Capítulo I
ELEMENTOS PREVIOS

Antes de iniciar lo referente a Criterios de Divisibilidad, recordaremos algunos conceptos y propiedades previas que nos permitirán comprender de mejor manera el contenido que trataremos en los capítulos posteriores.

1.1. NÚMEROS NATURALES $(\mathbb{N})$

Definición 1.1.
El conjunto de los Números Naturales $(\mathbb{N})$ es el primer conjunto numérico conocido y estudiado por el hombre. Se expresa por extensión como:

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \dots\}$$

El conjunto de los Números Naturales es un conjunto con primer elemento (1), ordenado e infinito.

1.2. NÚMEROS ENTEROS $(\mathbb{Z})$

Con los Números Naturales no es posible realizar diferencias donde el minuendo es menor que el que el sustraendo**,** pero en la vida nos encontramos con operaciones de este tipo donde a un número menor hay que restarle uno mayor

Estas situaciones obligan a ampliar el concepto de números naturales, introduciendo un nuevo conjunto numérico llamado Números Enteros.

Definición 1.2.
El conjunto de los **Números Enteros** $(\mathbb{Z})$ está formado por la unión del conjunto de los Números Naturales o Enteros Positivos, el cero y el conjunto de los Enteros Negativos. Es decir,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{-} \cup \{\mathbf{0}\} \cup \mathbb{Z}^{+}$$

Donde:

$$\mathbb{Z}^{+} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \text{ y } \mathbb{Z}^{-} = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$$

Luego,

$$\mathbb{Z} = \{\dots \mathbf{-3}, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$$

1.3. PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN EN $\mathbb{Z}$

En los números enteros se definen 2 operaciones fundamentales: adición y multiplicación. A continuación se detallan sus principales propiedades:

1.3.1. Propiedades de la Adición en $\mathbb{Z}$

1.3.1.1. Clausura en $\mathbb{Z}$

Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$a + b = c \in \mathbb{Z}$$

Es decir, la suma de dos números enteros es otro número entero.

1.3.1.2. Asociatividad

Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Es decir, el modo de agrupar los sumandos no varía la suma.

1.3.1.3. Conmutatividad

Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$a + b = b + a$$

Es decir, el orden de los sumandos no varía su suma.

1.3.1.4. Elemento Neutro

Existe el número 0 en $\mathbb{Z}$, de modo que para todo a en $\mathbb{Z}$ se tiene que:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Por esta razón, el 0 recibe el nombre de neutro aditivo.

1.3.1.5. Elemento Inverso

Para todo $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$ existe un único $a' \in \mathbb{Z}$ tal que se tiene que:

$$\boldsymbol{a + a' = a' + a = 0}$$

Donde a' recibe el nombre de opuesto de a.

1.3.2. Propiedades de la Multiplicación en $\mathbb{Z}$

1.3.2.1. Clausura en $\mathbb{Z}$

Para todo $a, b\ \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$a \cdot b = c \in \mathbb{Z}$$

Es decir, el resultado de multiplicar dos números enteros es otro número entero.

1.3.2.2. Asociatividad

Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Es decir, el modo de agrupar los factores no varía el resultado.

1.3.2.3. Conmutatividad

Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Es decir, el orden de los factores no varía el producto.

1.3.2.4. Elemento Neutro

Existe el número 1 en $\mathbb{Z}$, de modo que para todo a en $\mathbb{Z}$ se tiene que:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Por esta razón, el 1 recibe el nombre de neutro multiplicativo.

Nota: Observar que la multiplicación en los nùmeros enteros no cumple la propiedad del elemento inverso.

Principio de la Buena Ordenación (P.B.O.)

Todo subconjunto no vacío S de los números enteros no negativos (enteros mayores o iguales que cero) tiene primer elemento. En otras palabras, existe un elemento q en S tal que $q \leq s$ para todo elemento s en S.

Teorema (Propiedad Arquimediana).

Si a y b son números enteros positivos, entonces existe un número entero positivo n tal que $na > b$.

Demostración (Indirecta). Supongamos que no existe tal entero positivo n, esto significa que $na \leq b$ para todo entero positivo n. Nótese que a y b son números enteros positivos dados y fijos. Construyamos el siguiente conjunto S

$$S = \{b - na : n \in Z, n > 0\} = \{b - a, b - 2a, \dots\}.$$

Como hemos supuesto que $b - na > 0$ para todo entero positivo n, se tiene que S es un conjunto no vacío de números enteros positivos. Aplicando el Principio de Buena Ordenación se obtiene que S posee un primer elemento. Luego existe $m_0 \in Z$ tal que $b - m_0 a \leq b - na$ para todo n entero positivo. De esta última desigualdad se obtiene que $n \leq m_0$ para todo n entero positivo, lo cual evidentemente es falso, pues basta tomar $n = m_0 + 1 > m_0$. Esta contradicción se obtiene por la suposición de que $na \leq b$ para todo entero positivo n. Por lo tanto el teorema ha sido probado.

1.4. DIVISIÓN ENTRE NÚMEROS NATURALES

La **división** es una operación aritmética de descomposición que consiste en averiguar cuántas veces un número (el divisor) está contenido en otro número (el dividendo). La división es una operación matemática, específicamente, de aritmética elemental, inversa de la multiplicación y puede considerarse también como una resta iterada.

Al resultado entero de la división se denomina cociente y si la división no es exacta, es decir, el divisor no está contenido un número exacto de veces en el dividendo, la operación tendrá un resto o residuo, donde:

$$\begin{array}{r|l} Dividendo & Divisor \\ \cline{2-2} Resto & Cociente \end{array}$$

- **Dividendo** es el número que se va a dividir.
- **Divisor** es el número que divide.
- **Cociente** es el resultado de la división.
- **Resto** es lo que ha quedado del dividendo, que no se ha podido dividir porque es más pequeño que el divisor.

1.5. ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

Teorema
Dados dos enteros cualesquiera a y b $(b > 0)$, existen dos únicos enteros q y r tales que $a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < b$. Si $b \nmid a$ entonces $0 < r < b$.

El cociente y resto de una división entera son únicos.

1.6. EJERCICIOS RESUELTOS

1) Siete niños, por turno, reciben un caramelo. Cuando cada uno tiene 17 caramelos ya no se puede seguir repartiendo equitativamente pero sobran caramelos. El número de caramelos para repartir es mayor que 100. ¿Qué cantidad de caramelos podría haber como máximo para repartir?

Solución.

Como se reparten caramelos entre 7 niños y cada niño recibe 17 caramelos, entonces tenemos que se han repartido

$$17 \cdot 7 = 119 \; caramelos$$

Como sobran caramelos y preguntan por la cantidad máxima, tenemos que:
Sea n el número máximo de dulces, entonces:

$$n = 17 \cdot 7 + r$$

Luego, el mayor valor que puede tomar debe ser $r < 7$, es decir 6, por lo tanto.

$$n = 17 \cdot 7 + r = 17 \cdot 7 + 6 = 125$$

Luego, la cantidad máxima de caramelos que podría haber para repartir es 125.

2) Use el algoritmo de la división para probar que todo entero impar es de la forma $4k + 1$ ó $4k + 3$ para algún entero k.

Solución.

Sea *a* un entero impar cualquiera y dividamos *a* entre 4 es decir:

$a = 4k + r$, $0 \leq r < 4$ es decir, $r = 0$; $r = 1$; $r = 2$; $r = 3$

Entonces reemplazando tenemos que:

$a = 4k + 0$, no impar, pues es de la forma par $a = 4k$
$a = 4k + 1$, es impar
$a = 4k + 2 = 2(2k + 1)$, no impar, pues es de la forma par $a = 2k$.
$a = 4k + 3$, es impar

Así $a = 4k + 1 \; o \; a = 4k + 3$ es un número impar para cualquier entero k.

3) El resto de la división de un número por 4 es 3 y el resto de la división del mismo número por 9 es 5. Encontrar el resto de la división del número por 36.

Solución.

Se tiene $a \epsilon \mathbb{N}$, tal que

$$a = 4 \cdot q + 3$$
$$a = 9 \cdot k + 5$$

Se trata de hallar el resto de la división de a por 36, y se escribe:

$$4 \cdot q + 3 = 9 \cdot k + 5$$
$$4 \cdot q = 9 \cdot k + 2$$
$$4 \cdot \underbrace{(q - 2 \cdot k)}_{m} = k + 2$$

Luego, $k + 2 = 4 \cdot m$, entonces $k = 4 \cdot m - 2$ y así

$$a = 9(4 \cdot m - 2) + 5 = 36m - 18 + 5 = 36m - 13 = 36(m - 1) + 23$$

Luego, el resto buscado es 23.

4) Calcular todos los restos posibles de la división de un cuadrado por 5.

Solución.

Al calcular los restos de n^2 en la división por 5. Para ello se escribe:

$$n = 5 \cdot k + r, \text{ donde } r = 0, 1, 2, 3, 4$$

Puesto que

$$n^2 = 5 \cdot k' + r^2 \ \text{ (con } k' = 5 \cdot k^2 + 2kr\text{)}$$

El problema se reduce a calcular los restos de $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2$. Estos son respectivamente $0, 1, 4, 4, 1$.

5) Demostrar que el cuadrado de cualquier número entero es de la forma $3k$ o $3k+1$.

Solución.

Sea n un entero cualquiera. Entonces por teorema de algoritmo de la división existen q y r tales que:

$$n = 3q + r, \text{ con } 0 \leq r < 3$$

El cuadrado de n es

$$n = 3q + r \Longrightarrow n^2 = (3q+r)^2 = 3(3q^2 + 2qr) + r^2 = 3k_1 + r^2, \text{con } k_1 = 3q^2 + 2qr$$

Luego,

Para $r = 0,\ \ n^2 = 3k, \text{con } k = k_1$

Para $r = 1,\ \ n^2 = 3k + 1\ , \text{con } k = k_1$

Para $r = 2,\ \ n^2 = 3k_1 + 4 = 3(k_1 + 1) + 1 = 3k + 1\ , \text{con } k = k_1 + 1$

1.7. EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Determine el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

a) 25 entre 3 b) 542 entre 8 c) 722 entre 6 d) -887 entre 43

2) Hallar 5 enteros de la forma en que se indica:

a) 3k + 2 b) 7k – 4 c) 9k + 1 d) 5k – 3

3) Sea k un entero. En cada caso determine el resto de la división indicada. Justifique en cada caso su respuesta.

a) 20k + 3 dividido entre 4 b) 20k + 4 dividido entre 4
c) 20k + 4 dividido entre 5 d) 49k + 5 dividido entre 7

4) Se sabe que el resto de la división de 748 por un número n positivo es 20 y el resto de la división de 1229 por n es 33. Se pide hallar n.

5) Calcular todos los restos posibles de la división de un cuadrado por 7.

6) Probar que el cuadrado de cualquier entero es de la forma $4k$ o $4k+1$.

7) Sean a y b enteros, $b \neq 0$. Si $a-b=175$ y la división de a por b tiene cociente 15 y resto 7, hallar a y b.

8) Halle un entero que sea simultáneamente de la forma $3k - 17$ y de la forma $4m + 3$.

9) Usando el algoritmo de la división, pruebe que todo entero n se puede escribir de la forma $2k+r$, siendo $r = 0\,,\ 1$.

10) Usando el algoritmo de la división, pruebe que todo entero de la forma $12k + 4$ también es de la forma $3m + 1$.