1. Hallar $f(x,y)$ si $f(x+y, x-y) = xy + y^2$.

   Respuesta:

   Sean $u = x+y$ y $v = x-y$. Resolviendo este sistema se obtiene

   $$x = \frac{u+v}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{u-v}{2}.$$

   Luego,

   $$f(u,v) = \frac{u+v}{2} \cdot \frac{u-v}{2} + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \frac{u^2-uv}{2}.$$

   Finalmente, volviendo a las *variables típicas*, es decir, cambiando u por x y v por y, se tiene:

   $$f(x,y) = \frac{x^2-xy}{2}$$

2. Sea $z = f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

   a) Determinar el dominio de la función $z = f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$, y representarlo gráficamente.

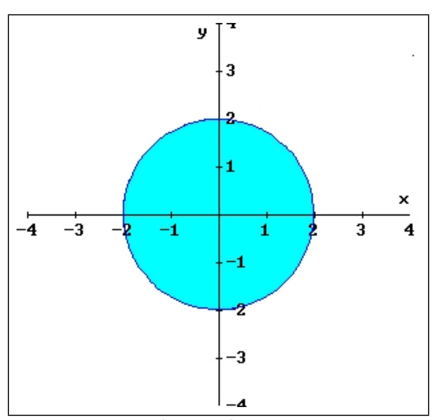
   b) Determinar y describir el conjunto $\{(x,y) \in Dom(f) / \; f(x,y) = 1\}$.

   Respuesta:

   a) Dominio de f:

   $$\begin{aligned} D = Dom(f) = & \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, 4 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + y^2 \leq 4\} \\ = & \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + y^2 \leq 2^2\} \end{aligned}$$

   El dominio de f se representa gráficamente por la región del plano, encerrada o limitada por la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2, incluyendo los puntos de la circunferencia, achurada en la siguiente figura:



$x^2 + y^2 \leq 4$

b) $\{(x,y) \in D / \, f(x,y) = 1\} = \{(x,y) \in D / \, x^2 + y^2 = 3\}$, que contiene a todos los puntos de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{3}$.

3. Sea $z = f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-y+1}}{x+1}$.

   a) Determinar el dominio de f.

   b) Determinar si 4 pertenece al recorrido de f.

   c) Considerar los puntos del dominio de f que se encuentran en la recta $x = 5$:

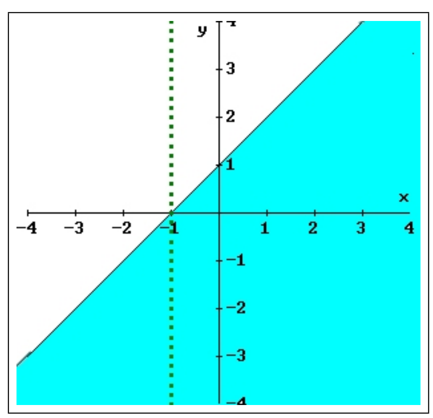
   - Construir una tabla de valores de f, considerando $x = 5$ constante, variando la y, tal que $0 \leq y \leq 2$, en intervalos de 0,5.
   - Determinar todos los $y \in \mathbb{R}$, tales que $f(5,y)$ está definido.
   - Estudiar el comportamiento de f, si f es creciente o decreciente, en este conjunto de puntos.

Respuesta:

a) $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x - y + 1 \geq 0 \text{ y } x + 1 \neq 0\}$.

Luego, el dominio de f contiene a todos los puntos (x,y) del plano XY, que se encuentran *bajo* o en la recta $x - y + 1 = 0$, y que no se encuentran en la recta $x = -1$.

Representación gráfica del dominio de f.



$x - y + 1 \geq 0$

b) 4 pertenece al recorrido de $f \iff$ existe $(x,y) \in Dom(f)$ tal que $f(x,y) = 4$

Luego, hay que resolver la ecuación $\dfrac{\sqrt{x-y+1}}{x+1} = 4$.

$$\frac{\sqrt{x-y+1}}{x+1} = 4 \Longrightarrow \quad x - y + 1 = 16(x+1)^2$$

$$\iff \quad y = -16x^2 - 31x - 15$$

Por ejemplo, para $x = 0$, $y = -15$.
Como, $(0, -15) \in Dom(f)$ y $f(0, -15) = 4$, se concluye que 4 pertenece al recorrido de f.

c) Estudio de f en puntos del conjunto $A = \{(5, y)/y \in \mathbb{R}\} \cap Dom(f)$

- La tabla de valores de f pedida, es:

x	y	$f(x,y)$
5	0	0,40825
5	0,5	0,39087
5	1	0,37268
5	1,5	0,35355
5	2	0,33333

- $f(5, y)$ está definida para todo $y \in [-\infty, 6]$, ya que $f(5, y) = \frac{\sqrt{6-y}}{6}$.
- La función $z = f(5, y) = \frac{\sqrt{6-y}}{6}$ es una función en una variable. Usando métodos estudiados para funciones de una variable, se puede demostrar que, el comportamiento de f en los puntos $(5, y)$ del dominio de f, es decreciente. Justificar esta respuesta.

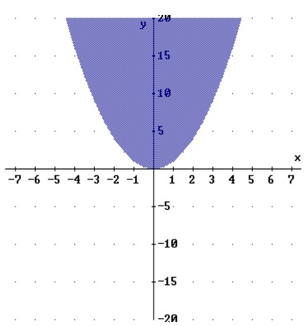
4. Sean f y g funciones de dos variables definidas por:

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}, \qquad g(x, y) = \sqrt{3x - y}$$

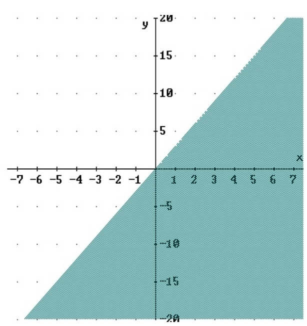
Determinar y graficar los $dom(f)$, $dom(g)$ y $dom(s)$, donde $s = f + g$.

Respuesta:

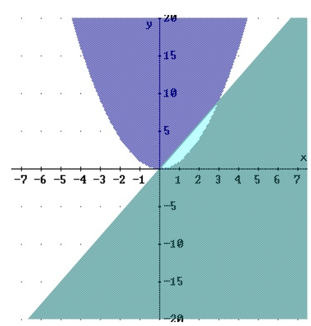
- $dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, y - x^2 \geq 0\}$
- $dom(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, 3x - y \geq 0\}$
- $Dom(s) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, y - x^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad 3x - y \geq 0\}$



Dominio de f



Dominio de g



Dominio de $s = f + g$

5. Sea f la función definida por $f(x, y) = 8 - x^2 - 2y$.

a) Determinar las curvas de intersección (trazas) de la superficie con cada plano coordenado.

b) Determinar y dibujar las curvas de nivel, en intervalos constantes de 2 unidades, a partir del -4 hasta el 4.

Respuesta:

a) La ecuación del plano XY es $z = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} z = 0 \\ z = 8 - x^2 - 2y \end{array}\right\} \Longrightarrow 8 - x^2 - 2y = 0$$

Por lo tanto, la traza determinada por el plano XY es una parábola, cuya ecuación es $8 - x^2 - 2y = 0$.

La ecuación del plano YZ es $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ z = 8 - x^2 - 2y \end{array}\right\} \Longrightarrow z = 8 - 2y$$

Luego, la traza determinada por el plano YZ es una recta, cuya ecuación es $z = 8 - 2y$.

La ecuación del plano XZ es $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ z = 8 - x^2 - 2y \end{array}\right\} \Longrightarrow z = 8 - x^2$$

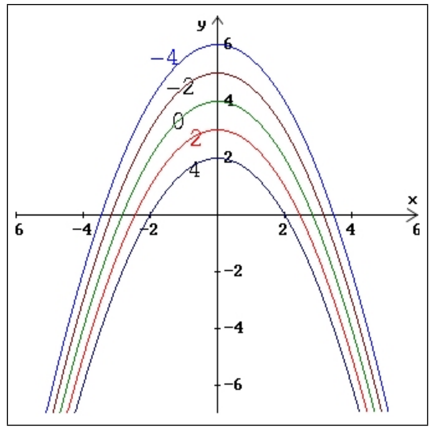
Luego, la traza determinada por el plano XZ es una parábola, cuya ecuación es $z = 8 - x^2$.

b) Las curvas de nivel pedidas corresponden a los siguientes valores de k: -4, -2, 0, 2 y 4, cuyas ecuaciones son respectivamente:

$$N_{-4}: \quad x^2 + 2y = 12, \qquad N_{-2}: \quad x^2 + 2y = 10 \qquad N_0: \quad x^2 + 2y = 8$$

$$N_2: \quad x^2 + 2y = 6 \qquad N_4: \quad x^2 + 2y = 4$$

El gráfico de cada curva de nivel, es una parábola en el plano XY.



Curvas de nivel

6. La siguiente tabla muestra el índice de calor (en °F) como una función de la temperatura y la humedad. El *índice de calor* es una temperatura que indica cuanto calor se siente como resultado de la combinación de estos dos factores. Es probable que se presente agotamiento por calor cuando el índice de calor llega a 105°F.

Temperatura (°F)

Humedad (%)	**70**	**75**	**80**	**85**	**90**	**95**	**100**	**105**	**110**	**115**
0	64	69	73	78	83	87	91	95	99	103
10	65	70	75	80	85	90	95	100	105	111
20	66	72	77	82	87	93	99	105	112	120
30	67	73	78	84	90	96	104	113	123	135
40	67	74	79	86	93	101	110	123	137	151
50	69	75	81	88	96	107	120	135	150	
60	70	76	82	90	100	114	132	149		

a) Si la temperatura es de 80°F y la humedad es de 50 %, ¿cuánto calor se siente?.

b) ¿A qué humedad se siente 90°F como 90°F?

c) Hacer una tabla que muestre la temperatura a la que el agotamiento por calor se convierte en peligro, como función de la humedad.

Respuesta:

a) Por inspección de la tabla:

Temperatura (°F)

Humedad (%)	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
0	64	69	73	78	83	87	91	95	99	103
10	65	70	75	80	85	90	95	100	105	111
20	66	72	77	82	87	93	99	105	112	120
30	67	73	78	84	90	96	104	113	123	135
40	67	74	79	86	93	101	110	123	137	151
50	69	75	81	88	96	107	120	135	150	
60	70	76	82	90	100	114	132	149		

Luego, se siente un calor de 81°F, si la temperatura es de 80°F y la humedad es de 50 %.

b) Por inspección de la tabla:

Temperatura (°F)

Humedad (%)	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
0	64	69	73	78	83	87	91	95	99	103
10	65	70	75	80	85	90	95	100	105	111
20	66	72	77	82	87	93	99	105	112	120
30	67	73	78	84	90	96	104	113	123	135
40	67	74	79	86	93	101	110	123	137	151
50	69	75	81	88	96	107	120	135	150	
60	70	76	82	90	100	114	132	149		

Luego, a 30 % de humedad,se siente 90°F como 90°F.

c) Por inspección de la tabla:

Temperatura (°F)

Humedad (%)	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
0	64	69	73	78	83	87	91	95	99	103
10	65	70	75	80	85	90	95	100	105	111
20	66	72	77	82	87	93	99	105	112	120
30	67	73	78	84	90	96	104	113	123	135
40	67	74	79	86	93	101	110	123	137	151
50	69	75	81	88	96	107	120	135	150	
60	70	76	82	90	100	114	132	149		

Luego, la tabla que muestra la temperatura (aproximada) a la que el agotamiento por calor se convierte en peligro, como función de la humedad, es:

h	0	10	20	30	40	50	60
t	116	110	105	101	96	94	96

7. Sea f la función de tres variables definida por:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x + y - 2z}$$

   a) Determinar y describir el dominio de f.

   b) Describir la superficie de nivel para $k = 2$

   Respuesta:

   a) $Dom(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x + y - 2z \neq 0\}$, que contiene a todas las ternas ordenadas (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ que no pertenecen al plano $x + y - 2z = 0$.

   b) La superficie de nivel N_2 es el conjunto de todas las ternas (x, y, z) pertenecientes al dominio de f, que satisfacen la ecuación $\dfrac{1}{x + y - 2z} = 2$.

   Gráficamente, N_2 se representa en el espacio por el plano cuya ecuación es $x + y - 2z = \frac{1}{2}$.