pertenece* a ninguno de los dos triángulos.

Ahora, pregunta: ¿cuál de estas dos áreas es más grande? ¿El área en donde se superponen o el área que no corresponde a ninguno de los dos?

Como podrá observar, no hay *nada particular que hacer*, sino *mirar con cuidado y analizar la figura que tiene delante de los ojos*. El resto se lo dejo a usted. Eso sí: lo *único* que creo que es necesario *saber* es que el área de un triángulo se calcula como la base por la altura sobre dos. Salvo ese dato, no hace falta ningún otro tipo de conocimiento previo. Usted será el juez.

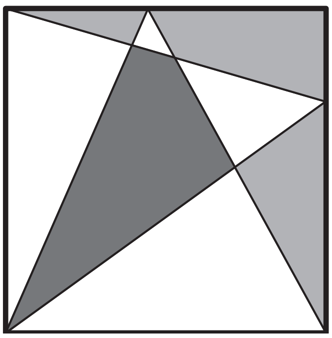


Figura 1

Idea para la solución

Como escribí anteriormente, el área de cada triángulo se calcula como la base por la altura sobre dos. En el caso de los dos triángulos de la Figura 1, la base de cada uno de ellos coincide con uno de los lados del cuadrado. Como el tercer vértice de cada triángulo está en el *lado opuesto* del cuadrado, la *altura* de cada triángulo tiene la misma medida que el lado del cuadrado (fíjese en la figura para convencerse... no me crea a mí... descúbralo usted).

Dicho esto, si el área de cada uno de estos triángulos se calcula como el lado del cuadrado (por ser la base) por la altura (que también coincide con el lado del cuadrado) dividido por la mitad, entonces

$$(\text{lado del cuadrado}) \times (\text{lado del cuadrado})/2$$

Si usted piensa en este dato, el área de un cuadrado se calcula como *(lado × lado)*. En este caso, el área de cada triángulo es (lado × lado)/2. ¿Qué hemos deducido?: que cada triángulo tiene como área *¡la mitad del área del cuadrado!*

Luego, lo que *no está incluido* en cada triángulo *también* tiene como área la mitad del área del cuadrado.

Mire ahora la Figura 2.

Los sectores que figuran con un *punto negro* son *todos* los que *no están en el triángulo vertical*. Si uno suma las áreas marcadas con el punto negro, se obtiene *la misma área que la del triángulo vertical*, porque lo que está adentro y lo que está afuera miden lo mismo (igual a la mitad del área del cuadrado).

Pero por otro lado, si uno suma las regiones marcadas con un *asterisco* se obtiene el área del segundo triángulo, el que está en forma horizontal. Luego, el área medida por la suma de los puntos negros tiene que ser igual al área de la suma de los asteriscos.

Dicho esto, como hay dos sectores que tienen asteriscos y puntos negros simultáneamente, uno deduce que la región que tiene solamente un asterisco, debe ser igual a la región que tiene solamente puntos negros.

¡Pero estas dos regiones son las que queríamos comparar! La que tiene sólo el asterisco es la región en donde coinciden los dos triángulos; y las que tienen un punto negro únicamente son las regiones del cuadrado que no *tocan* a ninguno de los dos triángulos.

Es decir, hemos *comprobado* que la respuesta a la pregunta original es: ¡esas dos áreas son iguales! El área en donde se cortan los dos triángulos y el área en donde no hay ninguno de los dos triángulos son iguales.

Y eso termina por contestar la pregunta[92].

Como usted ve, *salvo la fórmula del área de un triángulo (la mitad de la base por la altura)*, no fue necesario ni usar ni saber más nada. Sólo pensar con un poco de cuidado y acercarse al problema en forma un poco más... ¿lateral?

Preguntas (a las que no aspiro tener ninguna respuesta): ¿qué le pasó a usted?, ¿se le ocurrió enseguida?, ¿hubo algo que le hizo sospechar que esas áreas tenían que ser iguales?, ¿cómo pensó el problema? No sabe cómo me gustaría poder estar junto a usted para escuchar sus reflexiones. Seguro que eso me ayudaría muchísimo para educar mi percepción.

92. Una observación excelente que me hizo Juan Sabia: "El mismo resultado es cierto si hubieras empezado con un rectángulo en lugar de un cuadrado".

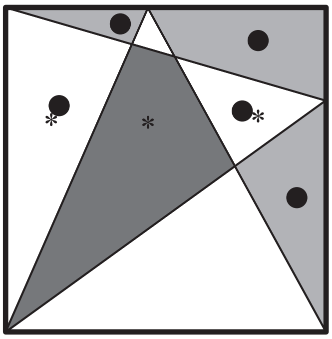


Figura 2

Muralla China

Piense en la Gran Muralla China (aunque tiene validez en cualquier otro lugar en donde se reproduzcan las condiciones). Suponga que una persona dice: “Nací al Sur de la Gran Muralla, y hasta el día de hoy la crucé 999 veces”.

¿En dónde dijo esta frase? ¿Al sur o al norte de la muralla?

Ahora le toca pensar a usted.

Respuesta

La primera vez que cruza la Muralla, estará en el norte. La segunda, en el sur. La tercera, en el norte. La cuarta, en el sur. La quinta, en el norte… ¿hace falta que siga?

Es decir, cuando haya hecho un número *impar* de cruces, estará en el norte y, equivalentemente, cuando haya hecho un número *par* de cruces, estará en el sur.

Como dijo que había cruzado la Muralla 999 veces, entonces, por una cuestión de paridad, la afirmación la hizo estando al norte de la Muralla.

Este problema tan sencillo, que involucra cuestiones de paridad, suele ser muy útil para resolver otros un poco más complejos (y útiles que este último).

Acá va otro.

¿Qué tendrá que ver un juego con pelotas y la paridad?

En lugar de un problema quiero proponerle un juego. Ubique a ocho personas en un círculo. Los voy a llamar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Usted ubíquese en el centro del círculo y consígase una bolsa con muchas pelotas de tenis o de ping-pong... en fin, de lo que quiera, pero la idea es que pueda sostener suficiente cantidad para poder jugar.

Cuando empiece el juego, los participantes pueden *pedirle* que les dé un número cualquiera de pelotas; pero si usted accede, tendrá que darle la misma cantidad a alguno de los dos participantes que éste tiene al lado.

Por ejemplo, si el participante número 4 le pide tres pelotas, usted tiene que darle tres pelotas al número 4, pero también debe entregarle tres pelotas o bien al 5 o bien al 3.

Y lo mismo al revés: si en algún momento del juego algún participante quiere darle pelotas a usted (que está en el centro), sólo lo puede hacer si consigue que alguno de los dos que tiene al lado (a la izquierda y/o a la derecha) también le entreguen ese número de pelotas. Por ejemplo, si el participante 1 quiere darle cuatro pelotas a usted que está en el centro, tiene que convencer o bien al 8 o bien al 2 para que también se desprendan de cuatro pelotas.

Ésas son las únicas reglas. Ahora bien, para empezar el juego, los únicos que tienen una pelota cada uno son el participante 3 y 7. Los demás no tienen ninguna.

Pregunta: ¿será posible que en algún momento del juego *todos* los participantes (los ocho) tengan el mismo número de pelotas?

Es decir, ¿es posible diseñar una estrategia, siguiendo las reglas mencionadas anteriormente, de manera tal que en algún momento del juego todos tengan la misma cantidad de pelotas?

Ahora le toca a usted.

Idea para la solución

Mi primera propuesta sería que usted *intente* jugando. Aunque no pueda encontrar ocho amigos o familiares que quieran acompañarlo, siéntese un rato con un papel y un lápiz (qué antiguo, ¿no?). En cualquier caso, vea qué sucede si *trata* de forzar que todos tengan el mismo número de pelotas.

Lo que yo escriba ahora servirá para contestar la pregunta, pero creo que no lo ayudará a mejorar su capacidad para pensar salvo que intente por su lado. ¿Cómo hace usted para descubrir en *dónde* está la dificultad? ¿Se podrá o no se podrá lograr que todos tengan el mismo número de pelotas?

Y si usted no pudo hasta acá, ¿será porque no podrá nadie o será solamente porque a usted —todavía— no se le ocurrió una forma que lo conduzca a la respuesta?

Dicho de otra manera, ¿uno no encuentra la respuesta debido a problemas circunstanciales, o el problema tendrá alguna dificultad intrínseca que lo hace ‘insolucionable’?

Antes de avanzar, permítame decir algo más: la *única* gracia que tiene este tipo de problemas es motivarlo para bucear en algún otro lugar de su cerebro, llevarla/lo —eventualmente— por sitios que usted no exploró. Si únicamente lee lo que escribo yo, sólo le servirá para conocerme a mí un poco mejor, nada más. La idea final debería ser otra: mejorar ***su*** capacidad para razonar y elaborar estrategias.

Ahora sí, avancemos juntos por acá.

Primera observación: cada vez que uno intente darle una o cualquier número de pelotas a un jugador, sabe que está 'agregando' ese número de pelotas a uno de los dos que tiene al lado. El problema se va a plantear con los jugadores 3 y 7. Si ellos no tuvieran ninguna pelota, no hay nada que hacer ya que tendrían todos la misma cantidad: cero pelotas.

Pero ésa *no es la posición inicial*. Los jugadores 3 y 7 tienen una pelota cada uno. Yo podría darles pelotas a 1 y 2 por ejemplo (una pelota a cada uno), y a 4 y 5; pero ni bien quiera darle una pelota a 6, entonces o bien le agrego una pelota a 7 (y no quiero hacer esto), o bien le agrego una pelota a 5 (y tampoco quiero hacer esto). Lo mismo ocurriría con 8.

Por supuesto, el hecho de que no lo haya resuelto de entrada no significa que no se va a poder. Solo quiero mostrarle alguno de los lugares en donde uno puede tropezar con una dificultad.

También podría encarar el problema de otra forma, entregando muchas pelotas a los de alrededor de 3 y 7, y buscando alguna forma de retirárselas usando a los dos que tienen al lado cada uno de ellos.

Es por eso que le sugería recién que esta parte del problema no puedo hacerla por usted. En realidad, es una de las partes *más importantes* de cualquier problema: ¡descubrir dónde está la dificultad!

Eso es algo que nadie puede hacer por usted. Quizá sospeche dónde está el problema, pero *nada* se compara con detectar uno mismo cuál es la valla que hay que saltar. Bueno, estoy evadiéndome de abordar el problema propiamente dicho.

En un momento determinado habrá que tomar alguna decisión: o bien usted está convencido de que *se puede encontrar una estrategia que permita que todos tengan el mismo número de pelotas*, o bien habrá que convencerse (después de múltiples intentos) de que eso no será posible y que se trata, entonces, de ***demostrar*** que la 'tal estrategia' ¡no existe! No importa quién venga, ni lo que haga, no habrá forma de encontrarla.

Yo voy a intentar —entonces— convencerla/lo de que ése es el caso: no se puede.

Ahora bien: ¿por qué?

Hay algo que uno empieza a sospechar en la medida que trata de elaborar esa estrategia en alguno de los casos fallidos: hay 'algo' que siempre 'molesta'... y si bien uno —al principio— no lo puede poner en palabras, pareciera que se relaciona con 'la paridad'. ¿Tendrá algo que ver que los dos participantes que tienen una pelota sean el número 3 y el número 7? Digo esto porque si en lugar de ser el 3 y el 7 fueran el 3 y el 4 los que empiezan con dos pelotas, entonces *no hay dudas de que el problema **sí** tiene solución*. Bastaría —por ejemplo— con darles una pelota a 1, 2, 5, 6, 7 y 8. En ese caso, *todos* tendrían una pelota y se resolvió el problema. ¿Y si en lugar de 3 y 4 les diera una pelota a 3 y 6? ¿Se podrá ahora? (confío en que usted está deteniéndose en cada uno de estos pasos y trata de investigar por su cuenta). Fíjese que sí, que también se puede: bastaría con darles una pelota a 1, 2, 4, 5, 7 y 8 y terminan todos con una pelota otra vez.

Como *última* sugerencia antes de escribir la respuesta definitiva, le propongo que se fije que, así como en los casos en los que les doy una pelota a 3 y 4 o a 3 y 6, el problema tendría solución, lo mismo pasaría si les diera una pelota a 5 y 6, o a 2 y 5, o a 3 y 8... Estoy seguro de que usted ya habrá encontrado *otros dos números con los que funciona*.

Si revisa los ejemplos que yo puse en donde *sí* funciona (más los que quizás encontró usted), descubrirá que hay algo muy interesante: pareciera que *siempre* se puede si los números de los dos jugadores son uno par y el otro impar. Pero en nuestro caso, los números de los participantes en cuestión son 3 y 7, ambos impares. ¡Y aquí sí me parece que estamos muy cerca de *entender* en dónde está la *clave* del problema!

Justamente *ése* es el problema central: la paridad. Ahora bien: ¿qué hacer? ¿Cómo *aislar* el problema de manera tal de poder *explicar* que por esa razón no vamos a lograr elaborar la estrategia?

¿Cómo hacemos ahora para *traducir* esto que *parece* que descubrimos en una demostración convincente de que si los números de los dos participantes que tienen una pelota son 3 y 7, entonces *no se podrá* encontrar una estrategia que permita que *todos* terminen con el mismo número de pelotas?

Observe lo siguiente: por las características del juego, si uno agrega pelotas a un participante, las agrega a alguno de los dos de al lado (y lo mismo si le quita, pero ahora no necesito ese hecho). Por lo tanto, fíjese lo que sucedería si yo sumara y restara las pelotas que tienen cada uno de los participantes así:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 \qquad (*)$$

¿Cómo interpretar lo que acabo de escribir?

Estoy tratando de hacer lo siguiente: supongamos que yo le doy *cuatro* pelotas al número 5. Le tengo que dar entonces cuatro pelotas también o al número 4 o al número 6, ¿de acuerdo? Pero cuando yo haga la suma que figura en (*), no se va a notar. ¿Por qué? Porque si yo le doy cuatro pelotas a 5, el total aumentará en cuatro; pero al mismo tiempo, como tanto las pelotas que tiene 4 como las que tiene 6 aparecen 'restadas', tendré que 'restar' las cuatro pelotas que le di a alguno de ellos dos. ¿Se entiende?

O sea que con el número que figura en (*), cada vez que entrego un número cualquiera de pelotas a cualquier participante, y por las reglas del juego tengo que agregarle pelotas también a alguno de los dos que tiene al lado, el número que figura en (*) ¡no se va a modificar! Es que estoy sumando y restando el mismo número. En este caso, el número (*) permanece INVARIANTE.

Asimismo, si yo le *pidiera* —digamos— diez pelotas al número 3, las tendría que restar de (*); pero al mismo tiempo, como las que figuran tanto en 2 como en 4 aparecen con un signo 'menos', entonces les agregaría diez pelotas a alguno de ellos y, por lo tanto, el número (*) sigue 'inalterado'.

¿Qué estoy tratando de hacer con esto? Quiero convencerla/lo de que el número (*) permanece INVARIANTE cada vez que usted entregue o retire pelotas siguiendo las reglas.

¿Y para qué sirve esto? ¿Qué piensa usted?

Lo extraordinario es que el hecho de que este número (*) permanezca INVARIANTE cada vez que agregamos o retiramos pelotas, sirve para demostrar que el problema original no tiene solución. ¿Por qué?

Si en algún momento pudiéramos encontrar una estrategia que permitiera que todos los participantes tuvieran el mismo número de pelotas, el número (*) sería ¡cero! Es que al hacer la operación que figura en (*), como todos tienen el mismo número, se irían sumando y restando hasta llegar a cero.

¿Y entonces? ¿Por qué digo que esto prueba que el problema no tiene solución? ¿No tiene ganas de pensar usted?

Es que al empezar el problema, *antes de comenzar a repartir* *pelotas*, el número (*) es igual a 2... Convénzase usted mismo: haga la cuenta y verá que es igual a dos.

Pero lo notable es que, como vimos antes, el número (*) permanece INVARIANTE al avanzar en el juego. Sea lo que sea al principio, no se modificará hasta que decidamos parar.

Por lo tanto, como al principio es igual a *dos*, cuando arribemos a cualquier estadio del juego, seguirá *siempre* dos y nunca *cero*. Pero si nunca llegamos a que sea *cero*, no hemos logrado que *todos tengan el mismo número de pelotas*.

¡Y ésa es la conclusión! Usando este argumento (que se llama de 'paridad') uno puede concluir que haga lo haga, *nunca llegaremos a lograr que todos los participantes tengan el mismo número de pelotas*.

Moraleja 1

Como usted advierte, este argumento se puede convertir en algo mucho más general. ¿Qué quiero decir con esto? Si en lugar de haber sido los participantes 3 y 7 los que tenían una pelota cada uno, hubieran sido cualesquiera otros dos que fueran ambos pares o impares, el problema no tendría solución tampoco. Y ni siquiera es necesario que tengan una pelota cada uno. Alcanza con que esos dos jugadores tengan el *mismo* número de pelotas inicialmente[93].

93. En realidad, bastaría con que la suma de pelotas que tengan los participantes con números pares sea distinta de la suma de pelotas de los participantes con números impares.

Moraleja 2

De todos los problemas que aparecen en este libro, este juego que parece tan inocente (y de hecho lo es) permite encontrar su solución (o mejor dicho, demostrar que ***no existe solución***) usando un argumento de paridad a través de un número que es *invariante* (o que no se modifica) a medida que vamos avanzando en el juego.

Eso es lo que provee la matemática también: la capacidad de aportar un argumento tan sólido, impactante y contundente que permite resolver un problema que, a priori, parece de difícil solución.

Espero que yo haya sido capaz de transmitir la potencia de una herramienta de estas características, porque se la merece.

5. MATEMÁTICA PURA

Suma de todos los dígitos que aparecen entre cero y un millón

Tengo una propuesta para hacerle respecto de *todos* los números naturales, desde 1 hasta *un millón*. Suponga que usted tiene una lista en donde están todos estos números. Obviamente, aparecen muchísimos *dígitos* involucrados. La pregunta que quiero formularle es la siguiente: Si uno *sumara* **todos** los dígitos que aparecen en la lista, ¿qué número se obtendría?

Advierta que no estoy tratando de averiguar cuánto suman estos números (el millón de números) sino cuánto suman los ***dígitos*** que aparecen.

La respuesta viene a continuación, pero lo *único* que vale la pena es que sea usted quien se quede pensando cómo contestar la pregunta.

Solución

Si uno quisiera usar la fuerza 'bruta', podría efectivamente escribir la lista completa del millón de números y sumar dígito por dígito. Está claro que nos conduciría al resultado final, pero... ¿no habrá otra forma más *económica* de hacerlo?

Y la respuesta es que sí. Por un instante, *excluyamos* al último número, al 1.000.000.

Al hacer eso, nos quedan *todos números* de seis dígitos. Usted me preguntará: "¿Cómo números de seis dígitos? ¿Y el 124?, ¿o el 14.537?

Éstos serían algunos ejemplos de números que *parecen* no tener seis dígitos. En realidad, técnicamente *no tienen* seis dígitos, pero si yo quisiera, podría agregarles *ceros* al principio, y transformarlos en números de seis dígitos.

De hecho, por ejemplo el número 124, se podría escribir así:

000.124

El número 14.537 se podría pensar así:

014.537

Y así siguiendo. De esa forma yo podría *transformar* todos los números que aparecen en la lista en números de seis dígitos. El único que no formaría parte sería el 1.000.000 excluido deliberadamente porque —éste sí— no tiene seis dígitos.

Pensando el problema de esta forma, ¿se podrá resolver más fácilmente?

Fíjese en lo siguiente: tenemos ahora una lista de *un millón* de números (excluí el número *un millón* pero permítame incorporar el *cero*, como 000.000, que en realidad no va a agregar nada al resultado total).

En esta lista de 1.000.000 de números (del 000.000 hasta el 999.999), cada número tiene seis dígitos. Luego, en *total* hay *¡seis millones de dígitos!*

Y en suma, todos estos dígitos aparecen la misma cantidad de veces: 600.000 veces el número *cero*, 600.000 veces el número *uno*, 600.000 veces el número *dos*... y así siguiendo, 600.000 veces el número *nueve* también.

Creo que ahora, tanto usted como yo estamos en condiciones de dar respuesta a la pregunta.

Si hay 600.000 números *cero*, esto significa que hay que multiplicar 600.000 por cero, y se obtiene... ¡cero!

Pero, como hay 600.000 números *uno*, esto significa que hay que multiplicar 600.000 por *uno*, y se obtiene: 600.000.

De la misma forma, hay 600.000 'ejemplares' del dígito *dos*. Luego, *todos* estos números *dos* suman:

$$600.000 \times 2 = 1.200.000$$

Y lo mismo sucede con cada dígito: hay 600.000 de cada uno, y el resultado de sumarlos a todos se obtiene multiplicando 600.000 por cada dígito.

Resumiendo:

a) $600.000 \times 0 = 0$
b) $600.000 \times 1 = 600.000$
c) $600.000 \times 2 = 1.200.000$
d) $600.000 \times 3 = 1.800.000$
e) $600.000 \times 4 = 2.400.000$
f) $600.000 \times 5 = 3.000.000$
g) $600.000 \times 6 = 3.600.000$
h) $600.000 \times 7 = 4.200.000$
i) $600.000 \times 8 = 4.800.000$
j) $600.000 \times 9 = 5.400.000$

Como el 600.000 es un *factor común* a todos estos *sumandos* (uno nunca piensa que llegará el momento de usar en un problema lo que aprendió en el colegio sobre los 'factores comunes', pero acá aparece *justo-justo*), si uno *suma convenientemente* todos estos números se tiene:

$$600.000 \times (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) =$$
$$600.000 \times 45 = 27.000.000$$

¡Y éste es el resultado final! Un momento... ¿no hace falta sumar algo más?

Sí, no me quiero olvidar del número 1.000.000 que *aporta una unidad más*. O sea, la suma total de todos los dígitos desde el 0 hasta el 1.000.000 es...

27.000.001

Y ahora sí, éste es el resultado final.

Moraleja

Una vez más, es muy poco probable, por no decir imposible, que aparezca alguna razón por la cual uno tenga que sumar todos estos dígitos, pero *ésa* no es la idea. La idea es mostrar cómo somos capaces de elaborar diferentes tipos de estrategias para resolver problemas. Puede que éste no surja nunca en la vida cotidiana de ninguna persona que usted y yo conozcamos, pero *sí* estoy seguro de que de tanto entrenarse y pensar en problemas que requieran la elaboración de estrategias, uno desarrolla capacidades para la vida cotidiana que no tendría si no las *practicara*.

Pitagómero

El siguiente problema se le ocurrió a un joven español. Su nombre es Iñigo Tena Núñez, y lo notable es que *¡no es matemático!* Pero Iñigo tiene un blog cuyo objetivo es desarrollar la capacidad para pensar; por eso que Pablo Coll me lo propuso con la idea de que lo usáramos en uno de los episodios de *Alterados por Pi* (año 2014), y más allá de haberlo hecho por televisión, me interesa incorporarlo también a este libro.

Acá va. Suponga que usted mira la Figura 1:

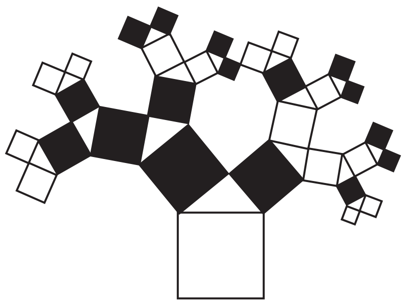


Figura 1

Fíjese en las áreas 'pintadas de negro' y las que están 'pintadas de blanco'. Si uno las *sumara* imaginariamente... ¿cuál le parece que es más grande?

Le sugiero que piense usted la respuesta antes de leer lo que sigue.

Idea para encontrar la solución

Acá es donde es útil *repasar* el teorema de Pitágoras. Observe el cuadrado mayor, el de área blanca que está apoyado sobre la base. Quiero tomar ese cuadrado como referencia.

En la tapa de arriba de ese cuadrado, hay dibujado un triángulo. Si usted le presta atención a ese rectángulo verá que es 'rectángulo', o sea, tiene un ángulo de 90 grados o ángulo 'recto'. En principio no parece porque la hipotenusa coincide con la tapa de ese cuadrado, pero ni bien uno le presta un poco más de atención, descubre que sí, que es un triángulo rectángulo.

Ahora bien, el teorema de Pitágoras dice —justamente— que "en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

En este caso dice que el cuadrado blanco (el que estoy considerando como referencia) tiene un área igual a la 'suma de los cuadrados de los catetos'. Y esos cuadrados están representados por los cuadrados pintados de negro.

En resumen, el teorema dice que el área del cuadrado blanco ***es igual*** a la suma de las áreas de los dos cuadrados negros. Por lo tanto, cuando yo quiera evaluar cuál área es más grande (la que aparece pintada de negro o la que aparece pintada de blanco), esas tres áreas se compensan (son iguales).

Con esa misma idea, le propongo ahora que 'recorra' las otras figuras, buscando triángulos rectángulos y áreas negras y blancas. Fíjese en qué casos puede hacer que se cancelen o en cuáles hay más de un color que de otro.

Al finalizar el recorrido, se encontrará con la Figura 2. Yo fui 'encapsulando' las áreas blancas y negras que se compensan. Lo que no pude hacer es 'encerrar' a los tres cuadrados que tienen áreas negras y el único cuadrado blanco cuya área no pude equiparar con otras.

¿Qué se puede deducir? Los tres cuadrados negros que no pude encerrar tienen la particularidad de que los dos más pequeños tienen área ***igual*** al área del cuadrado negro más grande (por Pitágoras otra vez). Por otro lado, el cuadrado blanco tiene un área igual a uno de esos cuadrados negros más uno que debería ser de área más pequeña.

Moraleja: el área negra es ***mayor*** que el área blanca, que es lo que queríamos dilucidar.

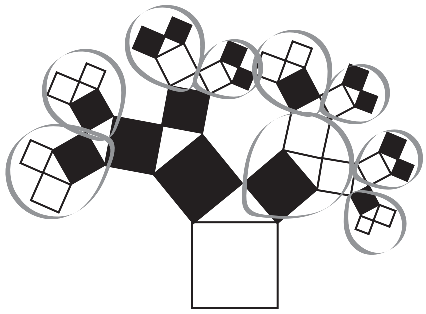


Figura 2

Crucigrama numérico

Uno está acostumbrado a hacer crucigramas de diferentes tipos. En una época, aparecían sólo los clásicos (más conocidos como ‘palabras cruzadas’), pero con el tiempo las opciones se fueron ampliando, y aparecieron los sudokus y otras variantes. El que voy a proponer acá es solamente con números y el objetivo es llenar la grilla de 2×2 que figura a continuación.

Se trata de una réplica de un crucigrama tradicional en donde las definiciones, en lugar de conducir a palabras, conducen a números. Acá va.

1	2
3	

Horizontales:
1) Número primo de dos dígitos.
3) El doble de 1 horizontal.

Verticales:
1) Uno más el número que aparece como (1 horizontal).
2) Múltiplo de 9.

Solución

Voy a llamar 1H y 3H a los dos números que van en posición horizontal, y 1V y 2V a los que van en posición vertical. En total, se trata de encontrar nada más que cuatro números.

Ahora, analicemos lo que se puede deducir.

Como el 1H debe ser un número primo de dos dígitos, entonces *tiene* que ser impar. Es decir, terminará en *uno*, *tres*, *cinco*, *siete* o *nueve*.

Como el número que aparece en 3H tiene que ser el *doble* de lo que aparece en 1H, entonces el número 3H debe ser *par*. Por lo tanto, terminará en *cero*, *dos*, *cuatro*, *seis* u *ocho*.

Por otro lado, como es un número de dos dígitos, se puede inferir que el número que aparece en 1H *tiene* que ser menor que 50, ya que su doble resulta ser un número de dos dígitos nada más.

Los números que aparecen en 1V y 1H tienen un dígito en común: el primero, el que aparece en la casilla superior izquierda. Por otro lado, sabemos que el número que figura en 1V tiene que ser el mismo que 1H pero incrementado en *uno*. Luego, el 1H no puede terminar en *nueve*, al sumarle uno cambiaría el primer dígito, y eso no es posible.

¿Cuáles son entonces los números primos de dos dígitos *menores que* 50 que no terminan en *nueve*? Son pocos. Acá están todos: 11, 13, 17, 23, 31, 37, 41, 43 y 47.

La casilla que figura con el número 3 tiene que ser par, porque corresponde a agregarle *uno* al dígito que figura en 2 (de acuerdo con la definición de las verticales).

Luego, el número que figura en 1H no puede terminar en 7, porque si no, al multiplicarlo por 2 arrastraría un uno a la primera cifra, y la primera cifra debe ser par (porque es la última de 1H más 1). De todas formas, son tres posibilidades: 17, 37 y 47. Al multiplicarlos por dos, se obtiene: 34, 74 y 94. Como se ve, el primer dígito de cada uno de estos tres números es impar, y eso no puede ser, porque este dígito resulta de sumarle uno al segundo dígito de la primera horizontal (que por ser un número primo, debe ser impar).

Quedan entonces por revisar: 11, 13, 23, 31, 41, y 43.

Ahora analicemos 2V. Como tiene que ser un múltiplo de 9, podemos descartar de 1H los que terminan en 1, porque 3H terminaría en 2 y el 12 no es múltiplo de nueve.

Quedan 13, 23 y 43.

Analicemos cada uno:

13 en 1H, 14 en 1V, pero el 3H sería 26, no puede ser.
23 en 1H, 24 en 1V, el 3H sería 46, puede ser.
43 en 1H, 44 en 1V, el 3H es 86, no puede ser.

Conclusión: la *única* posibilidad es

2 3
4 6

Algo más: la mayoría de los problemas que aparecen en este libro admiten muchísimas formas de encontrar soluciones. Estoy convencido de que las hay mejores, más elegantes, más económicas, más bonitas, más ingeniosas de las que figuran aquí. Pero en definitiva, la *única* que importa es la que se le ocurra a usted... *Ésa* es la mejor, sin ninguna duda. ¿Sabe por qué? Porque es *suya*.

Quiero agregar entonces otra forma de pensar el mismo problema que me sugirió Carlos Sarraute.

Voy a llamar *ab* (a los dos números que aparecen en la primera fila) y *cd* a los que aparecen en la segunda. Ésos serían los dos números que aparecen en las filas. De la misma forma, el número *ac* es el que aparece en la primera columna, y *bd* el de la segunda columna. El problema consiste en determinar los valores de *a*, *b*, *c* y *d*.

Por las hipótesis que tiene el problema, se sabe que *bd* es múltiplo de 9, por lo que se deduce que (b + d) tiene que ser múltiplo de 9, o lo que es lo mismo, el número 9 tiene que dividir a (b + d).

Como otra hipótesis dice que el número que aparece en la segunda fila *(cd)* tiene que ser el doble del que aparece en la primera *(ab)*, el *dígito* 'd' tiene que ser un número par. Según la primera hipótesis, el número *ab* es primo, lo que obliga a que el número *b* sea impar. Ahora, analicemos los casos posibles:

1) Si b = 1, entonces d = 2. Este caso no puede ser porque 9 no divide a (1 + 2) = 3
2) Si b = 3, entonces d = 6. Este caso *sí* puede ser posible, porque 9 divide a (3 + 6) = 9
3) Si b = 5, entonces d = 0. No es posible porque 9 no divide a (5 + 0) = 5
4) Si b = 7, entonces d = 4. Tampoco funciona, porque 9 no divide a (7 + 4) = 11
5) Si b = 9, entonces d = 8. Y éste es el último caso que tampoco sirve porque 9 *no divide* a (9 + 8) = 17

Moraleja: la única solución se da cuando $b = 3$ y $d = 6$. Como $c = (b+1)$, se deduce que $c = 4$. Luego, la segunda fila es el número 46, y como es el *doble* de la primera, descubrimos que la primera fila es 23.

Chicos en fila

Haga de cuenta que tiene que ubicar a cinco chicos en hilera o cinco libros en un estante, pero de manera tal que *dos* tengan que estar siempre juntos. ¿De cuántas formas se pueden ubicar?

En principio, la/lo invitaría a que pensara el problema sin restricciones, es decir, sin pedir que haya dos de los libros o de los niños que tengan que estar juntos.

Una vez que haya resuelto el problema más sencillo, entonces sí, piense cuántas formas hay de ubicar a los cinco pero con el cuidado de que dos queden uno al lado del otro.

Una forma de pensarlo

Voy a numerar a los niños (sólo para ponerles un 'nombre'). Digamos que son 1, 2, 3, 4 y 5.

Contemos primero de cuántas formas se los puede ordenar en fila. Hay que llenar *cinco* lugares (vacíos en principio).

Para el primer lugar, hay cinco posibilidades (1, 2, 3, 4 o 5).

Una vez que elegí el que va primero, ¿cuántas posibles elecciones hay para el segundo? Efectivamente: hay cuatro posibilidades.

Por ejemplo, si el primero es el número 3, entonces, el que le sigue puede ser 1, 2, 4 o 5. O sea, la fila empezaría así:

31 o 32 o 34 o 35

Y si hubiéramos empezado con el número 4, la fila podría empezar así:

41 o 42 o 43 o 45

La moraleja de esto es que una vez que uno *fija* el primer número, hay *cuatro* posibles para el segundo. Dicho de otra forma, hay $(5 \times 4) = 20$ maneras de empezar la fila.

Una vez elegidos los dos primeros, ¿de cuántas formas se puede continuar? (Piénselo usted por su cuenta antes de seguir leyendo.)

Por ejemplo: si la fila empieza con 42, entonces, puede seguir así:

421 o 423 o 425

Y no hay más posibilidades que empiecen con 42. Como ya tengo elegidos los dos primeros, hay tres posibilidades para el tercero. En total entonces, hay $5 \times 4 \times 3 = 60$ formas de empezar con tres niños.

¿Y de cuántas formas se puede elegir el cuarto número? No hay muchas posibilidades, ya que tengo elegidos los tres primeros. Por lo tanto, quedan *nada más* que dos opciones. En este caso, entonces, las maneras posibles de elegir cuatro niños (entre los cinco posibles) son:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

¿Y ahora? Ya no hay más posibilidades para *elegir* al último niño: al haber elegido los cuatro primeros, el quinto queda *elegido por descarte*. Es el único que queda sin haber sido elegido.

¿Qué conclusión sacamos?

Podemos decir que hay 120 formas de ubicar a los cinco niños.

Esto contesta la primera parte del problema. Pero queda todavía por analizar la otra pregunta. ¿Y si yo *pidiera* que dos de los niños estén siempre juntos? Aquí es donde vuelvo a invitarla/lo a que analice este caso en soledad. Si no, yo sigo acá.

Si ahora uno tiene que tener el cuidado que dos de los niños estén juntos, una forma de pensarlo podría ser ésta: *imaginar* que esos dos niños forman una suerte de 'bloque' o 'paquete'. Vienen 'combinados'. En este caso, uno podría tratar de resolver el problema como si en lugar de tener *cinco* niños, tuviéramos *cuatro* (aunque uno de ellos sea 'doble').

En consecuencia, se tienen $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ formas de ubicarlos.

Pero, un momento: uno podría decir que los dos niños (que voy a llamar A y B) que hemos 'pegado' o considerado 'juntos', pueden ubicarse primero A y después B o primero B y después A.

Por lo tanto, debemos duplicar los 24 casos que conté recién, ya que al imaginarlos 'pegados', no distinguimos cuál de los dos va primero.

Luego, la *respuesta correcta* es que hay $24 \times 2 = 48$ formas posibles de ubicar cinco niños en hilera, teniendo la precaución que dos de ellos estén siempre juntos[94].

94. Algunas preguntas:

¿Por qué restringirse a *cinco* niños solamente? ¿Y si fueran *diez*? ¿O veinte? ¿O mil? ¿Qué pasaría en esos casos? Por otro lado: si tuviéramos —digamos— 50 niños y uno quisiera contar de cuántas formas posibles se los puede ordenar para que un grupo de *siete* tengan que estar siempre juntos. ¿No está tentada/tentado de usar las mismas ideas que en el caso anterior? En lugar de dividir por dos, habrá que dividir por 7! (el factorial de siete) para analizar todas las posibles permutaciones del grupo de amigos; pero es, *esencialmente*, el mismo problema con distintas restricciones.

Y se me ocurre algo más: si uno tuviera 100 niños y tiene dos subgrupos de 15 y 17 amigos respectivamente, ¿de cuántas formas se los podrá ordenar para que los amigos queden siempre juntos?

Como se ve, hay muchísimas formas de *generalizar* el problema. Le sugiero que usted explore el tema por su cuenta porque, creo, ya tiene las herramientas necesarias para poder resolver cualquier variante que aparezca.

Múltiplo de 198

Tengo una propuesta interesante para hacerle. A lo largo de nuestro recorrido por los distintos colegios y escuelas primarias y secundarias, todos hemos aprendido a determinar cuándo un número es par o múltiplo de tres o de nueve, o múltiplo de seis o de cuatro... incluso de *once*[95].

Ahora, suponga que tiene un número de *nueve dígitos* como éste:

6		2		7		9		4

Figura 1

Como usted advierte, para poder considerarlo de nueve dígitos, es necesario llenar los espacios en blanco (con otros dígitos). Supongamos que yo tuviera los dígitos 1, 3, 5 y 8 para distribuir *al azar* en esos cuatro lugares.

¿Cuál será la probabilidad de que el número resultante sea

95. Un número entero es múltiplo de once si la suma alternada de sus dígitos es múltiplo de 11. Por ejemplo, el número 123.456 no es múltiplo de 11, porque 1 − 2 − 3 − 4 + 5 − 6 = -3 no lo es. En cambio 12.122 sí lo es, porque 1 − 2 + 1 − 2 + 2 = 0 que sí es múltiplo de 11.

múltiplo de 198? O sea, si alguien "distribuyera" al azar estos dígitos (1, 3, 5 y 8), y todos aparecieran ubicados en los lugares vacíos de la Figura 1, ¿cuál será la probabilidad de que el número resultante sea múltiplo de 198? ¿Qué habrá que hacer? ¿Cómo se podrá pensar este problema?

Solución

Analicemos juntos las distintas posibilidades.

En principio, miremos *cuáles son los factores primos* de 198. O sea, cómo se descompone el número 198.

Es así:

$$198 = 2 \times 3^2 \times 11$$

¿Para qué nos sirve esta descomposición? Como el objetivo suyo (y mío) es tratar de determinar si al distribuir los dígitos que nos dieron el número resultante es múltiplo de 198, bastará con que miremos si el número que resulta es múltiplo de 2, de 9 (o sea de 3^2) y de 11.

Es decir, si un número es múltiplo de 2, de 9 y de 11, entonces forzosamente termina siendo múltiplo de 198.

Ahora volvamos al problema original. Como cualquiera sea la distribución de los dígitos {1, 3, 5 y 8} el número que va a terminar apareciendo en la Figura 1 terminará en *cuatro*, entonces podemos garantizar que *siempre* será par. Luego, sea cual fuere la distribución de estos cuatro dígitos, el número va a ser múltiplo de 2.

Por otro lado, al ubicar todos los dígitos que faltan ({1, 3, 5 y 8}), los que terminarán apareciendo en la Figura 1 son:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9

Luego, si sumo todos: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45, el resultado es múltiplo de nueve. ¿Qué quiere decir esto? Que cualquiera sea la distribución de dígitos que hagamos, el número resultante cumple que la suma de todos sus dígitos es múltiplo de *nueve*. Conclusión: hagamos lo que hagamos, el número al que arribaremos será múltiplo de nueve.

¿Qué faltaría mostrar para convencernos de que *siempre* va a ser múltiplo de 198?

Deberíamos corroborar que, sea cual fuere la distribución de los dígitos que faltan ubicar, el número resultante va a ser múltiplo de 11.

Para ver si un número es múltiplo de 11 tenemos que sumar alternadamente:

a) por un lado, los dígitos en posiciones impares. Por otro lado…
b) los dígitos en posiciones pares. Y finalmente…
c) hay que calcular la diferencia entre las dos sumas.

Si esa diferencia es múltiplo de 11, el número todo lo será.

(a)	o		o		o		o		o
	6		2		7		9		4
(b)		o		o		o		o	

La suma de los dígitos en posiciones impares (a) es 6 + 2 + 7 + 9 + 4 = 28.

Por otro lado, sin importar en qué orden sean ubicados 1, 3, 5 y 8, la suma de los dígitos en posiciones pares (b) es 1 + 3 + 5 + 8 = 17.

Luego, la diferencia entre ambas sumas es 28 − 17 = 11, que es —obviamente— múltiplo de 11.

Por lo tanto, ahora estamos en condiciones de asegurar que el número total que se obtiene es múltiplo de 11, sea cual fuere la ubicación de los dígitos que faltan.

Moraleja

Usted advierte que no importa cuál sea la forma en que distribuyamos estos dígitos {1, 3, 5 y 8}, el número resultante será múltiplo de 2, de 9 y de 11, lo que *garantiza* que será múltiplo del producto: 2 x 9 x 11 = 198.

Y esto permite contestar la pregunta sobre la *probabilidad* de que sea múltiplo de 198. La respuesta es: "Cualquiera sea la distribución de los dígitos, el número será múltiplo de 198", por lo que la *probabilidad* de que eso suceda es *uno*, o lo que es equivalente, estamos un 100% seguros de que, independientemente de esa distribución, el número será múltiplo de 198.

Once magos y mil sombreros ("a la Sarraute")

El siguiente problema me lo contó Carlos Sarraute. Estos problemas siempre tienen un encanto particular porque ni bien uno los lee y se detiene a pensar un ratito, sospecha que no hay *forma* de encontrar una solución. Pero después, con un poco de paciencia, tiempo y alguna frustración, es posible descubrir alguna forma razonable de abordarlo.

Voy a presentar dos enunciados. El primero será una versión sencilla y luego otro un poco más general. Le sugiero que lea los dos planteos (que no son muy diferentes salvo en los números involucrados) y se dedique a resolver el caso más fácil. De allí recogerá las ideas para abordar el otro hasta convencerse de que el que *parece* más difícil, es sólo eso: una apariencia. Estará usted en condiciones de resolver cualquier problema de este tipo. Acá van.

Versión 1 (más sencilla)

Cuatro magos tienen una gran bolsa que contiene ocho sombreros de distintos colores, formas, dibujos, etc. Es decir: cada sombrero tiene un único diseño que lo caracteriza.

Cada uno de los cuatro magos saca al azar un sombrero cualquiera de la bolsa con los ojos cerrados. No puede mirar el sombrero que se pone y, por supuesto, no hay espejos, ni agua en donde se pueda ver reflejado, ni cámaras, nada. El problema *no tiene trampa*, como ninguno de los problemas que yo propongo. *Nunca*.

Cada mago tiene en su poder una carta o tarjeta de dos colores: de un lado es blanca (B) y del otro lado es negra (N).

Cuando cada mago ya tiene puesto su sombrero, puede ver los sombreros que tienen puestos TODOS sus compañeros magos, pero NO el propio. Cada uno de ellos entonces, luego de inspeccionar lo que tienen los otros, muestra en forma bien visible uno de los dos lados de la carta que tiene en la mano: B o N. Todos tienen que hacer lo mismo. Los magos *no pueden comunicarse entre sí por ningún medio que no sea la exhibición de alguno de los dos lados de su carta*. No se pueden intercambiar guiños de ojos ni señas de ningún tipo.

La pregunta es: ¿Pueden los magos elaborar una estrategia tal que cada uno sea capaz de *deducir* con certeza cuál es el sombrero que tiene puesto?

Versión 2 (más compleja)

Es el mismo problema que figura en la versión 1, pero ahora se tienen 1.000 (mil) sombreros (todos distintos entre sí) y 11 magos. ¿Se puede elaborar una estrategia en este caso?

Como se ve, la diferencia entre las dos versiones es solamente el número de sombreros y de magos involucrados. Verá usted entonces que si logra encontrar una solución para el primer caso, para resolver el segundo simplemente deberá expandir la estrategia a un caso más general.

Ahora le toca a usted.

Solución para la versión 1

En principio, es necesario recordar la numeración binaria. Es decir, necesitamos escribir los números naturales (y el cero) usando *solamente* ceros y unos. La voy a usar para numerar los sombreros, pero antes escribo los primeros números para refrescar su memoria:

1	0
2	1
3	10
4	11
5	100
6	101
7	110
8	111
9	1000
10	1001
11	1010
12	1011
13	1100
14	1101
15	1110
16	1111

… y así podríamos seguir. A los efectos del problema que nos ocupa, solamente necesitamos los primeros ocho que se obtienen empezando por el 0 y llegando hasta el 7 (eso da justamente ocho números, aunque parezcan siete).

Aprovecho esta numeración para *etiquetar* los ocho sombreros. Lo hago así:

S000, S001, S010, S011, S100, S101, S110, S111

Llamo M1, M2, M3 y M4 a los magos.

Cada uno elige un sombrero en forma aleatoria y se lo pone en la cabeza. A los efectos de hacer más comprensible la estrategia que voy a proponer acá, elegiré un ejemplo, pero usted verá que no es más que una forma de hacer más sencillo lo que de otra forma llevaría mucha más escritura y complicación. De hecho, quiero evitar hacer una *sopa de letras y números* que solamente va a terminar por *encubrir* las ideas, que son lo único que importa. Acá voy.

Supongo que:

El mago M1 eligió el sombrero S011
El mago M2 eligió el sombrero S111
El mago M3 eligió el sombrero S000, y
El mago M4 eligió el sombrero S101

Naturalmente, como ya dije, esta elección es totalmente arbitraria ya que pudieron haber elegido cualquier otro dentro de los ocho que están disponibles, pero le va a dar una idea muy clara de la estrategia que es factible utilizar.

Cada mago tiene una tarjeta con un lado Blanco (B) y un lado Negro (N).

Se trata entonces de establecer una estrategia de manera tal que mostrando nada más que alguno de los dos lados de la tarjeta de cada uno, lleguen a la conclusión de qué sombrero tienen puesto los cuatro. Por supuesto, no se pueden comunicar entre ellos, no se pueden hacer guiños, no hay espejos, no hay agua donde se refleje alguno de los sombreros, nada…

Se empieza así: el mago M1 *suma* los primeros dígitos de los tres sombreros que tienen puestos los otros tres magos. O sea, suma los primeros dígitos de los sombreros de M2, M3 y M4. En este caso, tiene que sumar los primeros dígitos de S111, S000 y S101. Esto resulta ser: (1 + 0 + 1). Si la suma resulta ser un número *par*, entonces les muestra a todos los otros magos el lado B de su carta. Si la suma resulta ser un número *impar*, entonces les muestra a todos los otros magos el lado N de su carta. En este caso, como la suma es 2 (que es un número *par*), les muestra a todos el lado B de su carta.

¿Qué conclusión sacan los otros magos con este dato? Es obvio que M2, M3 y M4 están viendo el sombrero de M1, pero eso no les va a servir porque, cuando M1 muestra el lado B de su tarjeta, él no vio nada de lo que tenía. Pero lo que SÍ les está diciendo a M2, M3 y M4 es que la SUMA de los tres primeros dígitos de cada uno es un número *par*.

El mago M2, no puede ver su propio sombrero, pero SÍ ve los sombreros de M3 y M4 (que son S000 y S101). Si M2 hace la suma de los primeros dígitos de estos dos sombreros, descubre que le da 1 (0 + 1 = 1). Como el mago M1 había mostrado el lado B de su carta, eso les indicó a todos que había visto una suma PAR entre los primeros dígitos de los sombreros de M2, M3 y M4. Si M2 ve que la suma de los primeros dígitos de M3 y M4 da IMPAR, entonces el primer dígito de SU sombrero tiene que ser un 1. **Es decir, el mago M2 ya sabe que su sombrero empieza con un *uno***.

Con el mismo análisis, el mago M3 no puede ver su sombrero, pero sí ve los sombreros que tienen M2 y M4: S111 y S101. Los primeros dígitos de estos dos sombreros suman 2 (1 + 1 = 2). Luego, como es un número *par*, él no puede tener un número 1 en el suyo, porque si no, el mago M1, cuando sumó los primeros dígitos de los sombreros de M2, M3 y M4 hubiera visto un número *impar*. Por lo tanto, la conclusión es que **el primer dígito del sombrero de M3 es un *cero***.

Un paso más: de la misma forma, el mago M4, al ver que los primeros dígitos de los sombreros de M2 y M3 (S111 y S000) suman 1 (ya que 1 + 0 = 1), entonces al haber visto el lado B de la tarjeta de M1, sabe que M1 vio una suma *par* entre los sombreros de M2, M3 y M4. Entonces, como entre M2 y M3 suman 1, la única manera que M1 hubiera visto un número par, es que **M4 tenga un sombrero cuyo primer dígito sea un número *uno***.

Con este análisis, usted advierte que los magos M2, M3 y M4 ya conocen el primer dígito de cada uno de sus sombreros, y eso lo supieron *solamente porque M1 mostró el lado B de su tarjeta o carta*. Estos tres magos *aprendieron algo que no sabían*. El único que quedó afuera, el que no descubrió nada nuevo, fue el M1, pero fue él, quien al dar vuelta la tarjeta del lado B (blanco) les dio la indicación a los otros tres sobre el primer dígito del sombrero que cada uno de ellos tenía puesto.

¿Cómo hacer para que cada uno de ellos descubra los dígitos que le faltan? ¿Quiere pensar usted por su cuenta un ratito? Todo lo que hay que hacer es replicar lo que hizo el mago M1, pero ahora lo tiene que hacer el mago M2. Eso sí, en lugar de hacerlo con el *primer dígito* de cada uno de los sombreros, lo tiene que hacer con *los segundos dígitos*. Así, descubrirán sus segundos dígitos M1, M3 y M4 (pero no M2). En este caso, **M1 sabrá que su segundo dígito es 1, M3 descubrirá que su segundo dígito es un 0 y M4, que su segundo dígito es un 0**.

Faltan un par de pasos aún. En primer lugar, como usted ya debe haber intuido, el mago M3 hace lo mismo con el tercer dígito de cada uno de los sombreros que llevan M1, M2 y M4. Los sumará y, de acuerdo con la *paridad*, les exhibirá a los otros el lado B o el lado N de su tarjeta. En este caso, como él ve los sombreros S011, S111 y S101, al sumar los terceros dígitos (1 + 1 + 1 = 3), mostrará N porque la suma es *impar*. De esa forma, les estará indicando a M1, M2 y M4 cuál es el tercer dígito de cada sombrero: **M1 tiene tercer dígito igual a 1, M2 tiene tercer dígito igual a 1 y M4 tiene tercer dígito igual a 1**.

Ahora, antes de dar el último paso, quiero invitarla/lo a pensar conmigo sobre la información que han recolectado los magos. **El mago M1 conoce su segundo y tercer dígito: 1 y 1. El mago M2 conoce su primer y tercer dígito: 1 y 1. El mago M3 conoce su primer y segundo dígito: 0 y 0. Y el mago M4 conoce sus tres dígitos (exactamente su sombrero): S101**.

Pero el problema no está terminado porque falta descubrir aún el primer dígito de M1, el segundo dígito de M2 y el tercer dígito de M3. ¿Qué hacer? Si me permite una sugerencia, piense que uno de los magos aún *no utilizó* su tarjeta. Sigo yo.

El único mago que no utilizó su tarjeta es M4. ¿Cómo hace para darle a los restantes tres magos (M1, M2 y M3) la información que les falta? Debe sumar *el primer dígito de M1*, *el segundo dígito de M2 y el tercer dígito de M3*. Si es un número par, muestra el lado B de su tarjeta. Si es un número *impar*, muestra el lado N. En este caso, el mago M4 ve que los sombreros de M1, M2 y M3 son S011, S111 y S000. Luego, el primer dígito de M1 es 0, el segundo dígito de M2 es 1 y el tercer dígito de M3 es 0. Los suma: 0 + 1 + 0 = 1 y, como le da *impar*, muestra el lado N de su tarjeta.

El mago M1, al ver que M4 muestra el lado N, *sabe* que la suma de esos tres dígitos resulta un número impar. Cuando él ve que el segundo dígito de M2 es 1 y el tercero de M3 es 0, los suma (1 + 0 = 1) y resulta impar, entonces *el primer dígito que él tiene* no puede alterar la paridad. Luego, el mago M1 deduce que tiene un 0 como primer dígito. De la misma forma, el mago M2, al sumar el primer dígito de M1 (que es 0) y el tercer dígito de M3 (que es 0 también), obtiene suma 0. Pero el mago M4 mostró una tarjeta N. Quiere decir que M4 vio un número impar. Moraleja: M2 descubre que su segundo dígito *tiene que ser un 1*. Por último, el mago M3 suma el primer dígito de M1 (que es un 0) y el segundo dígito de M2 (que es un 1) y esa suma resulta 1, o sea, un número impar. Como M4 había dado vuelta el lado N de su tarjeta, eso le indica a M3 que su tercer dígito no puede alterar la paridad y descubre que *¡tiene que ser un cero!*

De esa forma, *los cuatro magos* deducen qué sombrero tiene puesto cada uno.

Esta estrategia es preciosa porque no usa más que una señal de cada uno de los magos involucrados.

Solución a la versión 2

Uno puede hacer muchas preguntas sobre este problema. Por ejemplo: ¿solamente se puede deducir si hay cuatro magos y ocho sombreros? ¿Y si hubiera más sombreros y más magos?

Como usted advierte, la estrategia empleada se puede extender/extrapolar. Si en lugar de tener ocho sombreros uno tuviera 16, la escritura *binaria* de todos los números entre 0 y 15 (que resultan ser 16) requiere de *cuatro* lugares o *cuatro dígitos*. En este caso entonces, hacen falta *cinco magos*. ¿Por qué cinco? Es que el último mago es el que aporta los datos sobre los dígitos que faltaban al final.

O sea, para ocho sombreros, cuatro magos. Pero $8 = 2^3$.

Para 16 sombreros, cinco magos. De la misma forma, $16 = 2^4$.

Para 32 sombreros, seis magos. En este caso $32 = 2^5$.

Para 64 sombreros, siete magos. Como antes, $64 = 2^6$

Y así siguiendo: al ir incrementando la potencia de 2, el número de magos necesarios es la potencia de 2 más uno. O sea, para 64 sombreros, como $64 = 2^6$, entonces hacen falta siete magos. Y así siguiendo: para *2^n sombreros, hacen falta $(n+1)$ magos*[96].

Con esto termino el análisis de este problema que, como escribí anteriormente, es precioso y muestra una vez más la potencia de poder numerar objetos usando la notación binaria. Y el crédito de que aparezca acá, le corresponde TODO a mi querido amigo (y ex alumno) Carlos Sarraute[97].

---

96. El caso en el que uno tiene 1.000 sombreros y 11 magos es posible de resolver, porque el número 1.000 es menor que 210 = 1.024.

97. Quiero compartir también un mail que me mandó Ginóbili (el 22 de diciembre de 2013), después de haber pensado el problema: "¡Muy muy bueno también este problema! El primer paso de par a impar lo hacía bien, pero al no **advertir que tenía que pasarlos a binario**, terminaba poniendo condiciones que no me llevaban a ningún lado. Después que me dijiste que los números binarios tenían que ver con la solución, me di cuenta de que ése era el camino... pero sin ese dato no sé si me hubiera salido. Le dediqué bastante tiempo en uno de los vuelos y no llegué a destino. En resumen: me encantó pero me pareció muy difícil de resolver".

El magnate, el mayordomo y el cuadrado de monedas

Éste es un problema precioso y la matemática llega para socorrer a un detective que encuentra la solución 'en el acto'. Fíjese lo que pasó.

Un *magnate* (qué antigua es esta palabra... ¿se sigue usando?) tenía algunas peculiaridades (qué magnate no las tiene... ¿no es así?). El hecho es que este buen señor tenía una colección de monedas de oro muy grande y le encantaba distribuirlas en una mesa como las de billar, con un paño verde por debajo. De esa forma, las monedas podían lucir y brillar ante las visitas que eran muy frecuentes.

Pero la *otra* particularidad es que al dueño de casa le interesaba tener siempre una cantidad de monedas que pudiera distribuir en un cuadrado. Es decir, para explicarme un poco mejor: a medida que fue avanzando su colección, empezó con una sola moneda de oro, pero después pasó a tener cuatro, de manera tal de poder distribuirlas en dos filas de dos monedas cada una. Así:

O O
O O

Pero no bien pudo agregar más monedas, lo hizo cuidando ese detalle: *siempre tenía una cantidad de monedas con las que pudiera formar un cuadrado*. Por ejemplo, no pudo nunca pasar por tener ni cinco monedas, ni seis, ni siete, ni ocho... Es que, como usted advierte, es imposible formar un cuadrado con, por ejemplo, siete monedas.

De hecho, el número de monedas fue este: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, etc.

Aspiro a que antes de avanzar usted pueda contestarse esta pregunta: ¿está claro por qué no podía tener ningún otro número de monedas salvo los que figuran en la lista del párrafo anterior? Son todos números que se obtienen *elevando al cuadrado algún número natural*.

Es decir, acompáñeme por acá:

$1 = 1 \times 1 = 1^2$
$4 = 2 \times 2 = 2^2$
$9 = 3 \times 3 = 3^2$
$16 = 4 \times 4 = 4^2$
$25 = 5 \times 5 = 5^2$
$36 = 6 \times 6 = 6^2$
$49 = 7 \times 7 = 7^2$
$64 = 8 \times 8 = 8^2$
$81 = 9 \times 9 = 9^2$
$100 = 10 \times 10 = 10^2$
$121 = 11 \times 11 = 11^2$
$144 = 12 \times 12 = 14^4$
....

Y así podría seguir la lista. Cualquier número que estuviera en la lista era un número posible de monedas para él; pero, por ejemplo, el 6 no, porque ¡no hay ningún número natural que multiplicado por sí mismo resulte ser *seis*! O sea, no hay ningún número tal que al *elevarlo al cuadrado* se obtenga el número seis.

Para que un número de monedas fuera aceptable para él, tenía que ser un número que estuviera en esa lista. Y TODOS estos números se llaman ***cuadrados*** porque —justamente— se pueden obtener como cuadrados de números naturales.

Hasta acá, todo bien. El problema es que una noche, después de haber salido a cenar afuera con su señora, volvió a su casa y se encontró con un móvil de la policía en la puerta de su casa. Ingresó apresurado y encontró al mayordomo conversando con algunos oficiales y un detective.

El magnate se aseguró primero de que el mayordomo no estuviera lastimado y después de comprobar que su salud estaba bien, al verlo tan asustado le preguntó qué fue lo que había pasado. Esto fue lo que contestó el mayordomo: "Yo estaba limpiando las monedas como todas las noches, procurando que estuvieran brillantes como a usted le gusta y cuidando la distribución en forma de un cuadrado como usted suele hacer. En ese momento, tres personas rompieron el vidrio que da al jardín, entraron por la ventana y se llevaron algunas monedas". "Por lo que veo, no se las llevaron todas", dijo el magnate, observando que habían quedado *dos* monedas nada más. "Es verdad", siguió el mayordomo. "No se las quisieron llevar todas. Discutieron entre ellos porque cuando las distribuyeron en partes iguales les sobraban dos. Supongo que estaban asustados con que los pudieran descubrir. Cada uno se llevó su parte y dejaron las dos que sobraban allí, arriba de la misma mesa."

Instantáneamente, el dueño de casa miró a los policías y al detective y les dijo (lo que usted, supongo, está imaginando): "¡Tienen que detener a este señor (mirando al mayordomo), él fue quien se robó las monedas que faltan!".

Ahora le toca a usted. ¿Qué pasó? ¿Por qué estaba tan seguro el magnate de que su propio empleado se había quedado con las monedas?

La solución

En principio, quiero proponerle pensar lo siguiente. Miremos los números que figuran en la lista otra vez:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, ...

Descartemos el 1, porque estaba claro que el magnate tenía más de *una* moneda. Empecemos entonces por el *cuatro* y hagamos de cuenta que los estamos distribuyendo entre los tres 'ladrones'.

Si son 4 monedas, al dividirlas por 3, queda *una moneda* para cada uno y SOBRA UNA.

Si son 9 monedas, al dividirlas por 3, quedan *tres monedas* para cada uno y NO SOBRA NINGUNA.

Si son 16 monedas, al dividirlas por 3, quedan *cinco monedas* para cada uno y SOBRA UNA.

Si son 25 monedas, al dividirlas por 3, quedan *ocho monedas* para cada uno y SOBRA UNA.

Si son 36 monedas, al dividirlas por 3, quedan *doce monedas* para cada uno y NO SOBRA NINGUNA.

Y así siguiendo:

49 monedas	16 para cada uno	sobra una moneda
64 monedas	21 para cada uno	sobra una moneda
81 monedas	27 para cada uno	no sobra ninguna moneda

100 monedas	33 para cada uno	sobra una moneda
121 monedas	40 para cada uno	sobra una moneda
144 monedas	48 para cada uno	no sobra ninguna moneda
169 monedas	56 para cada uno	sobra una moneda

Y acá paro. ¿Qué se está preguntando usted en este momento? ¿Qué es lo que uno tiene *derecho* a *conjeturar*? En principio, cuando uno los divide por tres *todos* estos 'cuadrados', o bien no sobra ninguna moneda, o bien sobra *una*, pero en ninguno de los casos que hemos revisado ¡sobran dos monedas!

¿Será verdad que *no importa cuál sea el cuadrado **siempre*** sucederá lo mismo? Es decir, ¿será verdad que *nunca* sobran dos monedas?

Si es así, el enigma está resuelto. El dueño de casa sabe que *no pudieron haber entrado tres personas y distribuirse las monedas en partes iguales y que sobraran dos.* De acuerdo, pero... ¿cómo hacemos para demostrar que *siempre* pasa lo mismo?

Y acá es donde necesito que me acompañe en el razonamiento.

Piense conmigo lo siguiente: los números naturales {1, 2, 3, 4, 5,…} se dividen en pares e impares. En eso estamos todos de acuerdo. Pero, ¿cuáles son los pares y cuáles los impares? Los pares son los que, al dividirlos por dos, *no sobra nada*, o lo que es lo mismo decir, *el resto es cero*.

En cambio, al dividir los números impares por dos, *sobra uno*. Por ejemplo, 17 es un número impar, porque al dividirlo por 2 (el cociente es 8), pero el RESTO es uno.

O sea, los números naturales se dividen en dos categorías excluyentes: pares e impares. Unos son los que al dividirlos por dos tienen resto cero, y los otros son los que al dividirlos por dos tienen resto uno.

De la misma forma que uno separa los números naturales en dos bolsas (los de resto cero y los de resto uno), también podemos separar los mismos números en tres bolsas que resultan del resto que tienen al dividirlos por tres.

Al dividir un número cualquiera por el número tres, se obtienen tres posibles restos: resto cero, resto uno y resto dos.

Por ejemplo, 17 tiene resto *dos* al dividirlo por tres (haga la cuenta usted para convencerse). Es que 17 dividido tres es igual a cinco, pero sobran dos.

Por otro lado, 25 tiene resto *uno* al dividirlo por tres, ya que 25 dividido tres es igual a ocho, pero sobra uno.

Y finalmente, todos los múltiplos de tres, como por ejemplo el 36, tienen resto *cero* al ser divididos por tres.

Esto permite entonces, dividir al conjunto de los números naturales en tres categorías 'disjuntas' (o sea, no hay números que estén en dos bolsas al mismo tiempo): los que tienen resto 'cero', resto 'uno' y resto 'dos'.

Lo interesante ahora es proponerse pensar lo siguiente: ¿será verdad que todos los *cuadrados* están o bien en la bolsa que tiene resto *cero* o la que tiene resto *uno*?

Si así fuera, listo. Eso terminaría por demostrar que el mayordomo fue quien se quedó con las monedas.

¿Cómo hacer para terminar de convencernos?

Fíjese lo siguiente. Cualquier número que sea un *cuadrado* es el resultado de elevar un número cualquier al cuadrado. Ahora bien: estos números pueden tener resto cero, resto uno o resto dos.

Si tienen resto cero, es porque se escriben de la forma: $3 \times n$ (ya que tienen que ser múltiplos de 3).

Si uno 'eleva al cuadrado' un número que sea múltiplo de tres o que tenga resto cero al dividirlo por tres, se obtiene lo siguiente:

$$(3 \times n)^2 = 9 \times n^2$$

Pero lo notable de este hecho es que el número $9 \times n^2$ es *también* múltiplo de tres. Por lo tanto, *tiene también resto cero*.

Sigamos explorando. Si ahora elevo al cuadrado un número que tenga resto *uno* al dividirlo por tres, el número se escribe así: $3 \times n + 1$.

Fíjese que cualquier número que tenga resto *uno* al dividirlo por tres se escribe de esa forma.

Luego, al elevarlo al cuadrado se tiene:

$$(3 \times n + 1)^2 = 9 \times n^2 + 6 \times n + 1$$

Y este último número se puede escribir también así:

$$9 \times n^2 + 6 \times n + 1 = 3(3 \times n^2 + 2 \times n) + 1,$$

o sea, es un múltiplo de *tres* más uno. Es decir, tiene resto uno.

Por último, si el número original tiene resto dos, es porque se escribe así:

$$3 \times n + 2$$

Al elevarlo al cuadrado, se tiene:

$$(3 \times n + 2)^2 = 9 \times n^2 + 12 \times n + 4 = 9 \times n^2$$
$$+ 12 \times n + (3 + 1) = 3(3 \times n^2 + 4 \times n + 1) +1$$

Por lo tanto, este número *también* tiene resto uno.

Moraleja

Cualquier *cuadrado* es un número que tiene resto cero o uno al dividirlo por tres y, por lo tanto, si las monedas estaban distribuidas en un cuadrado, ¡no hay forma que hubieran sobrado dos al dividirlas entre tres!

El magnate tenía razón; el mayordomo estará, a partir de ahora, fuertemente sospechado de haber sido quien se quedó con las monedas.

Una vez más, una liebre y una tortuga

Parece apropiado hablar de liebres y tortugas en un libro de estas características. Es que se ha escrito tanto sobre quién gana las potenciales carreras que habrían de correr… Más aún: uno sospecha que la liebre *tiene* que ganar siempre, pero súbitamente descubre que no era necesariamente cierto y hay que replantearse todo lo que uno conjeturaba y/o sospechaba, porque la matemática o la física o 'algo' aparece en el medio y destroza cualquier percepción que uno pudiera tener.

Bueno, en este caso, quiero plantear *otro* de estos problemas pero no estoy seguro de que la solución destruya lo que uno *cree* que debería pasar.

Suponga que usted tiene una tortuga y una liebre que van a correr una carrera de un kilómetro. Pero lo notable es que ambas se pusieron de acuerdo en avanzar lo que usted les diga dependiendo del siguiente hecho: usted va a tirar un dado (que no está cargado y en donde se supone que la probabilidad de que salga cualquiera de sus caras es la misma).

Si el resultado es cualquier número entre 1 y 4, entonces la tortuga se mueve ese número de metros. O sea, si sale el número 2, la tortuga avanza dos metros. Si sale el número 4, avanza cuatro metros.

En cambio, si sale o bien 5 o bien 6, entonces la liebre avanza o bien 5 o bien 6 metros.

Si, como decía antes, van a correr una carrera de un kilómetro y todo dependerá de lo que suceda al tirar el dado, usted, ¿quién apostaría que gana la carrera?, ¿la liebre o la tortuga?

¿Quiere pensar el problema usted? ¿Qué convendrá hacer?

Solución

Fíjese en el siguiente argumento: como el dado puede mostrar cualquiera de sus seis caras con igual probabilidad, la tortuga se moverá a un promedio de:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 0 + 0)/6 = 1{,}66666\ldots \text{ metros por tiro}$$

Por otro lado, la liebre se moverá a un promedio de:

$$(0 + 0 + 0 + 0 + 5 + 6)/6 = 1{,}8333\ldots \text{ metros por tiro}$$

Luego, tal como uno supone, *siempre* conviene apostar a la liebre ya que aunque la probabilidad de que salgan los números que la favorecen son dos sobre cuatro que tiene la tortuga, la cantidad de metros que le tocan caminar permiten apostar que a lo largo del kilómetro ella va a llegar antes que la tortuga.

Esta vez, aunque sea en este libro y en esta historia, ¡gana la liebre!

¡Por fin!

Un auto en la ruta

Este problema es entretenido para pensar si uno está dentro de un auto (manejando o no) en una ruta que tiene algunas dificultades por la antigüedad de los mojones que van mostrando los kilómetros recorridos.

Justamente, se sabe que el auto va a una velocidad *constante* a lo largo de todo su trayecto. En un momento determinado pasa por un mojón en el que se ve un número de dos dígitos AB (que no se puede leer bien).

Una hora después, pasa ahora por otro mojón (obviamente), también de dos dígitos, pero lo curioso es que ahora los dígitos están al revés: BA.

Y para hacer las cosas aún más entretenidas, una hora más tarde, el auto pasa ahora por un tercer mojón, pero ahora de tres dígitos de los que se puede leer A0B (el segundo es un número *cero*).

Tengo dos preguntas:

1) ¿Qué números tenían los mojones?
2) ¿A qué velocidad iba el auto?

¿Se podrán contestar?

Primera observación: como el auto pasa de AB a BA en una hora, eso significa que su velocidad *no puede llegar a 100 kilómetros por hora*. Si no, el segundo mojón no puede tener nada más que dos dígitos.

Por otro lado, como el auto no recorrió más de 100 kilómetros en la primera hora (ya que los mojones AB y BA son ambos números por *debajo* de 100), eso significa que cuando el auto recorra la segunda hora, no podrá llegar hasta los 200 kilómetros y, por lo tanto, el mojón de tres dígitos *tiene que empezar con el número uno*. De esto, se deduce inmediatamente que A = 1.

Frente a este descubrimiento, ahora el problema se puede replantear así:

Se tiene un auto viajando a velocidad constante. En un momento determinado pasa por un mojón de dos dígitos 1B.

A la hora, pasa por un mojón así: B1.

Y una hora más tarde, pasa por un mojón 10B.

Y las preguntas siguen siendo las mismas:

1) ¿Qué números tenían los mojones?
2) ¿A qué velocidad iba el auto?

Fíjese que la distancia que hay entre el primer y segundo mojón (1B y B1) tiene que ser la misma que entre el segundo y el tercero: B1 y 10B.

Voy a escribir los números de dos y tres dígitos que indican los mojones de esta forma:

$$1B = 10 + B$$
$$B1 = B \times 10 + 1$$

$$10B = 100 + B$$[98]

Luego, si *resto* el tercer número (10B) menos el primero (1B) se obtiene la cantidad de kilómetros que el auto hizo en *dos* horas.

$$(100 + B) - (10 + B) = 90$$

Ahora bien, el auto recorrió 90 kilómetros en dos horas, lo que implica que iba a una velocidad de 45 kilómetros por hora. Con esto, ya hemos contestado la segunda pregunta.

Para completar la primera pregunta, hace falta descubrir cuál es el valor de B.

La distancia entre el primer y segundo mojón es:

$$B1 - 1B = (10B + 1) - (10 + B) = 9 \times B - 9 \qquad (*)$$

Por otro lado, la distancia entre el segundo y tercer mojón es:

$$10B - B1 = (100 + B) - (Bx10 + 1) = 99 - 9 \times B \qquad (**)$$

Pero (*) y (**) tienen que ser iguales porque son las distancias recorridas por el auto en una hora. Luego

$$9 \times B - 9 = 99 - 9 \times B$$

98. Espero que se entienda que en este caso, suponiendo (por un instante) que B fuera el *número cuatro*, entonces el número 10B sería el número 104 y, por lo tanto, se escribiría como (100 + B), o sea (100 + 4). De la misma forma, el número 1B sería el número 14 que se escribiría como (10 + B), o sea, (10 + 4); y por otro lado, el número B1 sería el número 41 y se escribiría como (Bx10 + 1), es decir (4x10 + 1).

De acá se deduce que

$$18 \times B = 108,$$

y despejando B, se tiene que:

$$B = 108/18 = 6$$

Y esto concluye el problema: los mojones eran 16, 61 y 106, y el auto viajaba a una velocidad de 45 kilómetros por hora.

Los verduleros y el número pi

El siguiente es un problema extraordinario para ligar lo que parece una trivialidad (la forma de atar algunas verduras, como los espárragos) con el número pi (π).

Suponga que un verdulero tiene la costumbre de atar sus espárragos con un hilo de 30 centímetros de longitud. De esa forma, lograba agrupar un conjunto de espárragos que vendía a $ 10 (me refiero al total de los espárragos que quedaban atados de esa forma).

Como los manojos le parecían muy chicos y era una de las verduras que más vendía, decidió junto con uno de sus hijos, duplicar el hilo con el que los ataba. Es decir, en lugar de 30 centímetros, los hilos pasaron a ser de 60 centímetros de largo.

Pregunta: una vez atados los espárragos con los hilos de nueva longitud, ¿a cuánto los tenía que cobrar? El hijo le proponía $ 20. El padre se oponía. Usted, ¿qué sugiere?

Respuesta

Acá es donde quiero hacer algunas reflexiones junto con usted. Más aún: antes de buscar la solución al problema, querría plantearle un problema alternativo que —creo— le dará un indicio de cuál debería ser el camino que tenemos que buscar para responder.

Fíjese en lo siguiente: suponga que usted entra en una habitación que tiene tres metros de lado. Es decir, una habitación de 3×3. ¿Qué superficie tiene?

Tal como usted supone, 9 metros cuadrados. Ahora, *dupliquemos* el tamaño de los lados. Es decir, en lugar de entrar en una habitación que mide 3×3, entremos en una de 6×6. ¿Qué superficie tiene ahora la habitación? Sí, efectivamente, 36 metros cuadrados.

¿Qué le sugiere este ejemplo intermedio? Lo que acabamos de descubrir —al menos en este caso— es que al haber duplicado los lados de la habitación, el área no se duplicó... sino que se ¡cuadruplicó! Pasó de 9 metros cuadrados a 36 (y no a 18 como uno podría haber supuesto, en forma equivocada, claro está).

¿Pasará lo mismo en el caso de los espárragos y el hilo?

Para poder dar respuesta a la pregunta original del problema, lo que hay que tratar de ver es cómo se modifica el área que encierra el hilo de 60 centímetros cuando uno la compara con el área que encierra el hilo de 30 centímetros.

¿Cómo se calcula el área de un círculo? La fórmula es la que aprendimos todos hace muchos años. Si el círculo tiene un radio que voy a llamar R, el área se calcula usando la fórmula: pi $\times$ (Radio al cuadrado).

Por otro lado, ¿cómo se calcula la longitud de una circunferencia de radio R?

Se calcula usando esta fórmula:

$$\begin{aligned}(\text{Longitud de la circunferencia de radio R}) &= \pi \times (\text{diámetro}) \\ &= \pi \times (2R)\end{aligned}$$

Luego, si llamo L a la circunferencia de radio R, se obtiene:

$$L = \pi \times (2R)$$

En el caso que nos ocupa, tenemos un hilo de 30 centímetros de longitud (que transformamos en una circunferencia de que mide 30 centímetros). Por lo tanto,

$$30 = \pi \times (2R) \qquad (*)$$

Si ahora duplicamos la longitud del hilo, ¿en cuánto se modifica el radio?

$$60 = \pi \times (2R'), \qquad (**)$$

donde R' indica ahora el nuevo radio. Pero fíjese que de las dos igualdades (*) y (**), se deduce que

$$60 = 30 \times 2 = \{\pi \times (2R)\} \times 2 = \{\pi \times 2(2R)\},$$

y de esta forma descubrimos que el radio R' = 2R, o sea, el radio se duplica.

Dicho esto, creo que ahora estamos en condiciones de contestar la pregunta sobre los espárragos.

Lo que uno puede hacer es verificar en cuánto se modifica el área de un círculo, cuando el radio se duplica.

Para calcular el área de un círculo de radio R, la fórmula es:

$$\pi \times R^2$$

El área del círculo de radio (2R) es entonces:

$$\pi \times (2R)^2 = \pi \times 4R^2 = 4 \times \{\pi \times R^2\}$$

¡Y ésta es la conclusión que uno quería sacar! Así se muestra que el área del nuevo círculo (de radio 2R) tiene ahora un área que es CUATRO veces el área del círculo de radio R.

La moraleja de esta historia es que al duplicar el radio de una circunferencia, la longitud también se duplica; pero cuando uno duplica el radio, ¡el área se cuadruplica!

Luego, si cobraban $ 10 por los espárragos encerrados por un hilo de 30 centímetros de longitud, ahora tienen que cobrar $ 40 por los espárragos que encierra un hilo de 60 centímetros.

El padre husmeaba que eso debería ser así, porque él sabía perfectamente que la cantidad de espárragos que necesitaba incluir no era dos veces los que usaba para dos manojos, sino que necesitaba ¡cuatro veces el número de espárragos![99]

---

99. En realidad, si uno quisiera ser *técnicamente correcto*, el número de espárragos no se cuadruplica *exactamente* porque no estoy considerando los espacios vacíos. Es decir, si los espárragos fueran como 'escarbadientes' o 'palillos', el número se aproximaría al cuádruple, pero aun allí habría lugares vacíos. En la medida en que los espárragos se fueran haciendo cada vez más *finitos*, como si fueran *líneas*, el número que uno podría encerrar con el nuevo hilo se acercaría cada vez más al *cuádruple*. La idea que yo tengo al presentar este problema es mostrar que cuando uno multiplica por dos la longitud, el área se cuadruplica. Y si usted tiene ganas de seguir pensando en esta dirección, puede tratar de contestar la pregunta: ¿y con el volumen? Por ejemplo: suponga que ahora tiene un cubo cuyo volumen es de un metro cúbico (un cubo de un metro de largo, ancho y alto). Duplique las dimensiones: ahora suponga que tiene un cubo de dos metros de largo, ancho y alto. ¿En cuánto se modificó el volumen? Piénselo usted, pero verá que ahora el volumen se multiplicó por *¡ocho!*

Y eso contesta la pregunta original y pone sobre la mesa entonces algo muy importante: ante variaciones *lineales* las longitudes *aumentan proporcionalmente*; en cambio las variaciones lineales generan *aumentos cuadráticos* en las áreas.

Esta última frase parece complicada y muy difícil de entender. Sin embargo, si la relee y le presta atención, verá que es una forma diferente de escribir lo que dedujimos sobre los espárragos. ¿No le parece?

Índice