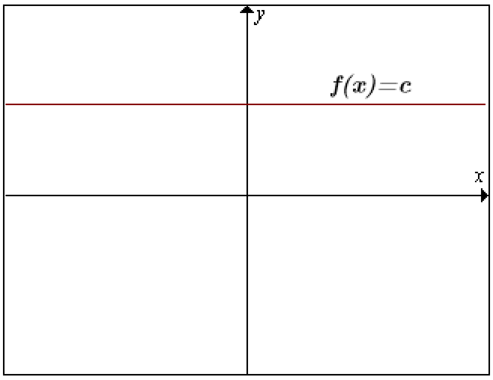
3.1. Función constante

Una *función constante* es aquella que tiene la forma $y=f(x)=c$, donde c es un número real fijo.

El *dominio* de una *función* constante es *IR*, y su *recorrido* es $\{c\}$. Su gráfica es una recta paralela (o coincidente) al eje *X*.



3.2. Función lineal

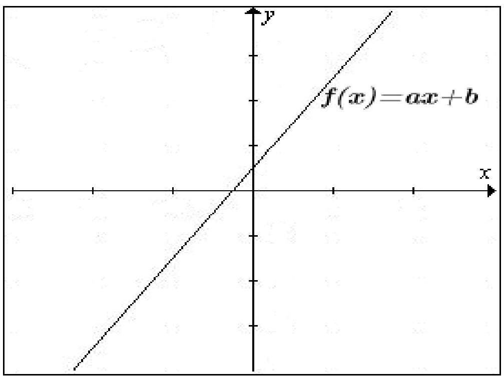
Una función lineal es aquella que tiene la forma, o puede ser llevada a la forma:

$$y = f(x) = ax + b, \text{ con } a \neq 0, \; a, b \in IR$$

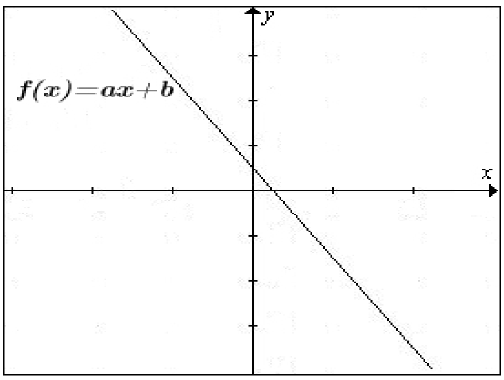
Propiedades

1. El gráfico de una función lineal es siempre una línea recta.
2. El coeficiente *a* es la pendiente de la recta $y=ax+b$.

   Cuando $a>0$, la función lineal es *creciente*, es decir, su gráfico es una recta que sube de izquierda a derecha.
   Cuando $a<0$, la función lineal es *decreciente*, es decir, su gráfico es una recta que baja de izquierda a derecha.



Gráfica de $y = ax + b, \; a > 0$



Gráfica de $y = ax + b, \; a < 0$

3. El dominio y el recorrido de una función lineal es *IR*.
4. La función lineal $y = f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$ es inyectiva (y sobre), por lo tanto, tiene inversa. Su inversa es también una función lineal: $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Observación. *Ecuación general de la recta*

La ecuación general de una recta es $Ax+By+C=0$ con $A \neq 0$ o $B \neq 0$.

- Cuando $B=0$, la gráfica es una recta paralela al eje Y o coincidente con este eje.
- Cuando $B \neq 0$, la gráfica es una recta que tiene pendiente igual a $m = -\frac{A}{B}$.

3.3. Función cuadrática

Una función cuadrática es aquella que tiene la forma, o puede ser llevada a la forma:

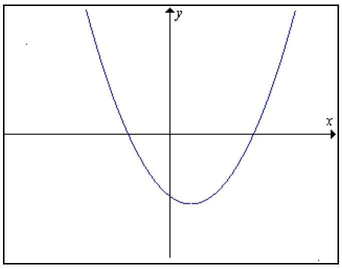
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0, \; a,b,c \in IR$$

Propiedades de una función cuadrática

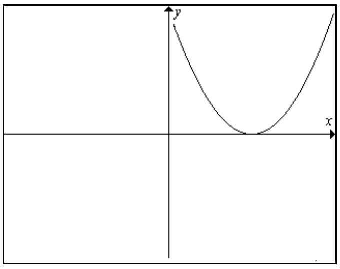
1. El gráfico de una función cuadrática es una *parábola*.
2. La gráfica de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ intercepta al eje *Y* en el punto $(0,c)$

   La gráfica de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ intercepta al eje *X* cuando $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. En tal caso, las abscisas de los puntos de intersección son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Su gráfica es una parábola cuyo vértice es el punto $\left(-\frac{b}{2a},\, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
4. La recta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ es una recta eje de simetría de su gráfico.
5. Si $a>0$ la parábola se abre hacia arriba, y si $a<0$ se abre hacia abajo.

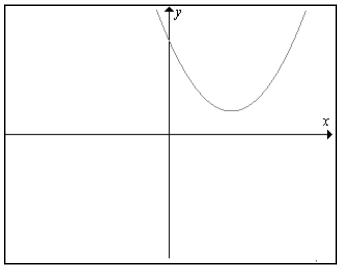
Gráfica de una función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$



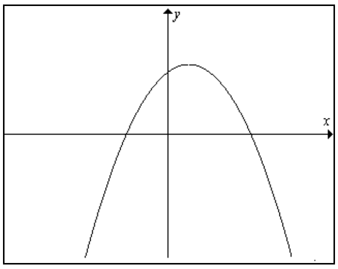
$a > 0, \ \Delta > 0$



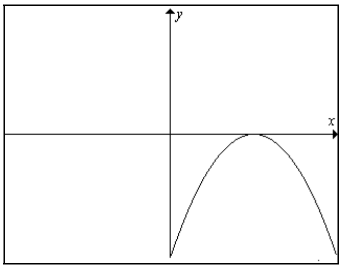
$a > 0, \ \Delta = 0$



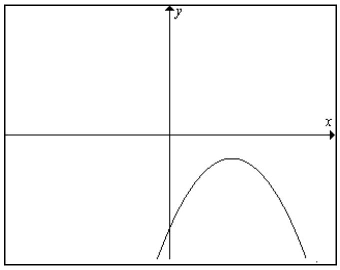
$a > 0, \ \Delta < 0$



$a < 0, \ \Delta > 0$



$a < 0, \ \Delta = 0$



$a < 0, \ \Delta < 0$

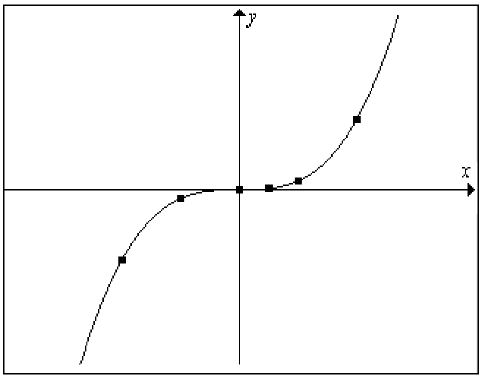
3.4. Función cúbica

Una función *cúbica* es aquella que tiene la forma, o puede ser llevada a la forma:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ , \ \text{con} \ a \neq 0 \ , \ a,b,c,d \in IR$$

Un ejemplo de función cúbica es la función $y = f(x) = x^3$, cuya gráfica es:

x	$f(x) = x^3$
-2	-8
-1	-1
0	0
1/2	1/8
1	1
2	8
3	27



3.5. Funciones definidas por tramos

En muchas ocasiones se requiere más que una sola fórmula para describir una función. Se dice que estas funciones son *funciones definidas por tramos*.

Ejemplos de funciones definidas por tramos::

a) $f(x)=\begin{cases}1-2x & si \;\; x<1\\ x & si \;\; x\geq 1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<-1\\ x+1, & -1\leq x<3\\ 4, & x>5\end{cases}$

El dominio de la función del ejemplo a) es *IR*; y en el ejemplo b) es $]-\infty, 3]\ \cup\ ]5,+\infty[$.

Otro ejemplo:

Según un estudio de uso de Internet entre el año 1997 y el 2001, se determinó que el porcentaje *p*(*t*) de compradores de autos nuevos que utilizaban Internet para buscar o comprar modelos a través de este medio, en el año *t*, está dado por la función:

$$p(t)=\begin{cases}10t+15, & si \quad 0\leq t<1\\ 15t+10, & si \quad 1\leq t\leq 4\end{cases}$$ *t* medido en años.

donde *t*=0 representa el año 1997.

Esta notación dice que, se debe usar la primera fórmula, 10t + 15, cuando $0 \leq t < 1$, y la fórmula, 15t + 10, cuando $1 \leq t \leq 4$.

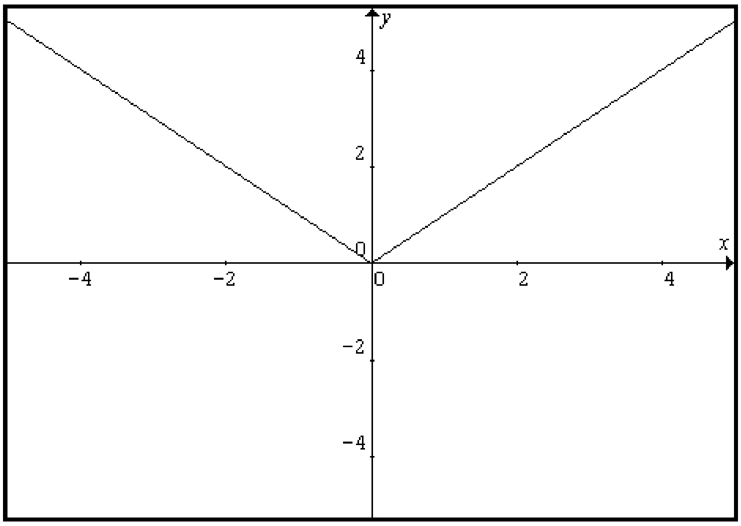
Por ejemplo: *p*(0.5) = 20, significa que cuando *t*=0.5 años (a mediados del primer año considerado en el estudio), el 20% de las personas que compraron auto, utilizaron la Internet para buscar o adquirir el modelo.

3.6. Función valor absoluto

La función *valor absoluto*, básica, se define: $y = f(x) = |x|$.

Propiedades

1) Su dominio es *IR*, y su recorrido es $IR^+ \cup \{0\}$.
2) La función $f(x)=|x|$ es una función par.



Gráfica de $y = f(x) = |x|$

3.7. Función racional

Una **función racional** *f* es una función definida por una expresión algebraica que es el cuociente de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, tal que $q(x) \neq 0$.

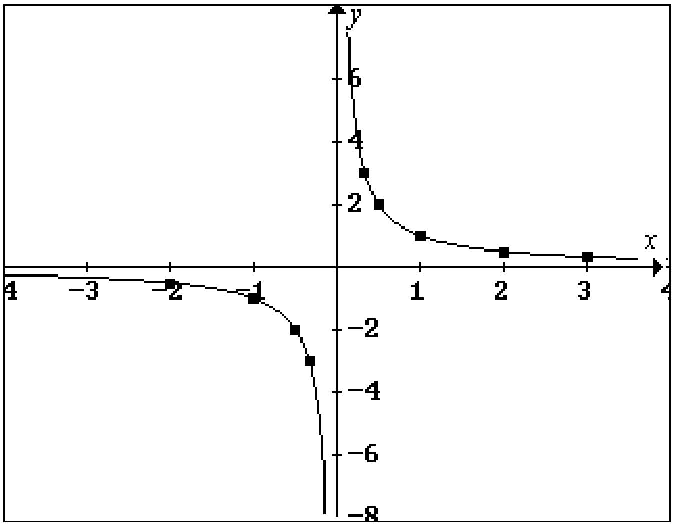
Ejemplos de funciones racionales:

$f(x) = 4x + 1$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ $\qquad f(x) = \frac{x+1}{x^2 - x}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x}$

A continuación se presenta la gráfica de la función racional $f(x) = \frac{1}{x}$:

x	$f(x)=\dfrac{1}{x}$
-2	-1/2
-1	-1
-1/2	-2
-1/3	-3
0	No está definida
1/3	3
1/2	2
1	1
2	½
3	1/3



Trazado de la gráfica de una función racional

Para obtener un esbozo de la gráfica de $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, es necesario determinar:

- El *dominio* de *f*.
- *Asíntotas verticales* (si es que las hay).

  Nota. Sea *r* una raiz real de *q*(*x*). Si $\lim_{x\mapsto r^-} f(x)=\infty$ o $\lim_{x\mapsto r^+} f(x)=\infty$ entonces la recta *x*=*r* es una asíntota vertical para la gráfica de *y*=*f*(*x*).

- Intersecciones de la gráfica de *f* con el eje X, si es que existen.
- *Asíntotas horizontales* (si es que los hay).

  Nota. Si existe *c* en *IR* tal que $\lim_{x\mapsto +\infty} f(x)=c$ o $\lim_{x\mapsto -\infty} f(x)=c$ entonces la recta *y*=*c* es una asíntota horizontal.

  Para cada asíntota horizontal *y*=*c*, determinar si es que existen, los puntos de intersección de *f* con la recta *y*=*c*.

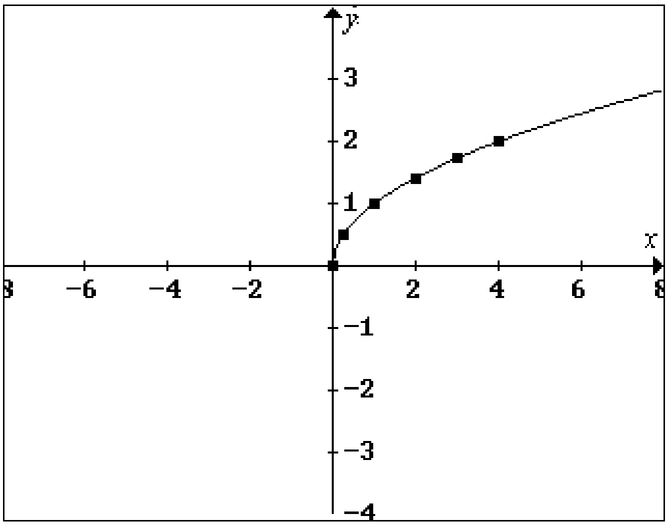
- Intersecciones de la gráfica de *f* con el eje Y, si es que existen.
- Análisis de *signos* de *f*(*x*). Los puntos críticos de *f*(*x*), dividen a la recta real en intervalos o sectores, y en cada sector el signo de *f*(*x*) es determinado.
- *Graficar f* en cada región del plano XY, determinadas por las asíntotas verticales.

3.8. Función raíz cuadrada

Ejemplos de funciones raíz cuadrada: la función $f(x)=\sqrt{x}$, la función $f(x)=-\sqrt{x}$, la función $f(x)=\sqrt{x+1}$, etc.

Gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x}$

x	$f(x)=\sqrt{x}$
0	0
1/4	½
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2



El dominio y el recorrido de esta función es $IR^{+}\cup\{0\}$.

3.9. Proporcionalidad y funciones de potencia

Proporcionalidad

a) Se dice que una variable y es *directamente proporcional* a la variable *x*, si existe una constante *k* distinta de 0 tal que:

$$y = k\ x$$

La constante k se llama *constante de proporcionalidad.*

b) Se dice que una variable y es *inversamente proporcional* a la variable *x*, si existe una constante *k* distinta de 0 tal que:

$$y=\frac{k}{x}$$

Nota. Si y es *directamente* proporcional a *x*, entonces la magnitud de una variable aumenta (/disminuye) cuando la otra aumenta (/disminuye). En cambio, si y es inversamente proporcional a x, entonces la magnitud de una variable aumenta cuando la otra disminuye.

Funciones de potencia

Se dice que una función *f*(*x*) es una *función potencia* de *x* si *f*(*x*) es proporcional a una potencia de *x*. Si *c* es la constante de proporcionalidad, y *m* es la potencia, entonces:

$$f(x) = c\,x^m$$

Nota. Las funciones definidas por proporcionalidad directa o inversa, son ejemplos de funciones de potencia.

Ejemplos de funciones de potencia

1) Las funciones $y = 0.03x$, $y = 3x^2$, $y = 5\sqrt{x}$, $y = \dfrac{2}{5x}$, $y = \dfrac{5}{x^3}$ son funciones de potencia.

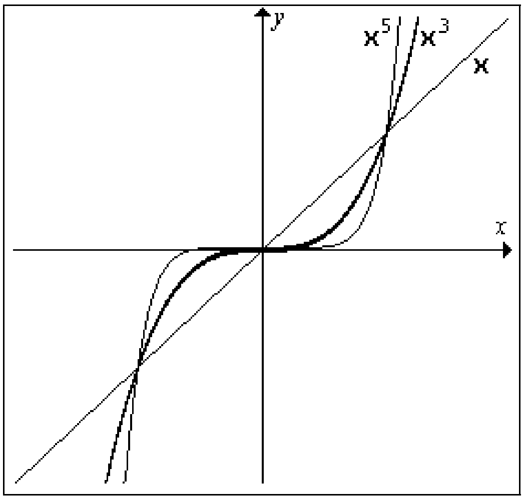
2) El período del péndulo T, es la cantidad de tiempo necesaria para que el péndulo realice una oscilación completa.

   Resultado de experimentos, se ha encontrado que para oscilaciones pequeñas, el período T es aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud L del péndulo, expresado mediante la relación: $T = k\sqrt{L}$, donde k es una constante. Notar que T es una función potencia de L.

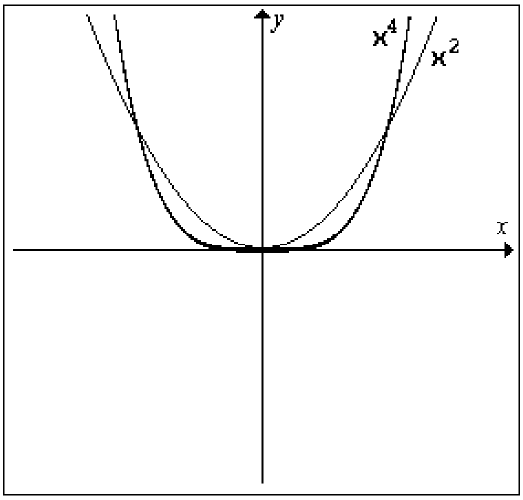
3) El peso w de un objeto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r, desde el centro de la Tierra al objeto. Luego, existe una constante k tal que: $w = \dfrac{k}{r^2}$.

   Notar que w es una función potencia de r.

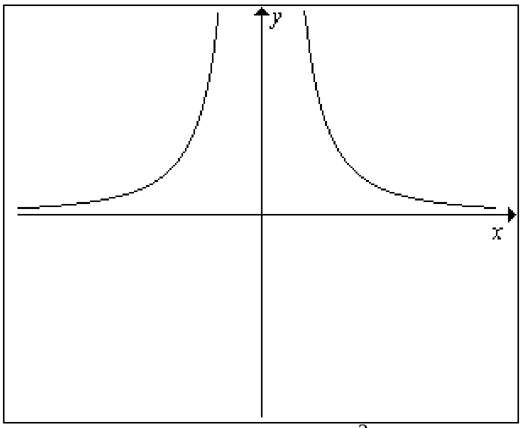
Gráficas de funciones de potencia $f(x) = c\,x^m$



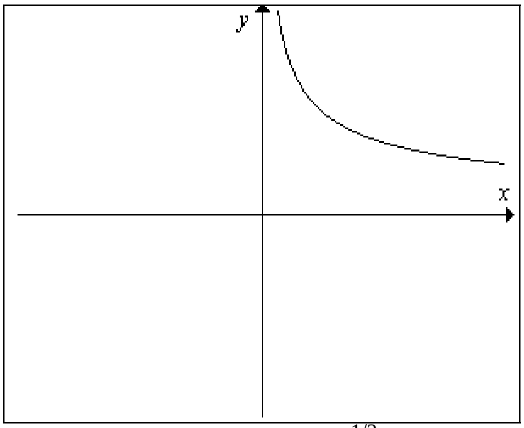
Gráficas de $y=x^m$
para m entero positivo impar



Gráficas de $y=x^m$
para m entero positivo par



Gráfica de $y=x^{-2}$



Gráfica de $y=x^{-1/2}$

Nota. La gráfica de $f(x) = c\ x^m$ está relacionada con la gráfica de $y = x^m$.

Observaciones.
Las funciones revisadas hasta el momento son **funciones algebraicas**, que son funciones definidas mediante una expresión que contiene sólo operaciones algebraicas: adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces.

3.10. Función exponencial

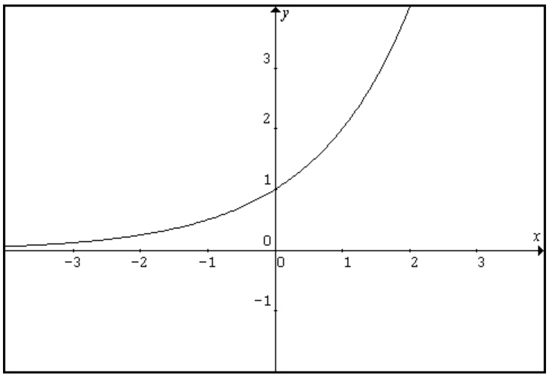
Una función de la forma $f(x) = a^x$, con a>0, $a \neq 1$ es llamada **función exponencial** de **base** a.

Nota. Funciones exponenciales de esta forma, donde a es una constante positiva, se utilizan para representar numerosos fenómenos que ocurren en ciencia naturales y sociales.

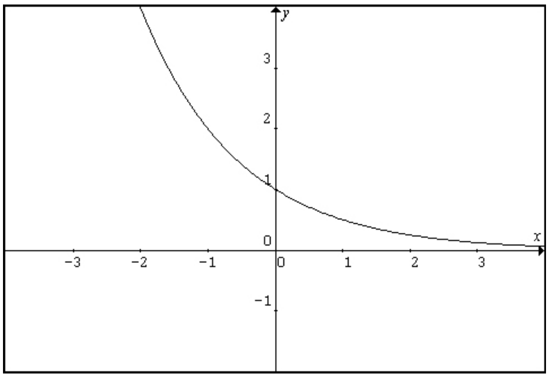
La **función exponencial general** es una función de la forma:

$$f(x) = C \cdot a^x$$

donde C es la cantidad inicial (cuando x=0); a es la base de la función exponencial.



$y = a^x, \quad a > 1$



$y = a^x, \quad 0 < a < 1$

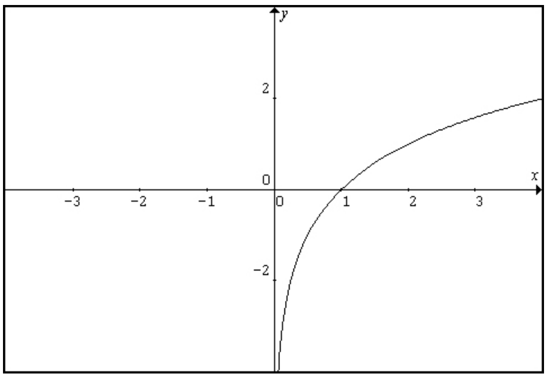
Propiedades

1. El dominio de una función exponencial es IR
2. El recorrido es IR^+.
3. La gráfica de una función exponencial intercepta al eje Y en el punto (0,1) debido a que $a^0 = 1$, para todo $a \neq 0$. Con el eje X no hay intersección.
4. Las bases más usuales son base 10 y la base e que es un número irracional donde $e \approx 2{,}71828$:

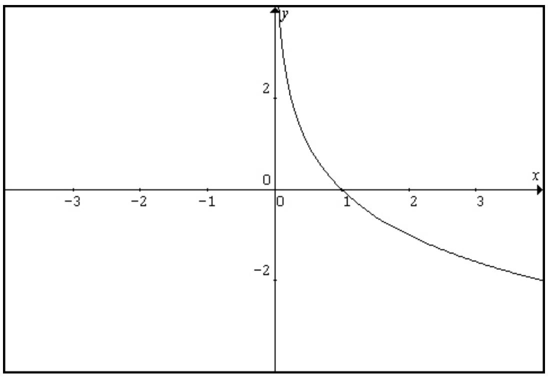
$$y = 10^x \qquad\qquad y = e^x$$

3.11. Función logarítmica

Una función logarítmica básica es de la forma $f(x) = \log_a x$, con a>0, $a \neq 1$.



$f(x) = \log_a x, \quad a > 1$



$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1$

Propiedades

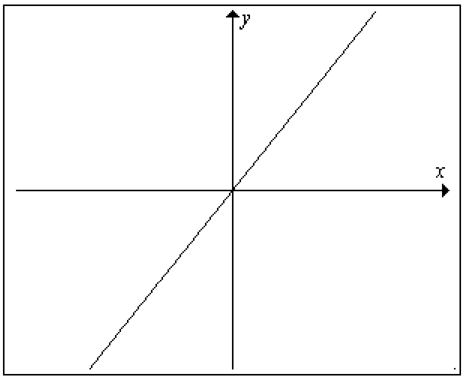
1. El dominio de una función logarítmica IR^{+}.
2. El recorrido es *IR*.
3. La gráfica de una función logarítmica $f(x) = \log_a x$ intercepta al eje X en el punto (1,0) debido a que $\log_a 1 = 0$, para todo *a*>0. Con el eje Y no hay intersección.
4. La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial, y viceversa.
$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$
5. Las bases más usuales son la base 10 y la base *e*.

   A los logaritmos con base *e* se les llama logaritmos naturales y se denotan por ln *x*.
   A los de base 10 se les denomina logaritmos comunes y se les simboliza por log *x*.
   Luego,
$$y = \log x \quad \Leftrightarrow \quad 10^y = x$$
$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$
   Algunas propiedades de los logaritmos:

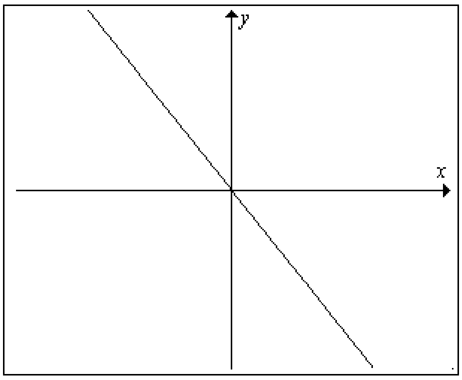
- $\log_a (X \cdot Y) = \log_a X + \log_a Y$
- $\log_a \dfrac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y$
- $\log_a X^p = p \log_a X$
- $\log_a 1 = 0$, $\quad \log_a a = 1$
- $\log_a a^N = N$
- $a^{\log_a M} = M$, en particular $10^{\log M} = M$, y $e^{\ln M} = M$
- Si $\log_a$ B = $\log_a$ C, entonces B=C.
- **Cambio de base**: $\log_b X = \dfrac{\log_a X}{\log_a b}$

3.12. Resumen gráficas de funciones básicas

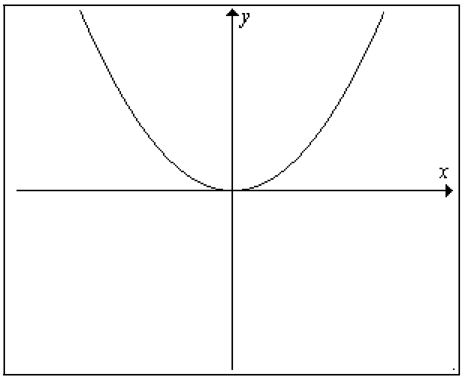
En el trabajo con funciones aquellas que se usan con mayor frecuencia y cuyos gráficos es conveniente recordarlos, son:



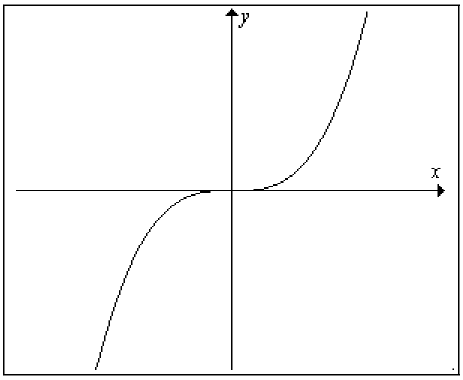
$f(x) = ax, \quad a > 0$



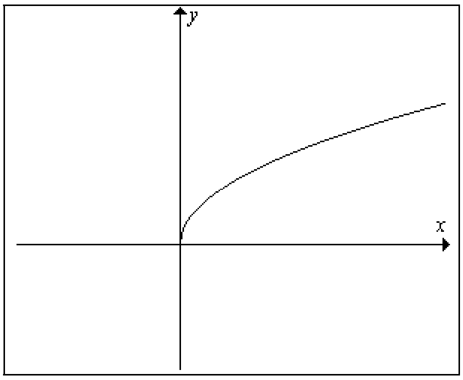
$f(x) = ax, \quad a < 0$



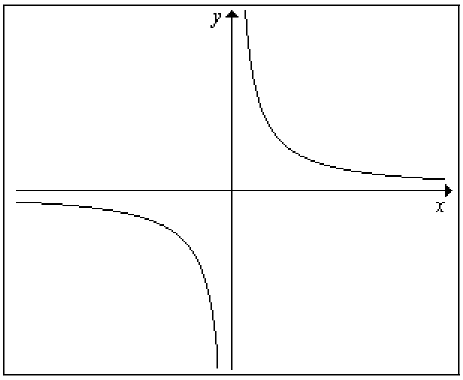
$f(x) = ax^2, \quad a > 0$



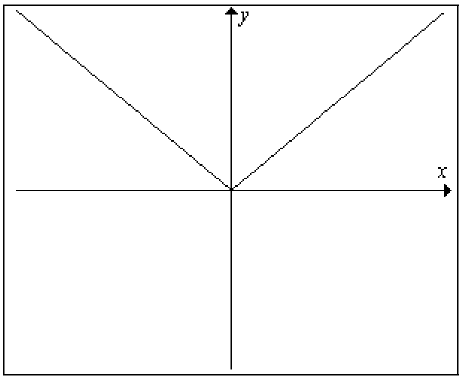
$f(x) = ax^3, \quad a > 0$



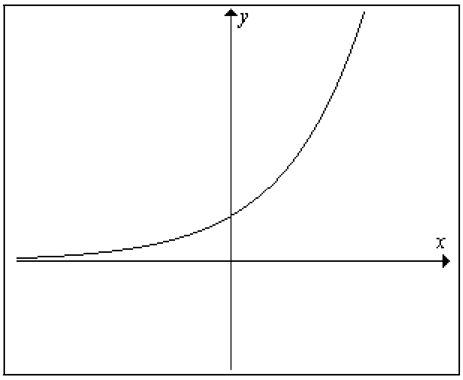
$f(x) = \sqrt{x}$



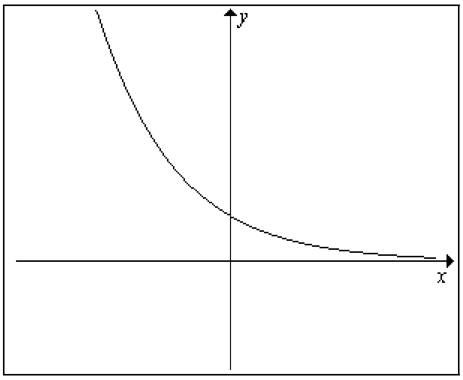
$f(x) = \dfrac{1}{x}$



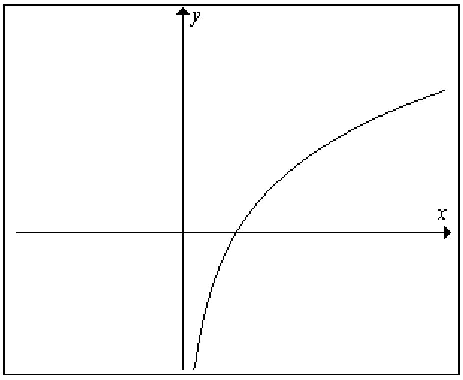
$f(x) = |x|$



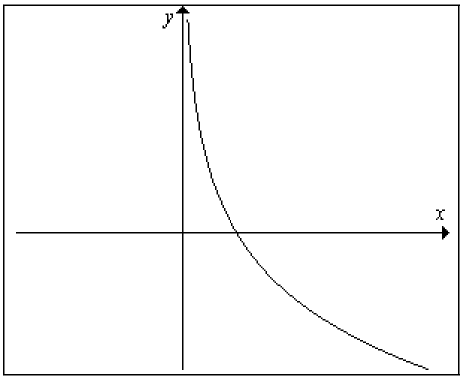
$f(x) = a^x, \quad a > 1$



$y = a^x, \quad 0 < a < 1$



$f(x) = \log_a x, \quad a > 1$



$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1$

3.13. Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son funciones *periódicas*, es decir, son funciones que repiten sus valores a intervalos regulares (repiten siempre el mismo ciclo).

En general, al graficar funciones trigonométricas en el plano coordenado, se denota por x a la variable independiente, medida en radianes, e y a la variable dependiente.

a). Función seno

La función *seno* es la función definida por: $f(x) = \sin x$.

Características de la función seno

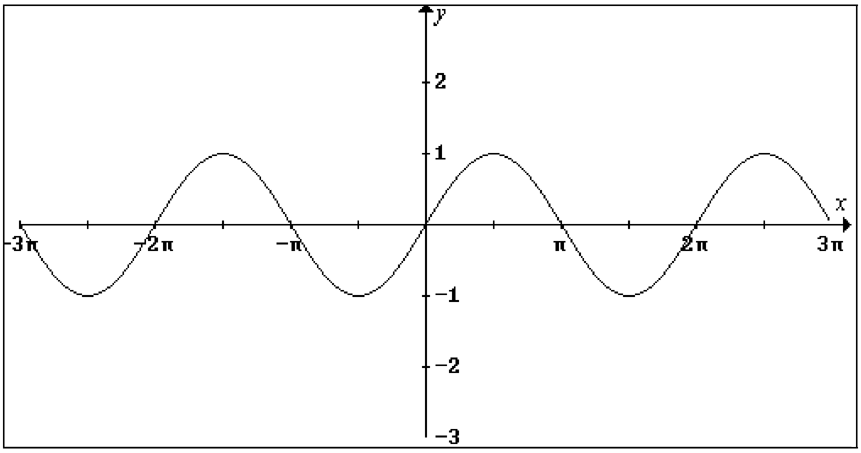
1. Dominio: *IR*
   Recorrido: [-1, 1]

2. El **período** de la función seno es 2 π.

3. La función *y*=sen *x* es impar, ya que sen(-*x*)=-sen *x*, para todo *x* en *IR*.

4. La gráfica de y=sen *x* intercepta al eje *X* en los puntos cuyas abscisas son: *x* =n π. para todo número entero *n*.

5. El valor máximo de sen*x* es 1, y el mínimo valor es -1. La **amplitud** de la función y=senx es 1.



b). Función coseno

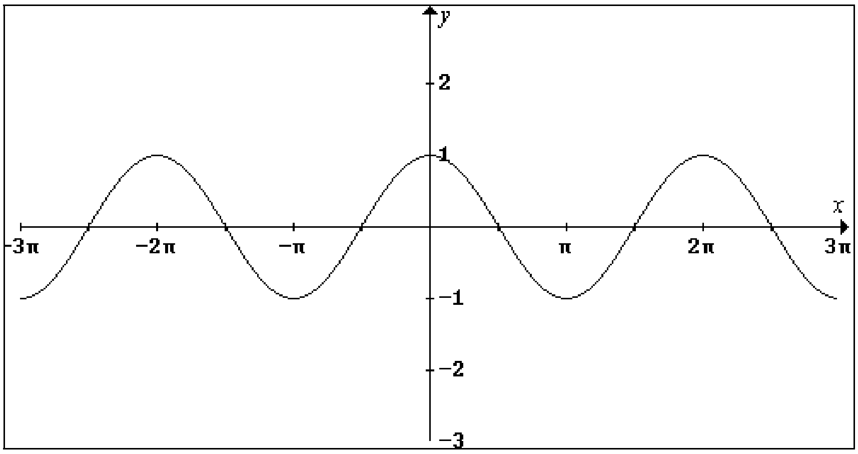
La función *coseno* es la función definida por: $f(x) = \cos x$.

Características de la función *coseno*

1. Dominio: *IR*
   Recorrido: [-1, 1]

2. Es una función periódica, y su **período** es 2π.

3. La función y=cos*x* es par, ya que cos(-*x*)=cos *x*, para todo *x* en IR.
4. La gráfica de y=cos*x* intercepta al eje *X* en los puntos cuyas abscisas son: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, para todo número entero *n*.
5. El valor máximo de cos*x* es 1, y el valor mínimo valor es -1. La **amplitud** de la función *y*=cos*x* es 1.



c). Función tangente

La función *tangente* es la función definida por: $f(x) = \tan x$.

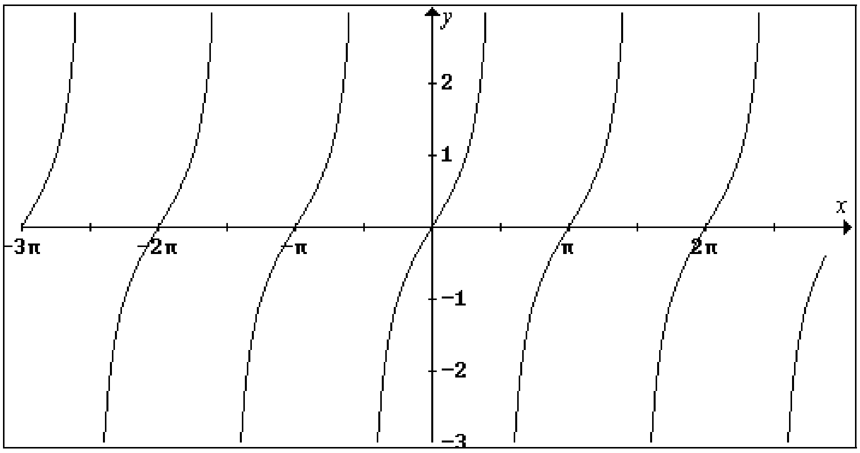
Características de la función *tangente*

1. Dominio: $IR - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \,/\, n \in Z \right\}$
   Recorrido: *IR*

2. La función tangente es una función periódica, y su **período** es π.

3. La función y=tan *x* es una función impar, ya que tan(-*x*)=-tan *x*.

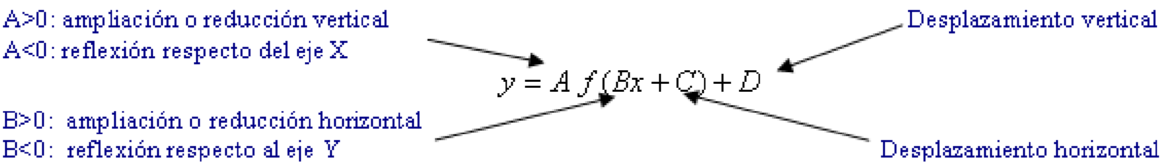
4. La gráfica de *y*=tan *x* intercepta al eje *X* en los puntos cuyas abscisas son: $x = n\pi$, para todo número entero *n*.



Las funciones trigonométricas fueron sistematizadas por Newton y Leibniz, quienes habían dado expansiones en forma de serie para las mismas. Pero fue Euler quien dio el tratamiento completo y sistemático a las funciones trigonométricas. La periodicidad de estas funciones y la introducción de la medida de los ángulos por radianes, fue realizada por Euler en su Introductio in Analysis Infinitorum de 1748.

3.14. Transformaciones de gráficas de funciones trigonométricas

Las reglas para desplazar, dilatar, contraer, reflejar la gráfica de una función se pueden aplicar a las funciones trigonométricas, recordadas en el siguiente diagrama:



Funciones sinusoidales

Son funciones relacionadas con las funciones seno y coseno:

$$y = A\operatorname{sen}(Bx + C) + D, \qquad y = A\cos(Bx + C) + D$$

o una combinación de éstas.

Estas funciones pueden ser utilizadas para obtener conocimientos del mundo físico, económico, político, artísticos y en muchos otros campos. A continuación se interpretarán estas funciones matemáticamente.

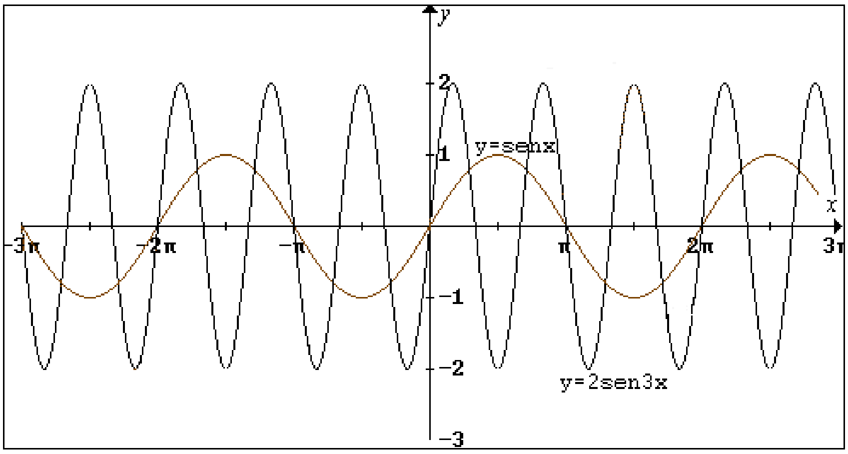
Características de estas funciones

Las funciones $y = A\text{sen}(Bx + C) + D$, $y = A\cos(Bx + C) + D$ son periódicas, con:

- **Amplitud**: |A|, que es el promedio entre los valores máximo y mínimo.
- **Período**: $\dfrac{2\pi}{B}$.
- **Desplazamiento vertical**: D
- **Desplazamiento horizontal:** $-\dfrac{C}{B}$ unidades a la derecha o a la izquierda, según si C es negativo o positivo respectivamente. Este número se denomina **desfase**.

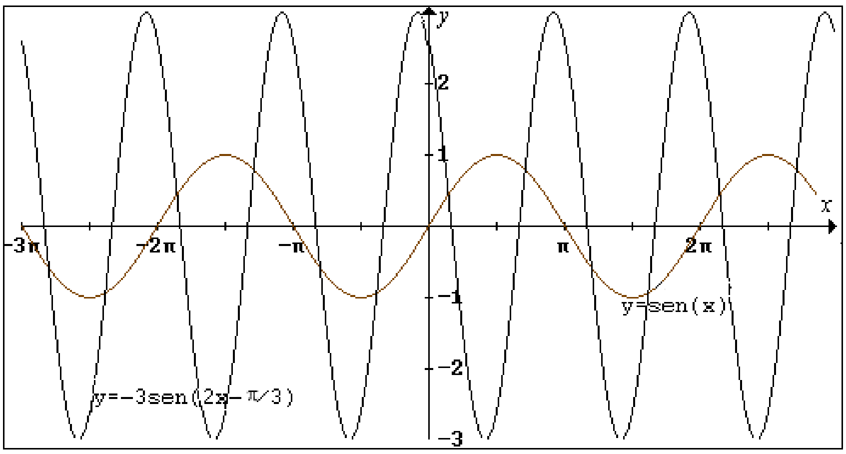
Ejemplo 1. Gráfica de la función $y = 2\sin(3x)$.

Amplitud=2, **Período**: $\dfrac{2\pi}{3}$



Ejemplo 2. Gráfica de la función $y = -3\sin(2x - \pi/3)$.

Amplitud = |-3| = 3, **Período =** $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$, **Desfase =** $\dfrac{\pi}{6}$



Ejemplo 3. Gráfica de la función $y = 2\cos(3x + \pi)$.

Amplitud = 2, **Período =** $\frac{2\pi}{3}$, **Desfase =** $-\frac{\pi}{3}$