SESIÓN 1

DISCUSIÓN SOBRE LAS NOCIONES DE PROBLEMA Y EJERCICIO.

MATERIAL TEÓRICO

"Lo que para una persona es un problema, para otra es un ejercicio y para una tercera, un fracaso."

Algunas definiciones de problema matemático

"Para que una situación constituya un problema para una persona, debe estar enterada de la existencia de la situación, reconocer que debe ejecutar algún tipo de acción ante ella, desear o necesitar actuar, hacerlo y no estar capacitado, al menos en lo inmediato, para superar la situación". Teaching and learning Mathematics, F. Bell, (1978).

"Tener un problema significa buscar de forma conciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de manera inmediata" Polya, (1961).

"Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma." Krulik y Rudnik, (1980).

"La presencia de una situación desconocida para el sujeto, no se conoce la vía de solución, la persona que se enfrenta a ella está motivada para trabajar en él, y se poseen los elementos necesarios para darle solución" Mazarío, (2002).

"Es cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfiladas, y no conozco el camino que me puede llevar". De Guzmán, (1991).

Resumen

Si establecemos un análisis de las definiciones descritas anteriormente podemos inferir que un problema es: "Una situación que provoca un bloqueo inicial, puesto que las técnicas habituales de abordarlo no funcionan. Para hacerlo, lo debemos reconocer como problema y finalmente adquirir un compromiso formal o informal de encontrar, mediante una exploración, nuevos métodos para darle una solución".

A continuación se presentan (con una solución incluida) 3 clásicos problemas matemáticos, que servirán como ejemplificación del concepto, anteriormente planteado

1-. La herencia del Hacendado

Un campesino hacendado tenía tres hijos, a quienes les dejó al morir una herencia de 17 caballos, con un testamento en el que dejaba impuesto que debían repartírselos, pero sin matar ninguno de ellos, para poder cumplir esta petición del padre debían hacerlo de la siguiente manera: el mayor recibiría la mitad; el segundo la tercera parte y el menor la novena parte. Los hijos de este campesino, discutían acaloradamente, al querer cumplir la voluntad del padre, y se dieron cuenta que no había más remedio que descuartizar algunos. Sin embargo en ese momento pasaba a caballo Pedro Urdemales, quien habiendo escuchado la discusión, propuso resolver el problema. ¿Como lo hizo?

Solución

Si sumamos una mitad, una tercera parte y una novena parte, no se obtiene el total de los 17 caballos (debería ser 17/17)

Efectivamente:

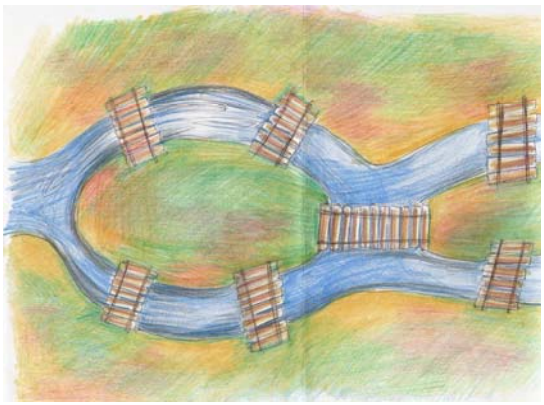
$$1/2 + 1/3 + 1/9 = (9+6+2)/18 = 17/18$$

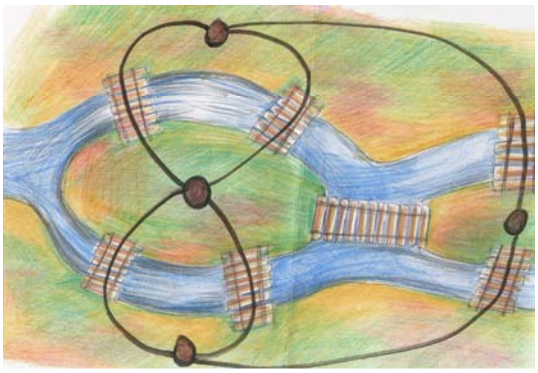
El número 17 (primo) no es múltiplo común de 2, 3 y 9.

Se debe hacer el reparto sin matar ningún caballo. Evidentemente, el problema no tiene solución tal y como se presenta. Sin embargo, Pedro Urdemales, intentó dar una solución lo mas aproximada posible y que dejase contentos a los hijos. Se dio cuenta que añadiendo otro caballo se obtenía un número (18) múltiplo de 2, 3 y 9 que permitía hacer el reparto exacto y además le permitía recuperar el caballo añadido (la suma de las tres fracciones era 17/18, de 18 caballos se repartían 17.

2-. Los puentes de Königsberg

Königsberg fue una populosa y rica ciudad de la Prusia Oriental(Cuna de Kant). Está situada en las orillas y en las islas del río Pregel, que en el siglo XVIII estaba atravesado por siete puentes. A partir de esto, se hizo popular como acertijo o adivinanza la pregunta: ¿Es posible dar un paseo empezando por una cualquiera de las cuatro partes de tierra firme, cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida?





Solución

Léonard Euler (1707-1783) realizó una abstracción del problema representando mediante puntos las cuatro porciones de terreno y dibujando un camino entre cada dos puntos por cada puente. Llamó orden de cada punto, al número de caminos que se reunían en el y se percató que el orden de cada punto visitado en un recorrido sin saltos ha de ser par (una entrada y una salida) excepto para dos puntos del grafo: aquellos donde se inicia y donde se acaba el recorrido, que han de tener orden impar. Si el punto donde se inicia y se acaba son el mismo entonces todos los puntos han de ser de orden par.

En el problema de Königsberg el orden de todos los vértices es 3, esto es impar, por lo que quedó claro que no existía solución para el problema. No había un camino que recorriese todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos

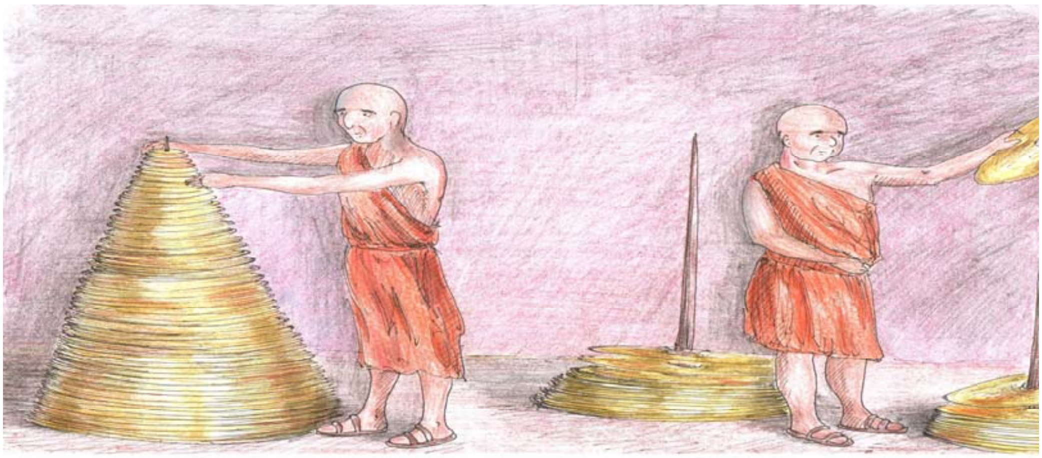
3- Las Torres de Hanoi

En 1883, el matemático francés Édouard Lucas d'Amiens publicó un problema bajo el pseudónimo de "Claus de Siam" que, sin embargo, perduraría en la legendaria forma que le dio De Parville al año siguiente:

"Él refirió que en el gran templo de Benarés, debajo de la cúpula que marca el centro del mundo, yace una base de bronce en la que se encuentran fijadas tres agujas de diamante de una codo[1] de altura y del grueso del cuerpo de una abeja. En una de estas agujas, Dios, en el comienzo de los siglos, colocó sesenta y cuatro discos de oro puro, el mayor sobre el plato de bronce, y los otros, en orden decreciente de anchura, superpuestos hasta la cima. Esta es la Torre de Brahma. Día y noche, sacerdotes muy pequeños, se turnan en la ocupación de transportar la torre de la primera aguja de diamante a la tercera, sin desviarse de las reglas fijas

[1] Un codo es una unidad de medida de longitud utilizada en Egipto y que corresponde a 52,3 cm. y se divide en 7 palmos o 28 dedos

e inmutables impuestas por Brahma. El sacerdote no debe mover más de un disco a la vez; y no debe colocar un disco más que en una aguja libre o sobre un disco mayor. Cuando siguiendo estrictamente estas recomendaciones los sesenta y cuatro discos hayan sido transferidos de la aguja en la que Dios los colocó a la tercera, la torre y los brahmanes se convertirán en polvo y será el fin del mundo." ¿Cuándo finalizarán los sacerdotes su tarea?



Solución

El número de pasos se puede calcular por inducción:

-. Si tenemos un disco, necesitaremos una única traslación

-. Si tenemos dos discos, necesitaremos tres traslaciones: el pequeño a un poste; el grande al otro; y el pequeño encima del grande

-. Si tenemos n+1 discos, primero llevamos n discos a otro de los postes. Supongamos que necesitamos x traslaciones. Luego llevamos el disco restante (el mayor) al tercer poste, y luego trasladamos los n discos menores encima del mayor. Total: 2·x+1 traslaciones

-. Para un disco (n = 1), tenemos una traslación = 21 − 1

-. Para dos discos (n = 2), tenemos 2·(21 − 1) + 1 = 22 – 1

-. Para n: 2(2n−1 − 1) + 1= 2n − 1

Total, que si n = 64, el número de traslaciones es $2^{64} - 1$ = 18.446.744.073.709.551.615

Se puede transformar a tiempo asignándole tiempo a cada traslación hecha por los monjes. Por ejemplo: 1 segundo por cada traslación, es decir:

Transformando años a segundos queda:

1 año ------------------> 31104000 segundos

X años -------------- -> 18.446.744.073.709.551.615 segundos

X= 593.066.617.596 años

Entonces los sacerdotes se demoraran 593.066.617.596 años, en trasladar los discos, en consecuencia podemos dormir tranquilos.

Es conveniente señalar después de estos tres clásicos ejemplos de problemas, que ellos están dirigidos esencialmente a enriquecer la visión del docente, sobre el concepto anteriormente señalado y que no son representativos de los que se ocuparan más adelante.

Algunas definiciones de ejercicio matemático

"Consiste en trabajar sobre cierto número de ejemplos idénticos o casi idénticos a los que ha resuelto en clase el profesor o se han explicado ya en el texto, es decir, situación que plantea una cuestión matemática cuyo método de solución es inmediatamente accesible al sujeto que intenta responderla, porque dispone de un algoritmo que relaciona lo que se da (datos) y lo que se pide".

Llivina (1998).

"Aquella exigencia para actuar donde la vía de solución es conocida para el estudiante".

Jiménez, (2000.)

"Un ejercicio matemático tiene las mismas características que un ejercicio físico. Él es el uso repetido de destrezas -calistenia- tal que ellas [las destrezas] se desarrollen, sean retenidas, y sean puestas a tono. Un cantante practica la escala musical para tener precisión en el tono; un atleta trota para mantenerse en forma; un alumno hace ejercicios matemáticos para mantener e incrementar sus habilidades". Dwyer y Elligett,(1970)

Resumen

De lo anterior podemos inferir que un ejercicio matemático, corresponde a: "Una situación conocida, que es accesible para el sujeto y que es solucionable a través de una secuencia de pasos o algoritmo matemático ya conocido".

A continuación 4 ejercicios matemáticos, para enseñanza media, que servirán como ejemplificación del concepto, anteriormente planteado.

1-. Calcular: 22 + 32 + 5

2-. Resolver la siguiente ecuación: $5x - 30 = 3x + 8$

3-. En un árbol había 9 pájaros. Se fueron 4 pájaros. ¿Cuántos pájaros quedan?

4-. En mi despensa tengo 2 cajas de aceite con 6 botellas cada una. ¿Cuántas botellas de aceite tengo?

Diferencias entre ejercicios y problemas

	Problema	**Ejercicio**
Comprensión	No se sabe a primera vista cómo atacarlo y resolverlo; a veces ni siquiera se ve claro en qué consiste le problema.	Se entiende de inmediato en qué consiste la cuestión y cuál es el medio para resolverlo.
Objetivos	Es que el alumno busque, investigue, utilice la intuición, profundice en el conjunto de conocimientos y experiencias anteriores y elabore una estrategia de resolución.	Es que el alumno aplique de forma mecánica conocimientos y algoritmos ya adquiridos y fáciles de identificar.
Aplicación	Están abiertos a posibles variantes y generalizaciones y a nuevos problemas.	Son cuestiones cerradas.
Motivación	Supone una fuerte inversión de energías y de afectividad. A lo largo de la resolución se suelen experimentar sentimientos de ansiedad, de confianza, de frustración, de entusiasmo, de alegría, etc.	No suele implicar la afectividad.
Tiempo	Exige un tiempo que es imposible de prever de antemano.	Exige poco tiempo y éste se puede prever de antemano.
Textos	Son escasos	Abundan

MATERIAL PARA EL PROFESOR (Práctico)

Tiempo: 90 Minutos

Actividad

"Diferencias entre problema y ejercicio"

Objetivos

-. Comprender los conceptos de problema y ejercicio (en matemáticas).

-. Analizar las diferencias entre problema y ejercicio

Desarrollo

Se pide a los estudiantes se dividen en grupos de 4 a 5 integrantes de tal forma que se mantengan unidos hasta el término de las sesiones.

Una vez realizado lo anterior, se utiliza como ejemplificación en la pizarra los siguientes ejemplos dos corresponden a un problema matemático y otros dos corresponden a ejercicios. Se invita a los grupos a resolverlos, sin mencionar cual es cual:

a) Buscando agua, una rana cayó en un pozo de 30 m de hondo. En su intento de salir, la obstinada rana conseguía subir 3 metros cada día, pero por la noche cuando dormía, resbalaba y bajaba dos metros. ¿Podrías decir cuántos días tardó la rana en salir del pozo?
(Problema)
Sol: 28 días. El día 28 sube 3 metros y logra salir del pozo.

b) Un lechero dispone únicamente de dos jarras de 3 y 5 litros de capacidad para medir la leche que vende a sus clientes. ¿Cómo podrá medir cuatro litros sin desperdiciar la leche
(Problema)
Sol: Primero llena la jarra de 3 litros. Luego vierte el contenido en la jarra de 5 litros. Vuelve a llenar la jarra de 3 litros y vuelve a verter su contenido en la jarra de 5 litros que ya está medio llena. Lo que quede en la jarra de 3 litros será un litro de leche.

c) Un árbol mágico duplica cada día su altura. Si hoy mide 2 metros, ¿Cuánto medirá mañana?.(Ejercicio)

d) $5x + 23 = 2x - 32$? (Ejercicio)

¿Qué es un ejercicio en matemáticas?.
Se plantea en la pizarra, a través de un plenario el desarrollo del concepto.

¿Qué es un problema en matemáticas?
Se plantea en la pizarra, a través de un plenario el desarrollo del concepto. .

Tiempo: 15 minutos

Una vez que los alumnos han trabajado en las definiciones anteriormente solicitadas, cada grupo aporta con diferentes características, a una definición general de problema y ejercicio matemático. Esta es posteriormente contrastada con definiciones que se encuentran en la parte teórica.

Revisar en la pizarra con los aportes de los grupos. Agrega aspectos importantes que no hayan aparecido, y termina con un ejemplo de Ejercicio y uno de Problema.

Cierre
Presentación de un problema y un ejercicio para analizar sus diferencias.
Es posible confeccionar un cuadro resumen de diferencias donde se puedan comparar y analizar las características principales de los conceptos de problema y ejercicio.

IMPORTANTE: Entregar hoja de recursos sesión II de tal forma que puedan avanzar en el desarrollo del problema y tengan tiempo para poder desarrollarlo correctamente, en la siguiente sesión.

MATERIAL PARA EL ALUMNO

Discusión sobre las nociones de problema y ejercicio

1-. ¿Que es un problema?

2-. ¿Qué es un ejercicio?

3-. ¿Qué diferencias existen entre un problema y un ejercicio?. Menciona al menos 2.

4-. Conclusiones