Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física
Fabián Cerda N.

Estrategias para enfrentar problemas

- Empezar por lo fácil

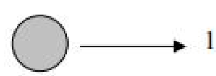
Simplificar o buscar casos particulares . Elegir valores especiales para ejemplificar el problema y, a partir de ellos, intentar obtener alguna sugerencia para la solución.

- Ejemplo:

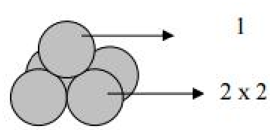
BALAS DE CAÑÓN:
En la época en que los cañones lanzaban balas, éstas eran almacenadas en parques de artillería en forma de pirámides de base cuadrada; cada lado del cuadrado de la base contaba con 15 balas. ¿Cuál era el número de balas por pirámide?

Resolución:
La dificultad inicial parece grande y el tamaño de la pirámide excesivo. Si fuera más pequeña parece que sería más fácil. Podemos tratar de simplificar buscando primero cuántas balas hay en pirámides más pequeñas. Manos a la obra.

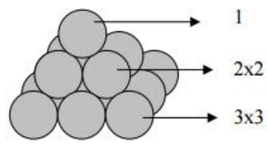
En una pirámide de base 1 tenemos sólo una bala



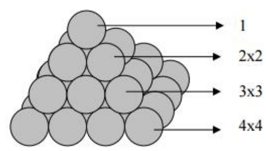
En una pirámide de base 2 tenemos las cuatro de la base y la del nivel superior: $2^2 + 1 = 5$ balas.



En una pirámide de base 3 tenemos 3x3 en la base, 2x2 en el siguiente nivel y 1 en el tercero.
$3^2 + 2^2 + 1 = 14$ balas



En una pirámide de base 4 tenemos 4x4 en la base 3x3 en el primer nivel 2x2 en el segundo y 1 en el último:
$4^2 + 3^2 + 2^2 + 1 = 30$ balas

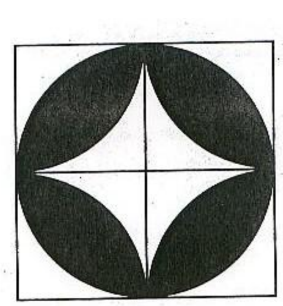


Ya vemos cual será la ley de formación y podemos deducir que en el caso de una pirámide de base 15 tendremos:
$15^2 + 14^2 + 13^2 + ... + 3^2 + 2^2 + 1 = 1.240$ balas

• Modificar el problema

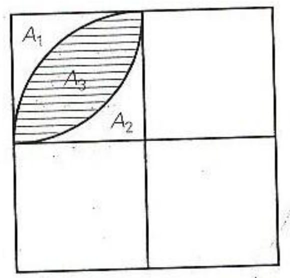
El procedimiento consiste en dividir el problema de forma consciente y sistemática en sus partes componentes y resolver cada una de esas partes.
- Ejemplo

Calcular el área de la zona rayada de la figura,sabiendo que el lado del cuadrado mide 10cm.



Solución

Nos proponemos pequeñas metas al descomponer el problema en pequeños problemas. Dividimos un cuadrante del cuadrado en zonas que llamamos A_1, A_2, A_3; comprobamos que $A_1 = A_2 = \frac{10^2(4-\pi)}{16}cm^2$ y como $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{10^2}{4}cm^2$ entonces $A_3 = \dfrac{10^2}{8}(\pi - 2)cm^2$



Por tanto, la parte rayada es 4 veces $A_3 = \dfrac{10^2}{2}(\pi - 2)cm^2$

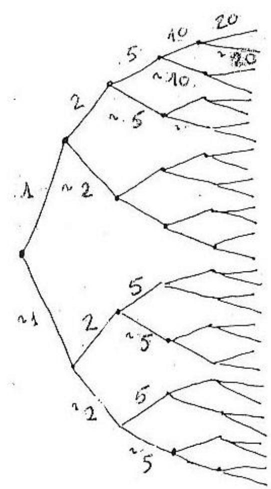
• Organizar la información:

Siempre que sea posible, hacer un esquema, una tabla, una figura, un diagrama.

Ejemplo: En tu bolsillo tienes 5 monedas: 1 Euro, 2 Euros, 5 Euros, 10 Euros y 20 euros. ¿Cuántas cantidades distintas puedes formar?

Solución

Si empezamos una búsqueda poco organizada, seguramente nos liaremos, así $1 + 2 = 3$; $1 + 10 = 11$; .... $10 + 20 = 30$, etc. Pero ¿Cuántas combinaciones hay? Un esquema como el siguiente nos lleva a la solución.



- Proceder por inducción

Considerar casos particulares con la esperanza de identificar (intuir) un patrón o propiedades generales.

Ejemplo: Observa que: 1+3 = 4 ; 1+3+5 = 9; 1+3+5+7 = 16; 1+3+5+7+9 =25 ¿Cuál es la ley general? Exprésala de manera conveniente y pruébala.

Solución:

Según se observa en las relaciones anteriores, parece que la suma de los números impares consecutivos es un número cuadrado perfecto y además tiene relación con el número de sumandos. La regla es $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n + 1) = n^2$

Utilizando la inducción matemática, tratemos de demostrarla. Veamos que se cumple la igualdad anterior cuando n vale 1, sustituyendo en ambas partes $n = 1$ se obtiene $1 = 1^2$ lo que es cierto
Supongamos ahora que la igualdad es cierta para un número natural cualquiera k, se tiene que $1+3+5+7+ ....+(2k+1) = k2$ y veamos si se cumple para $n = k+1$. En este caso tenemos,$1+3+5+7++...+(2k-1)+ = +(2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ lo que es verdad.

- Suponer el problema resuelto (trabajar hacia atrás)

Se utiliza en los casos en los que conocemos lo que denominamos objetivo o resultado final y el problema consiste en determinar el conjunto correcto de operaciones que nos llevará desde el estado inicial hasta el objetivo.

Ejemplo

Juego para tres: Tres personas deciden jugar a tirar monedas a ver si coinciden en cara o cruz. Cada uno arroja una moneda, y el que no coincide con los otros dos pierde. El perdedor debe doblar la cantidad de dinero que cada componente tenga en ese momento. Después de tres jugadas, cada jugador ha perdido una vez y tiene 240 pts. ¿Cuánto tenía cada uno al principio?

Solución

Desarrollo del juego	Jugador nº 1	Jugador nº 2	Jugador nº 3	
Después de la 3ª jugada	240	240	240	
Después de la 2ª jugada	120	120	480	Perdió el 3º
Después de la 1ª jugada	60	420	240	Perdió el 2º
Al principio	390	210	120	Perdió el 1º

• Verificar la validez de la información contenida en el problema. Si las condiciones del problema no se cumplen, ¿qué pasa?

Ejemplo:

El peso perdido

Si tres amigos van a comer y a la hora de pagar la cuenta les cobran 30 pesos.,cada uno paga 10 pesos.el mesero toma el dinero y al ir a pagar a caja el cajero le dice que solo son 25 pesos y le regresa 5 pesos al mesero de los cuales toma 2 pesos y les regresa 1 peso a cada uno.Luego entonces si en total los tres amigos amigos pagaron 9 pesos cada uno y $9 \cdot 3 = 27 + 2$ pesos del mesero $= 29$ pesos. Entonces ¿Donde quedó el peso?

Solución

No se puede sumar 27 pesos + 2 pesos porque los 2 pesos con los que se quedó el mesero son parte de los 27 pesos que pagaron. Por lo tanto lo correcto es decir $9 \cdot 3 = 27$ pesos luego sumando los 3 pesos que le devolvieron resulta $27 + 3 = 30$ pesos.

• Considerar problemas equivalentes:

a) Reemplazar las condiciones por otras equivalentes

Consiste en reemplazar o sustituir las condiciones iniciales por otras equivalentes que nos resulten mas familiares para solucionar el problema.

Ejemplo

De una pieza de tela de 48 m se cortan $\frac{36}{48}$. ¿Cuántos metros mide el trozo restante?

Solución

Note que $\frac{36}{48}$ es equivalente a $\frac{3}{4}$.
Luego necesitamos calcular cuanto equivale $\frac{3}{4}$ de la tela que corresponde a $\frac{3}{4} \cdot 48 = 36$. Finalmente solo nos basta calcular cuanto miden los restos restantes de la tela

$48 - 36 = 12$m

b)Recombinar los elementos del problema de diferentes maneras.

Ejemplo

¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, vicepresidente y tesorero de un club de fútbol sabiendo que hay 12 posibles candidatos?

Solución

Para los cargos de :
Presidente: Existen 12 opciones
vicepresidente:Existen 11 opciones
tesorero:Existen 10 opciones

Por lo tanto la formas diferentes de cubrir los puestos se calcula como:
$12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ formas posibles

c) Introducir elementos auxiliares.

Ejemplo

Construir un triángulo dados, un ángulo, la altura al ángulo dado y el perímetro

Solución

Si llamamos A al ángulo conocido y a,b,c los lados del triángulo con a+b+c = P (p = perímetro)
Supongamos el problema resuelto. A la base le añadimos dos segmentos de longitudes b y c en la misma dirección del lado a (uno derecha y otro izquierda).Con esta base a+b+c que es conocida, construimos un triangulo de la misma altura de la solución de esta forma el triángulo se encuentra construido por dos triángulos isósceles cuyos lados son b y c y los tres forman el triángulo de base p

d) Reformular el problema:

i) Cambiar la perspectiva o notación

Ejemplo

La masa del Sol es, aproximadamente, 330000 veces la de la Tierra. Si la masa de la Tierra es $6 \cdot 10^{24}$ kg, calcula la masa del Sol.

Solución

Es conveniente trabajar todo en notación científica, note que $333000 = 3,3 \cdot 10^5$
Ahora solo basta hacer la multiplicación
$(3,3 \cdot 10^5) \cdot (6 \cdot 10^{24}) = 19,8 \cdot 10^{29} = 1,98 \cdot 10^{30}$ kg

ii) Intentar argumentos por contradicción

Ejemplo

Se sabe que entre los triángulos inscritos en una circunferencia fija, hay uno con área máxima. Muestra que es equilátero

Solución

Supongamos que no es equilátero el de área máxima, tomamemos el triángulo que no es equilátero y alcanza el máximo. Como no es equilátero tiene par de lados distintos. Desde el punto medio del tercer lado levantamos una perpendicular, prolongando la perpendicular vemos que intercepta a la circunferencia en un punto dicho punto es el punto mas lejano a la cuerda de la circunferencia. El triángulo formado por el punto mas lejano a la cuerda y la cuerda tiene mayor área que el triángulo inicial pues la base es igual pero tiene mayor altura (contradicción). Por lo tanto se alcanza en el equilátero.

iii)Suponiendo que se tiene la solución, determinar sus propiedades.

Ejemplo

Buscar un número tal que si le sumamos su cuadrado resulte 30

Solución

No sabemos cuál es, pero procedemos como si lo supiéramos. Lo llamamos x e y sabemos que tiene que pasar que $x + x^2 = 30$ nos las ingeniamos para hallar x. Resultando que las soluciones son: 5 y -6

• Considerar leves modificaciones que amplíen el problema:

Construir un problema análogo con menos variables.

Ejemplo

¿Qué número falta?

16(15)7
4(5)3
10(?)4

De las premisas

$$\frac{16}{2} + 7 \Rightarrow 8 + 7 = 15$$

$$\frac{4}{2} + 3 \Rightarrow 2 + 3 = 5$$

Por analogía

$$\frac{10}{2} + 4 \Rightarrow 5 + 4 = 9$$

• Tratar de usar cualquier problema relacionado que tenga similar: forma, datos, conclusiones

Ejemplo

Juan está leyendo un libro de 498 páginas. El lunes leyó 120 páginas. El martes leyó 54 páginas más. El miércoles solo alcanzó a leer 25 páginas más. ¿Cuántas páginas del libro ha leído Juan?

Usaremos un problema similar pero mas fácil que tiene igual forma:

Camilo compró 20 dulces. Al llegar a su casa le regalo 2 a su sobrina, 3 a su hermana y 1 a su mamá ¿Cuantos dulces regalo Camilo?

Resolución
Para resolverlo basta sumar los dulces que regalo Camilo

2+3+1 = 6 dulces

Volviendo al problema la solución corresponde a sumar la cantidad de páginas leidas por Juan

120+54+25 =199 páginas